Universidad de Buenos Aires

Estabilidad I

Cables

Mecanica de Materiales Ortiz Berrocal

Cable

El cable es un **elemento estructural lineal en el que las dimensiones de su sección son muy pequeñas comparadas con su longitud.**

Debido a su **característica de flexibilidad** se utiliza como componente resistente en puentes colgantes, líneas de transmisiones eléctricas o telefónicas, etc, **en los que únicamente se consideran los esfuerzos axiles.**

Es un ***sistema deformable que sometido a la acción de un estado de carga, y sin tener en cuenta deformaciones elásticas asociadas a la variación de longitud, modifica la distancia entre sus puntos y cambia su forma o configuración, adaptando su geometría a la del funicular de cargas.***

Para se considerado Cable:

a) Dimensiones: **La sección transversal es despreciable comparada con su longitud.**

b) Flexibilidad: **El cable no resiste esfuerzos de flexión ni cortadura.** Tan sólo resiste esfuerzos axiles. En equilibrio estático puede adoptar distintas formas en función de las cargas que lo soliciten.

c) Rigidez: Analizado con el modelo de sólido mecánico, **su longitud no varía**, independientemente de la magnitud de las cargas.

d) Equilibrio: Sometido a un estado de cargas y adoptada la configuración deformada, **el cable se comporta como un sólido rígido,** cumpliendo por lo tanto con las ecuaciones de equilibrio.

Proyectar un cable

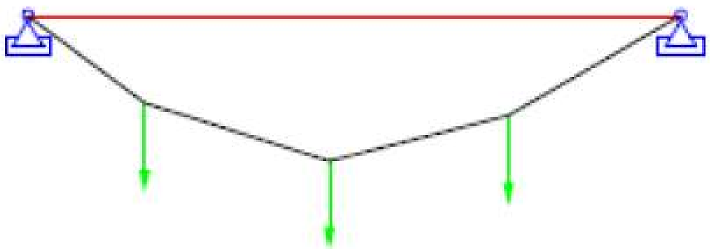
Para proyectar un cable es necesario conocer los valores que adquieren ciertos parámetros característicos:

- como fuerza en el cable,
- longitud del vano a salvar,
- flecha y longitud del cable.

Para su determinación es necesario considerar el equilibrio estático del elemento.

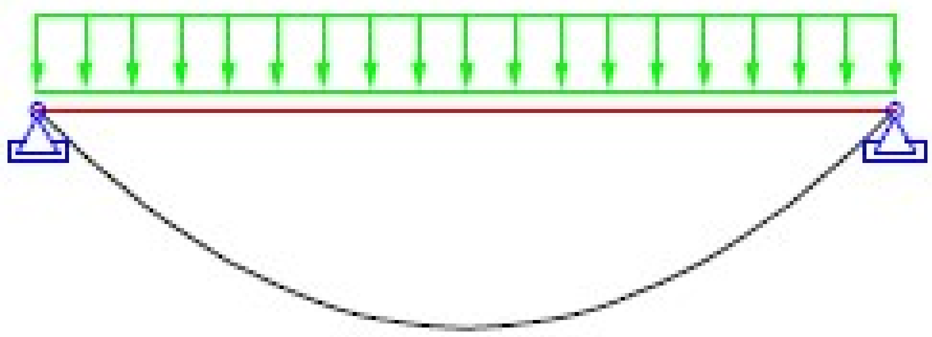
La configuración de equilibrio que adquiere un cable está directamente relacionada con el tipo de carga (funicular de cargas) que lo solicita.

a) Cargas Puntuales:La configuración de equilibrio que adquiere un cable sometido a cargas puntuales (considerando el efecto del peso despreciable) es poligonal.



La configuración de equilibrio que adquiere un cable está directamente relacionada con el tipo de carga (funicular de cargas) que lo solicita.

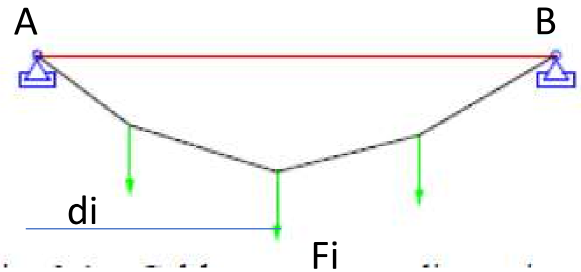
a) Cargas Distribuidas:configuración de equilibrio que adquiere el cable depende del tipo de carga.



Equilibrio de un Cable

- Vinculo: No presenta Resistencia a Traccion. Solo Apoyos fijos articulados.
- Sistema Estaticamente Indeterminado: 4 incognitas, tres ecuaciones de equilibrio.
- Por consiguiente, para la determinación de las reacciones de vínculo externo **se tendrá que plantear una cuarta ecuación en función de la longitud, la forma o fuerza en el cable en estudio**. De esta forma se puede hallar una solución única que se ajuste a las condiciones del problema.

Cables con Cargas concentradas



$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; R_{Ay}L - \sum_{i=1}^{n} F_i d_i = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{R_{Ay} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i d_i}{L}}$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \;\Rightarrow\; R_{Ax} = R_{Bx} \quad \boxed{???}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_{Ay} + R_{By} - \sum_{i=1}^{n} F_i = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{R_{By} = \sum_{i=1}^{n} F_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i d_i}{L}}$$

Para obtener los valores de las reacciones

es necesario conocer otro dato, como por ejemplo la **fuerza máxima o la pendiente máxima del cable**.

Dado que **la componente horizontal de la Fuerza de todos los tramos es la misma** (se comprobará posteriormente) dicha **Fuerza máxima aparece en el tramo de mayor pendiente**, ya que será el que tiene mayor componente vertical, y **que coincidirá con alguno de los situados en los extremos del cable**.

