Mecanica del Solido I-Estabilidad I
Clase 4

Agenda

1. Invariantes en los Sistemas de fuerzas.
2. Reducción de sistema de fuerzas: simplificación a una única fuerza resultante (caso particular)
3. Todo sistema puede ser reducido a una fuerza y un par coaxial.
4. Sistemas de fuerzas equivalentes
5. Equilibrio de un sistema de fuerzas
6. Descomposición de una fuerza en 6 componentes no concurrentes en el espacio.

1. Invariantes en los sistemas de fuerzas

1.a Invariante vectorial → $\bar{R}$

Si cambia el centro de reducción, la resultante de reducción no varía, pero sí el par de reducción.

1. *Invariantes en los Sistemas de fuerzas.*

1.b Invariante escalar

$$M_R^* = \frac{\overline{R}}{|\overline{R}|} \cdot \overline{M}_R$$

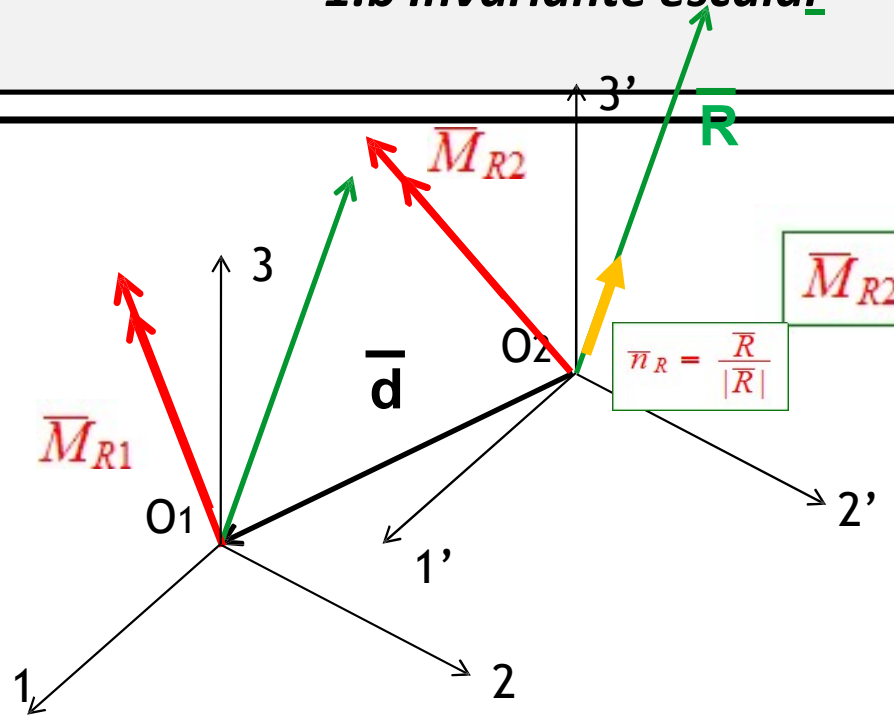
La proyección del momento de reducción sobre la resultante de reducción es un invariante escalar, es decir, no cambia aunque cambie el punto de reducción.