Tramos consecutivos – Proyección horizontal cte.

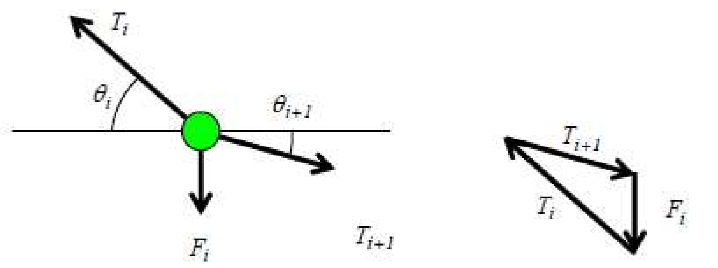


Fig. 3.2 – Equilibrio de ramales consecutivos.

Las condiciones de equilibrio estático para este punto son:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_i \cos\theta_i = T_{i+1} \cos\theta_{i+1} \qquad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_i sen\,\theta_i - T_{i+1} sen\,\theta_{i+1} - F_i = 0$$

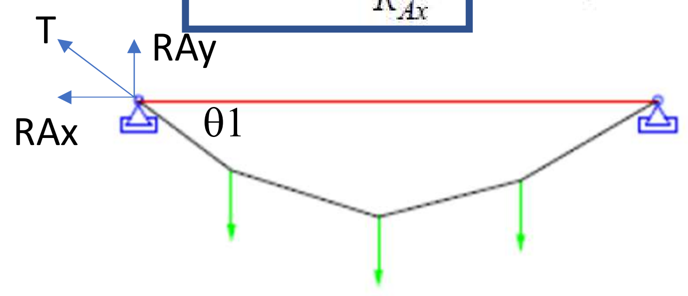
Con lo que se comprueba que en el caso de cable sometido a cargas concentradas verticales, las componentes horizontales de tensión (Tx) permanecen constantes

$$\boxed{T_x = T_i \cos\theta_i = T_{i+1} \cos\theta_{i+1}}$$

- Siendo T la fuerza en el cable y θ la pendiente del cable , las ecuaciones de equilibrio en cada uno de los extremos son:

$$R_{Ax} = T_1 \cos\theta_1 \qquad \boxed{R_{Ay} = T_1 sen\,\theta_1} \qquad R_{Bx} = T_n \cos\theta_n \qquad R_{By} = T_n sen\,\theta_n$$

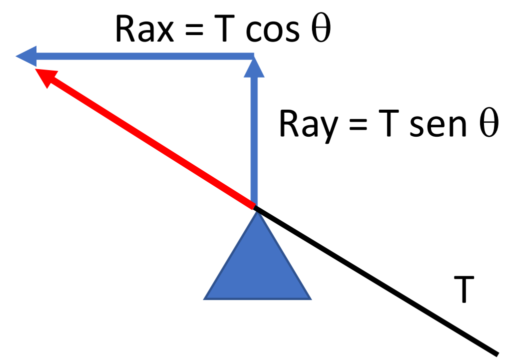
$$T_1 = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} \qquad \boxed{\theta_1 = arc\ tg\,\frac{R_{Ay}}{R_{Ax}}} \qquad T_n = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} \qquad \theta_n = arc\ tg\,\frac{R_{By}}{R_{Bx}}$$



1. Si elijo la pendiente:, veo cual es la mayor, por ejemplo la del tramo 1, se conoce entonces R_{ax} dado que conozco RAY.

2. Si elijo la maxima fuerza T, busco la mayor pendiente, en este caso el primer tramo y Siendo que conozco Ray, caculo Θ

Tramo extremo



Calculo de las fuerzas en cada cable

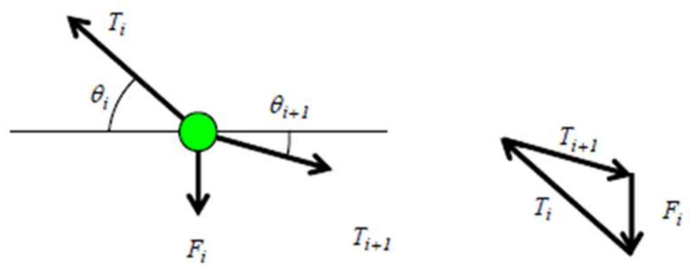


Fig. 3.2 – Equilibrio de ramales consecutivos.

$$T_i sen\theta_i - T_{i+1} sen\theta_{i+1} - F_i = 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} T_{i+1y} = T_{i+1} sen\theta_{i+1} = T_i sen\theta_i - F_i \\ T_{i+1x} = T_i \cos\theta_i \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} T_{i+1} = \sqrt{T_{i+1x}^2 + T_{i+1y}^2} \\ \theta_{i+1} = arc\ tg \dfrac{T_{i+1y}}{T_{i+1x}} \end{cases}$$

Las proyecciones horizontales son iguales

Conocidos los angulos, determinar la ubicacion final del cable

Conocidos los ángulos de cada ramal (θ_i), se puede determinar la componente vertical de cada punto de actuación de las cargas verticales

$$tg\theta_i = \frac{y_i}{x_i} \quad \Rightarrow \quad y_i = x_i \; tg\theta_i$$

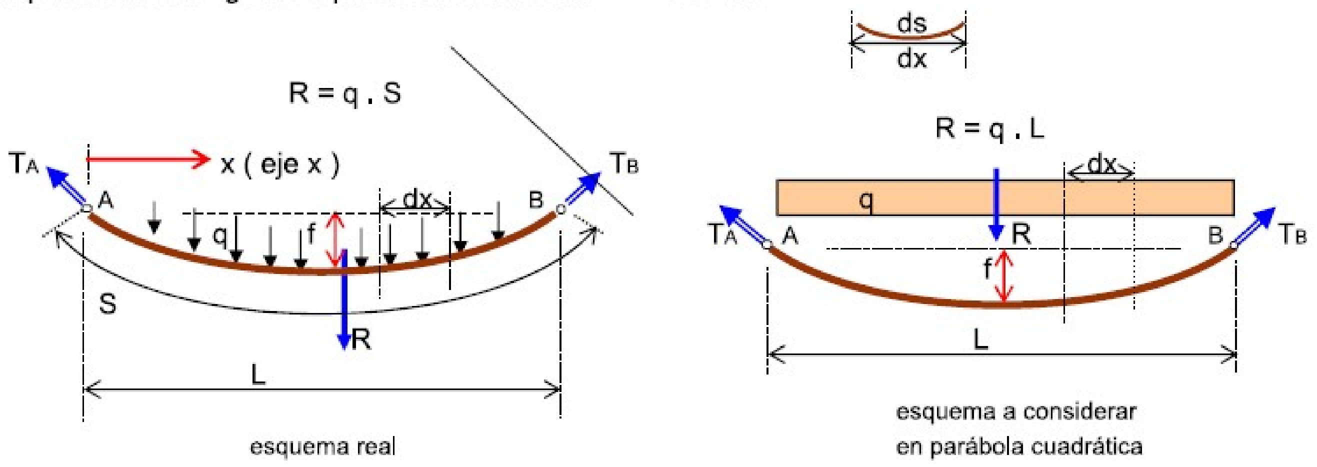
y la correspondiente configuración de equilibrio del cable.

La longitud total del cable ($\square L$) será igual a la suma de las longitudes de cada uno de los ramales

$$\square L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

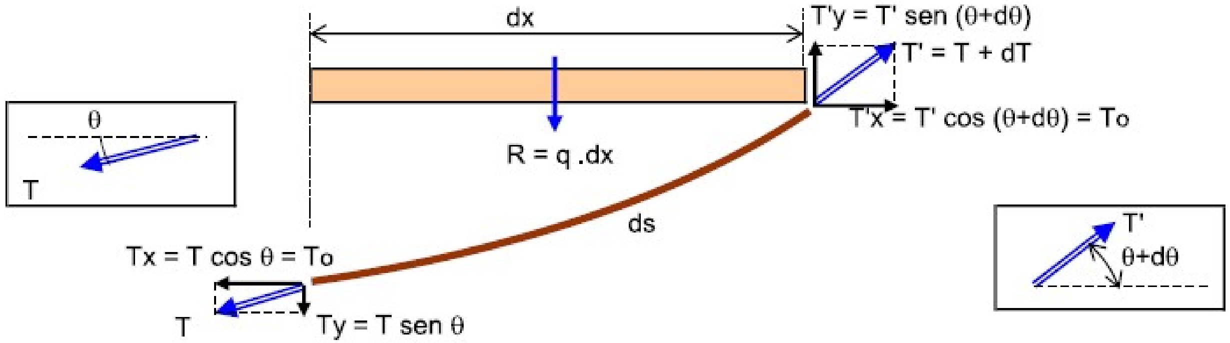
Ecuacion general para cables Tensos – Parabola de 2 do grado Dada la Flecha Calcular la Fuerza T

En parábola de 2° grado equivale a considerar: $dx = ds$



Cable tenso

Por lo tanto, nuestro esquema a considerar será un cable tenso con apoyos a igual nivel, y tomando todas la distancias horizontales.
Consideramos un elemento diferencial de cable tenso, en un dibujo muy ampliado, y lo analizaremos aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estática:



1) haremos sumatoria de todas las fuerzas según el eje x:

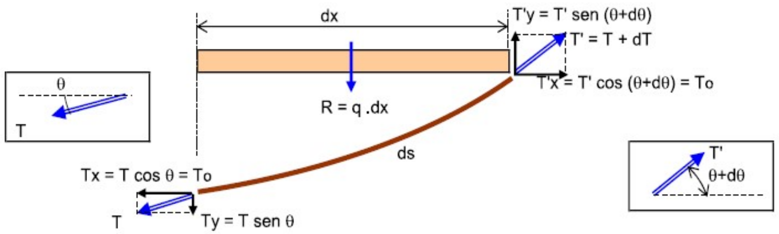
$$\Sigma Fx = 0$$

$$(-T \cos \theta) + (T + dT) \cos (\theta + d\theta) = 0$$

recordemos que $\cos(\alpha + \beta) =$
$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$

$$T \cos \theta = (T + dT) [\cos \theta \cdot \cos d\theta - \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} d\theta]$$

Componente horizontal de T es siempre constane



Σ Fx = 0

$(-T\cos\theta) + (T + dT)\cos(\theta + d\theta) = 0$

recordemos que $\cos(\alpha + \beta) =$
$= \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta$

$T\cos\theta = (T + dT)\,[\,\cos\theta \,.\, \cos d\theta - \operatorname{sen}\theta \,.\, \operatorname{sen} d\theta\,]$

y como $d\theta$ tiende a cero, resulta que: $\cos d\theta = \cos 0 = 1$ $\operatorname{sen} d\theta = 0$

$T\cos\theta = (T + dT)\,[\,\cos\theta \,.\, 1 - \operatorname{sen}\theta \,.\, 0\,]$

$T\cos\theta = (T + dT) \,.\, \cos\theta$

$T\cancel{\cos\theta} = T\cancel{\cos\theta} + dT\cos\theta$ simplificando ($T\cos\alpha$) resulta

$\boxed{dT\cos\theta = 0}$ que es igual a:

$dT\cos\theta = d\,(T\cos\theta) = 0$ y ahora integrando determinamos que

$T\cos\theta = \text{constante} = T_o$

$\boxed{T_o = T\cos\theta}$

$T\cos\theta = \text{constante} = T_o$

$\boxed{T_o = T\cos\theta}$

y aquí se deduce que en cualquier sección del cable, la componente horizontal del esfuerzo es un valor constante e igual a T_o.

Ecuación Diferencial del cable Tenso

2) haremos sumatoria de todas las fuerzas según el eje y:

$$\Sigma\, Fy = 0$$

recordemos que sen (α + β) =
= sen α . cos β – cos α . sen β

$$(- T \text{ sen } \theta) - q \,.\, dx + (T + dT) \text{ sen } (\theta + d\theta) = 0$$

$$T \text{ sen } \theta + q \,.\, dx = (T + dT) \,[\text{sen } \theta \cos d\theta - \cos \theta \text{ sen} d\theta\,]$$

$$T \text{ sen } \theta + q \,.\, dx = (T + dT) \,[\text{sen } \theta \,.\, 1 - \cos \theta \,.\, d\theta\,]$$

$$\cancel{T \text{ sen } \theta} + q \,.\, dx = \cancel{T \text{ sen } \theta} - \cancel{T \cos \theta \,.\, d\theta} + dT \text{ sen } \theta - \cancel{dT \,.\, \cos \theta \,.\, d\theta}$$

como [T cos θ . dθ] es muy pequeño tiende a cero, y como [dT . cos θ . dθ] es producto de dos diferenciales también tiende a cero, y simplificando resulta :

$$\boxed{q \,.\, dx = dT \text{ sen } \theta}$$

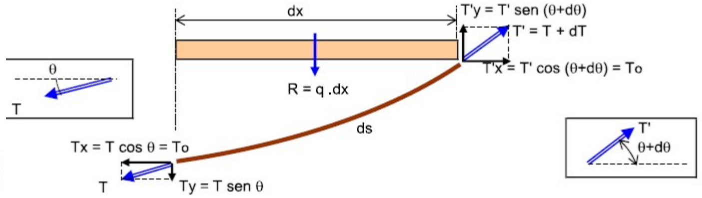
desarrollando y reemplazando T por T_o /cos θ

$$q \,.\, dx = dT \,.\, \text{sen } \theta = d\,(\,T \text{ sen } \theta\,) = d\,(\,T_o \text{ sen } \theta \,/\, \cos \theta\,)$$

$$q = \frac{d\,(\,T_o \text{ tg } \theta\,)}{dx}$$

y como tg θ = dy / dx = y'

$$q = T_o \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$



$$\boxed{q = T_o \frac{d^2y}{dx^2}}$$

o lo que es lo mismo:

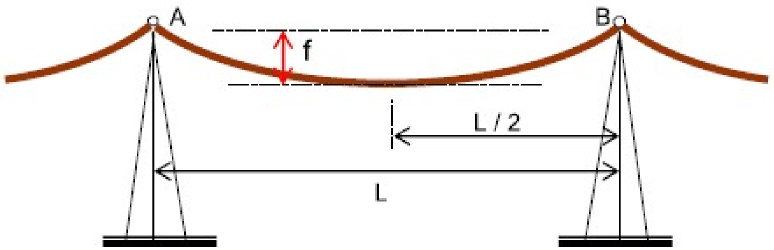
$$\boxed{q = T_o \,.\, y''}$$

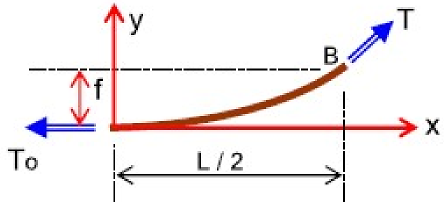
<u>ecuación diferencial de cable tenso</u>

Seguidamente calcularemos esfuerzos en el cable tenso y la longitud del mismo, para distintas condiciones de apoyo.

Ecuación Diferencial de la pendiente del cable tenso

7.8 CABLE TENSO CON APOYOS A IGUAL NIVEL





mitad derecha del cable
entre los apoyos A y B

Partimos de la ecuación diferencial y la vamos integrando:

$$T_o \cdot y'' = q$$

$$T_o \cdot y' = q \cdot x + C_1 \qquad [1]$$

$$T_o \cdot y = q \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \qquad [2]$$

Consideramos a la mitad el cable, y las constantes las determinamos con las condiciones de borde:

a) veamos a la ecuación [1] para $x = 0$ $\quad \theta = \text{tg}\,\theta = dy / dx = y' = 0$

$$T_o \cdot 0 = q \cdot 0 + C_1 \qquad \underline{C_1 = 0} \qquad \text{reemplazando en [1]}$$

$$T_o \cdot y' = q \cdot x$$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{q}{T_o} \cdot x}$$

<u>ecuación de la pendiente del cable tenso a distancia x</u>

Componente horizontal del cable tenso dando como dato la flecha

$$T_o \cdot y'' = q$$

$$T_o \cdot y' = q \cdot x + C_1 \qquad [1]$$

$$T_o \cdot y = q \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \qquad [2]$$

b) ahora en la ecuación [2] para x = 0 es y = 0

$$T_o \cdot 0 = q \cdot \frac{0^2}{2} + 0 \cdot 0 + C_2 \qquad \underline{C_2 = 0} \qquad \text{reemplazando en [2]}$$

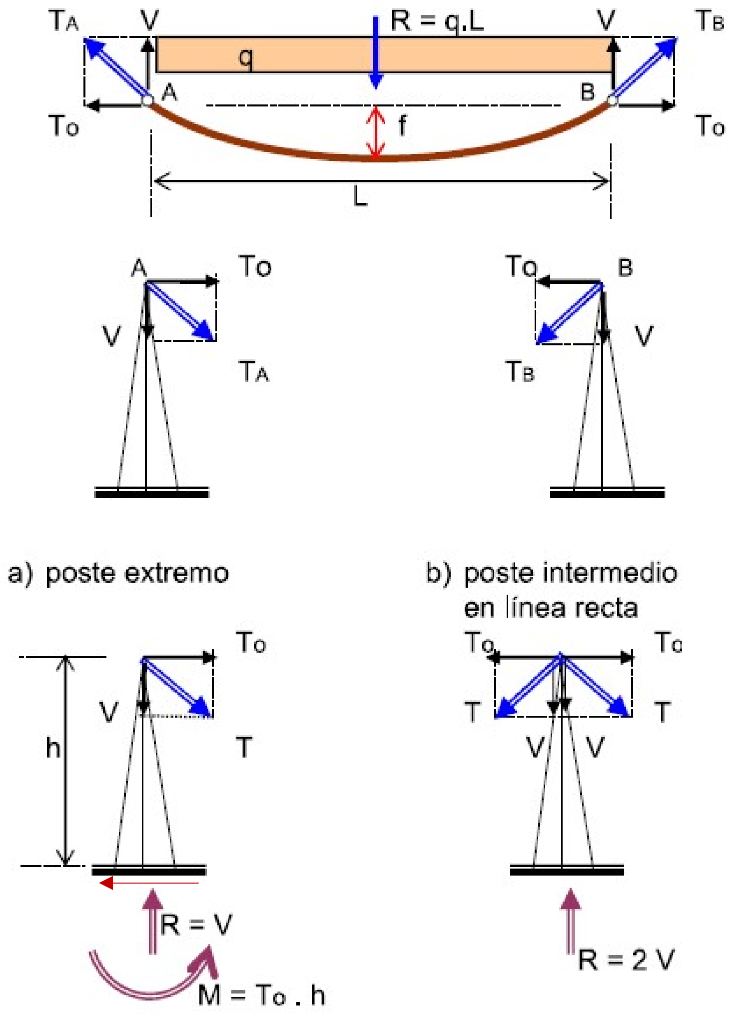
$$T_o \cdot y = q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{q}{2\,T_o} \cdot x^2} \qquad \text{ecuación de una parábola de 2° grado}$$

Para $x = L / 2$ es $y = f$ reemplazando en la última ecuación determinamos T_o:

$$f = \frac{q \cdot (L/2)^2}{2\,T_o}$$

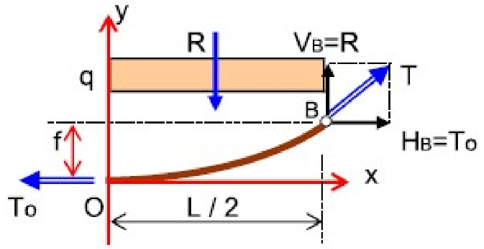
$$\boxed{T_o = \frac{q \cdot L^2}{8\,f}} \qquad \underline{\text{componente horizontal del cable tenso}}$$


TA
V
R = q.L
V
TB
q
A
B
To
f
To
L
A
To
V
TA
To
B
V
TB
a) poste extremo
b) poste intermedio
en línea recta
To
V
h
T
To
To
T
T
V
V
R = V
M = To . h
R = 2 V

Esfuerzo máximo T en el cable tenso

7.10 CABLE TENSO : CALCULO DE REACCIONES EN APOYOS A IGUAL NIVEL

Consideremos la mitad derecha del cable, y ubiquemos a los ejes coordenados de manera que su centro pase por el punto O mas bajo del cable.



La resultante de la carga uniforme q para una ditancia x es:

$0 < x < L/2 \qquad R = q \, . \, x$

$x = L/2 \qquad R = q \, . \, L/2$

La reacción en el cable en el apoyo B es T, con componentes $H_B = T_o$ y $V_B = R$.
Vemos que las componentes horizontales estan en equilibrio, y las componentes verticales también.
Generalizando para una sección entre $0 < x < L/2$, tendremos una reacción $T = T_x$:

$$T_x = \sqrt{T_o^2 + (q \, . \, x)^2}$$ sacando a T_o fuera de la raíz

$$T_x = T_o \sqrt{1 + (q . \, x / T_o)^2}$$ reacción a distancia x (tangente al cable)

Si reemplazamos dentro de la raíz a $T_o = [\, q \, . \, L^2 / 8 f \,]$, valor hallado anteriormente obtenemos:

$$T_x = T_o \sqrt{1 + q^2 \, . \, x^2 / [q \, . \, L^2 / 8 f\,]^2}$$

$$T_x = T_o \sqrt{1 + [64 f^2 . \, x^2 / (L^2)^2\,]}$$ variante de reacción a distacia x

para $x = 0$ $\boxed{T_x = T_o = T_{minimo}}$ esfuerzo mínimo en el cable

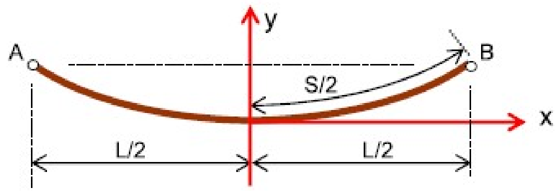
para $x_{max} = L/2$ es $T_x = T = T_{max} = T_o \sqrt{1 + [16 \, (f/L)^2 \,)]}$ y con: $n = f / L$

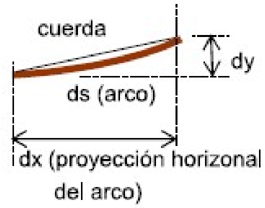
$$\boxed{T = T_{max} = T_o \sqrt{1 + 16 \; n^2}}$$ esfuerzo máximo en el cable (en el poyo)

Longitud del cable en el cable tenso

7.10 CABLE TENSO : CALCULAR LA LONGITUD DEL CABLE - APOYOS A IGUAL NIVEL

Consideremos un cable apoyado en A y B, tomemos un elemento diferencial ds, que en este caso por ser tenso, el arco ds se confunde con la cuerda (recta entre los puntos extremos), entonces podemos escribir con suficiente aproximación:





$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = dx\ \sqrt{1 + (dy/dx)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\ dx$$

Si ahora tomamos la mitad del cable e integramos entre los límites de 0 hasta L / 2 tendremos:

$$S/2 = \int ds$$

y la longitud total del cable es:

$$S = 2\int ds = 2\int \sqrt{1 + y'^2}\ dx = 2\int [1 + y'^2]\,\hat{}\,½\ dx$$

a esta integral la podemos aproximar mediante una serie de la que solo tomamos los dos primeros términos $(1 + x)\,\hat{}\,n = 1 + n\,.x + n\,.(n\text{–}1)^2\ \ x^2\ /2\,! + \ldots\ldots\ldots$ entonces para nuestro caso resulta

$$S = 2\int [1 + (y'^2/2)]\ dx = 2\int dx + \int y'^2\ dx$$

$$S = L + \int (q\,.x / T_o)^2\ dx \qquad \text{y con}\quad T_o = q\,.\,L^2/8f$$

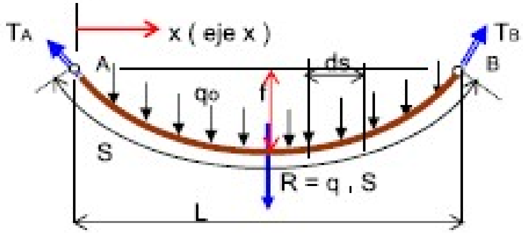
$$\boxed{S = L + \frac{8\ f^2}{3\ L}}$$ longitud total del cable tenso para apoyos a igual nivel

$$\boxed{S = L\left(1 + \frac{8\ n^2}{3}\right)}$$ en donde hemos reemplazado a f/L por n

Ecuación General del Cable poco Tenso

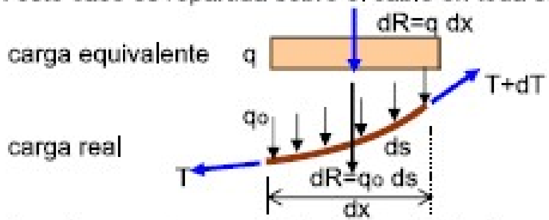
7.13 CABLES POCO TENSOS O CATENARIA : ECUACION GENERAL

Ahora, al estar el cable poco tenso describe una curva más pronunciada que puede representarse mediante la fórmula de la catenaria, que vamos a desarrollar.



esquema real

La carga en este caso es repartida sobre el cable en toda su longitud:



<u>carga en cable poco tenso ds ≠ dx</u>

q_o = peso propio + sobrecarga

q = carga equivalente en horizontal

En el caso de cables muy tensos, habíamos aplicado las ecuaciones de la estática:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

y resolviendo habíamos llegado a obtener la ecuación diferencial de <u>cable muy tenso</u>:

$$q = T_o \frac{d^2y}{dx^2}$$

d^2y = derivada segunda de y

dx^2 = cuadrado del diferencial dx

en este caso de <u>cable poco tenso</u>, suponemos que "q ds" se concentra en la longitud "dx", entonces:

$$q\,dx = q_o\,ds \qquad q = q_o \frac{ds}{dx}$$

ahora reemplazamos este valor de "q" en la ecuación anterior:

$$\boxed{q_o \frac{ds}{dx} = T_o \frac{d^2y}{dx^2}}$$

Ecuación diferencial de la Catenaria del Cable poco Tenso

$$\boxed{q_o \frac{ds}{dx} = T_o \frac{d^2y}{dx^2}}$$

pero recordemos lo visto anteriormente que: $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

que lo reemplazamos en la última ecuación y obtenemos:

$$T_o \frac{d^2y}{dx^2} = q_o \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q_o}{T_o} \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q_o}{T_o} \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2}}$$

ecuación diferencial de la catenaria (cable poco tenso)

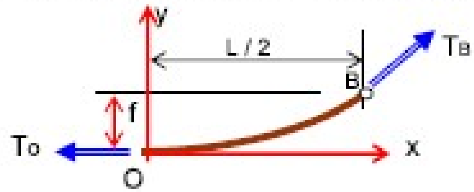
La solución matemática para esta ecuación es función del coseno hiperbólico:

$$\boxed{y = \frac{T_o}{q_o} \cdot \cosh(x \cdot q_o / T_o) + C}$$

coseno hiperbólico

$$\cosh n = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$$

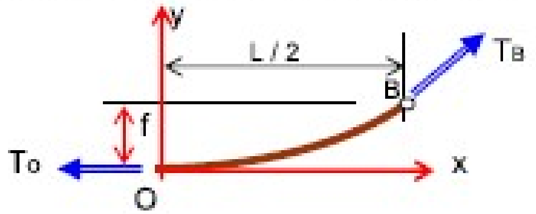
Ahora determinaremos el valor de la constante C, aplicaremos la siguiente condición de borde en O:



mitad derecha del cable entre los apoyos A y B

Cálculo de To para el Cable poco Tenso, dada la flecha y la carga

Ahora determinaremos el valor de la constante C, aplicaremos la siguiente condición de borde en O:



mitad derecha del cable entre los apoyos A y B

$$y = \frac{T_o}{q_o} \cdot \cosh\left(x \cdot q_o / T_o \right) + C$$

$x = 0$ $\quad$ $0 = \frac{T_o}{q_o} \cdot 1 + C$ $\quad$ $C = -\frac{T_o}{q_o}$ $\quad$ $\cosh 0 = 1$

$y = 0$

llevamos este valor a la ecuación y agrupando:

$$y = \frac{T_o}{q_o} \cdot \left[\cosh\left(x \cdot q_o / T_o \right) - 1\right] \qquad [1]$$

$$\frac{q_o}{T_o} \cdot y = \cosh\left(x \cdot q_o / T_o \right) - 1 \qquad [2]$$

y ahora aplicamos la otra condición de borde para:

$x = L / 2$

$y = f$

$$\boxed{\frac{q_o}{T_o} \cdot f = \cosh\left(L \cdot q_o / 2\, T_o \right) - 1} \longrightarrow T_o$$

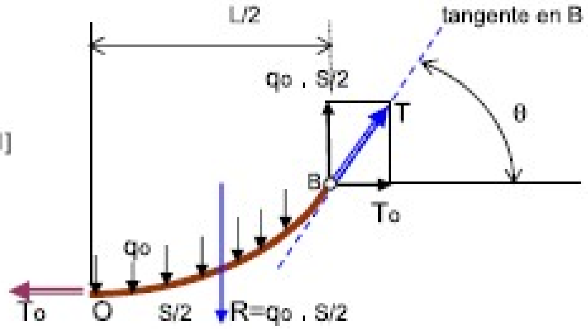
de esta ecuación se obtiene T_o, pero es imposible despejarla, pués aparece en el primer término y en el segundo término está como argumento del coseno hiperbólico, entonces se procede por tanteo es decir, haremos una tabla y vamos dando valores a T_o hasta que los dos miembros sean iguales.

Cálculo de la longitud del calble para el Cable poco Tenso

7.14 CABLE POCO TENSO O CATENARIA
CALCULO DE LA LONGITUD DEL CABLE CON APOYOS A IGUAL NIVEL

Consideremos la mitad derecha del cable:

$$y = \frac{T_o}{q_o} \cdot [\cosh(x \cdot q_o / T_o) - 1] \qquad [1]$$



$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{q_o \cdot S/2}{T_o} \qquad \frac{S}{2} = \frac{T_o}{q_o} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad [3]$$

derivamos [1]: $\frac{dy}{dx} = \frac{T_o}{q_o} \cdot \frac{q_o}{T_o} \operatorname{senh}(x \cdot q_o / T_o) - 0 = \operatorname{senh}(x \cdot q_o / T_o)$ senh = seno hiperbólico

y reemplazamos en [3]:

$$\frac{S}{2} = \frac{T_o}{q_o} \cdot \operatorname{senh}(x \cdot q_o / T_o) \qquad [4]$$

este es análsis de la parte derecha de cable, teniendo en cuenta que x varía entre 0 y L / 2:

$$\frac{S}{2} = \frac{T_o}{q_o} \cdot \operatorname{senh}(L \cdot q_o / 2\, T_o)$$ longitud de medio cable

por lo tanto la longitud total de la catenaria es:

$$\boxed{S = 2\,\frac{T_o}{q_o} \cdot \operatorname{senh}(L \cdot q_o / 2\, T_o)}$$ <u>longitud total del cable poco tenso</u>

Cálculo de las reacciones para el Cable poco Tenso

$$\frac{S}{2} = \frac{T_0}{q_0} \cdot \text{senh}\,(x \cdot q_0 / T_0) \qquad [4]$$

7.14 CABLE POCO TENSO : CALCULO DE REACCIONES - APOYOS A IGUAL NIVEL

$$T = \sqrt{(q_0 \cdot S)^2 + T_0^2}$$

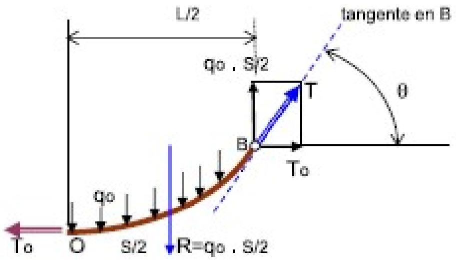
ahora reemplazamos a [4] en esta última y agrupando obtenemos:

$$T = T_0 \sqrt{1 + [\text{senh}\,(x \cdot q_0 / T_0)]^2} \qquad [5]$$

Haciendo el análisis en la mitad derecha del cable, para $x = L/2$ es $T = T_{máx}$ por lo tanto reemplazamos a [4] en esta última y agrupando obtenemos:

$$\boxed{T_{máx} = T_0 \cdot \cosh\,(L \cdot q_0 / 2\,T_0)}$$

esfuerzo o reacción máxima



Cálculo de la sobrecarga para el Cable poco Tenso dado el peso propio, la fuerza máxima posible, flecha, y L

7.18 CABLE POCO TENSO O CATENARIA
CALCULO DE SOBRECARGA A SOPORTAR TENIENDO APOYOS A IGUAL NIVEL

La sobrecarga "s" es la diferencia que existe entre la carga total repartida que está actuando sobre el cable que llamaremos q_o, menos el peso propio del cable que denominaremos g_o.
La unidad de medida de q_o y de g_o es unidad de peso por unidad de longitud, por ejemplo: kg / m.

<u>Datos:</u> la longitud horizontal del cable entre apoyos
la flecha
el esfuerzo máximo en los apoyos
el peso propio "g_o"

<u>incógnitas:</u> q_o = carga total repartida
s = sobrecarga

Primero hallaremos el valor de q_o para la tensión máxima ($T_{máx}$) que puede soportar el cable:

$$T_{máx} = T_o \cdot \cosh (L \cdot q_o / 2 T_o)$$

$$q_o = 2 \frac{T_o}{L} \cdot \text{arc cosh} (T_{máx} / T_o)$$

De la ecuación diferencial de la catenaria habíamos obtenido:

$$y = \frac{T_o}{q_o} \cdot [\cosh (x \cdot q_o / T_o) - 1]$$

para $x = L / 2$, $y = f$

$$\frac{q_o}{T_o} \cdot f = \cosh (L \cdot q_o / 2 T_o) - 1$$

ahora hacemos $T_o / q_o = c$, siendo "c" una constante:

$$\frac{f}{c} = \cosh (L / 2 c) - 1$$

aquí resolvemos por tanteos sucesivos para determinar el valor de la constante "c", es decir, vamos dando valores arbitrarios hasta que hasta que el cálculo de los dos miembros coincidan, así en este momento ese será el valor correcto de "c".
Con la constante "c" conocida, podemos calcular los siguientes valores:

$$T_{máx} = T_o \cdot \cosh (L \cdot q_o / 2 T_o) = T_o \cdot \cosh (L / 2 c)$$

$$T_o = \frac{T_{máx}}{\cosh (L / 2 c)}$$

$$\boxed{q_o = T_o / c}$$

$$\boxed{s = q_o - g_o}$$

q_o = carga total (peso propio + sobrecarga)
g_o = peso propio
s = sobrecarga

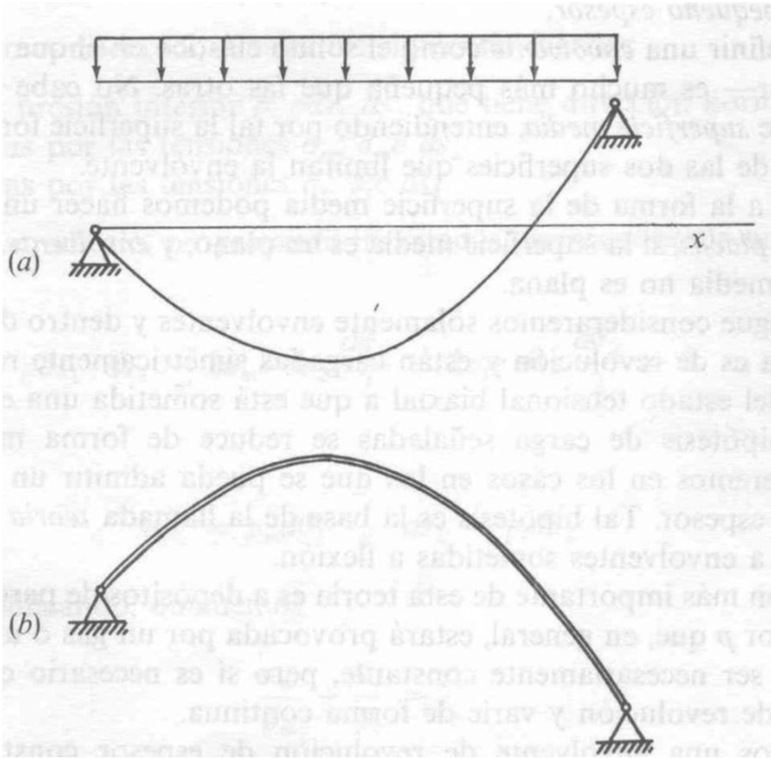
Arcos Funiculares

En un hilo sometido a una carga arbitraria $p = p(x)$, su línea media adopta una forma tal que los esfuerzos en cualquier sección transversal se reducen exclusivamente a los esfuerzos normales: el hilo está sometido a tracción pura en todas las secciones.

Si ahora consideramos un prisma mecánico cuya línea media coincida con la curva funicular de un hilo solicitado por el mismo sistema de cargas, este prisma mecánico estará también sometido a tracción pura. Sin embargo, existe una diferencia entre el hilo y el sólido elástico. Mientras que aquél es inextensible y, por lo tanto, indeformable, en éste sí que se producirá deformación. Esta circunstancia trae como consecuencia que en el sólido elástico aparezcan esfuerzos de cortadura y de flexión, que se denominan *esfuerzos secundarios* y que, generalmente, son despreciables.

Si el cable o hilo de la Figura 2.26-*a* lo giramos 180° alrededor del eje x y lo sometemos al mismo sistema de fuerzas exteriores $p = p(x)$, es evidente que sus secciones quedarán sometidas a compresión en vez de a tracción.

Arcos Funiculares



Si en vez de ser un hilo, que es perfectamente flexible y por tanto inestable, es un sólido elástico cuya línea media es coincidente con el hilo, tenemos un arco que recibe el nombre de *arco funicular* (Fig. 2.26-*b*).

Es evidente que en un arco funicular, respecto del hilo o cable que tuviera la misma línea media, hay que aumentar las dimensiones de la sección transversal para evitar que aparezcan fenómenos de inestabilidad. Pero este aumento de las dimensiones de la sección da lugar a la aparición de esfuerzos cortantes y momentos flectores, que serán tanto más despreciables cuanto menos sea la deformación que experimenta el arco.

Por otra parte, como el arco, considerado como una estructura, ha de soportar además de las cargas permanentes otras variables, ya sean fijas o móviles, sólo será posible que coincida el eje del arco con el funicular correspondiente a una determinada posición de la carga exterior y, por tanto, no es posible evitar la aparición de esfuerzos cortantes y momentos flectores, cuando de alguna manera se modifica dicha carga.

Para la determinación de la ley de esfuerzos normales en las diferentes secciones de un arco funicular, así como su proyección horizontal que será constante en todas las secciones del arco, o cualquier otro parámetro que nos pueda interesar, será de aplicación todo lo expuesto en el epígrafe anterior para el caso de cables.