$$M_R^* = \frac{1}{|\overline{R}|}(R_x\ M_{R,x} + R_y\ M_{R,y} + R_z\ M_{R,z})$$

Versor (ó vector unitario) en la dirección de la resultante

$$\overline{n}_R = \frac{\overline{R}}{|\overline{R}|}$$

1.b Invariante escalar



$$\overline{M}_{R2} = \overline{M}_{R1} + \overline{d} \times \overline{R}$$

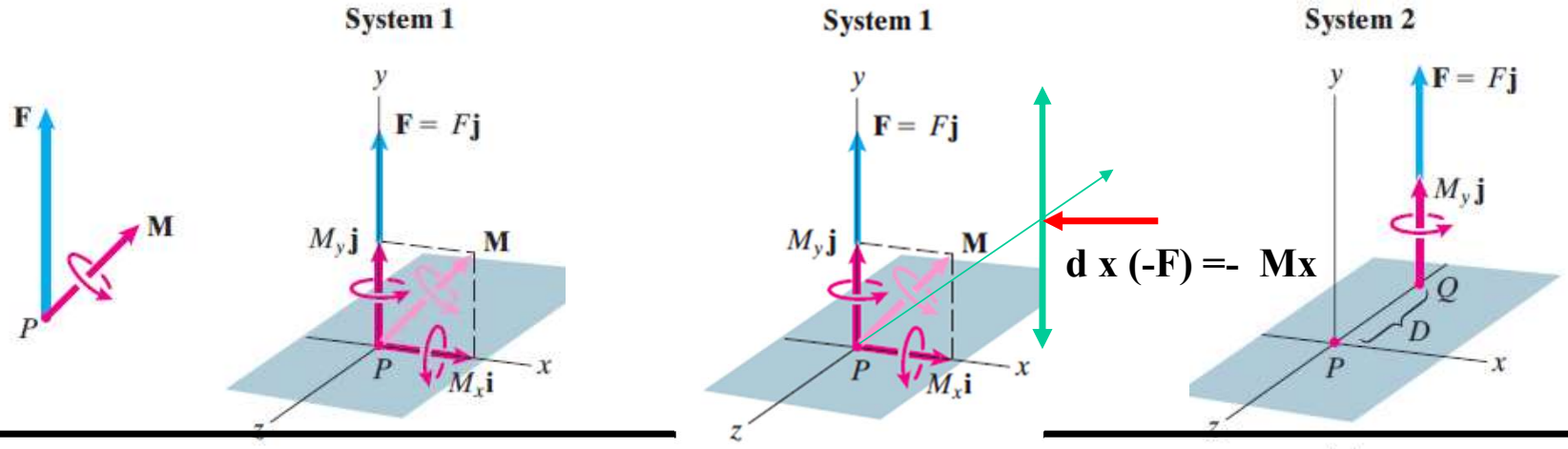
$$\overline{n}_R = \frac{\overline{R}}{|\overline{R}|}$$

$$M^*_{R2} = \overline{n}_R \cdot \overline{M}_{R2} = \overline{n}_R \cdot (\overline{M}_{R1} + \overline{d} \times \overline{R}) = \overline{n}_R \cdot \overline{M}_{R1} + \overline{n}_R \cdot (\overline{d} \times \overline{R})$$

$$\overline{n}_R \cdot \overline{d} \times \overline{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad M^*_{R2} = M^*_{R1}$$

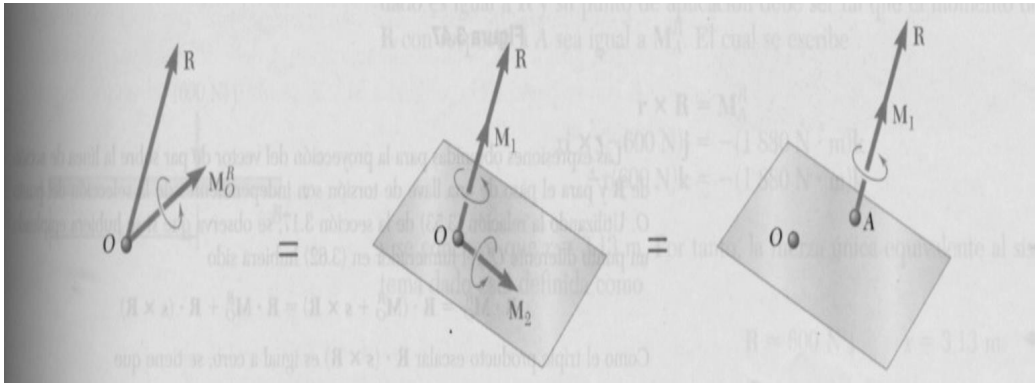
2. Todo sistema puede ser reducido a una fuerza y un par coaxial

Dado un sistema reducido a una fuerza y un par, Supongamos poner el eje y en coincidencia con F, y el eje x, perpendicular a y, y en el plano que forman F y M. Traslado la fuerza F en el eje de las z negativos a una distancia r, poniendo un sistema de fuerzas nulo. La proyección del M en y, no cambia, pero la proyección del M en x se reduce en d x F. Si la distancia d, provoca un momento Mx que anula a la proyección de M en x, entonces la fuerza F actuando en ese punto se llama Llave de Torsion.



2. Todo sistema puede ser reducido a una fuerza y un par coaxial

En el caso general, el sistema de fuerzas y momentos que actúa sobre un cuerpo se reducirá a una sola fuerza $\overline{R}$ y a un momento $\overline{M}_R$ que no serán perpendiculares entre sí. Pero el vector momento se puede descomponer en una componente perpendicular a la fuerza y en otra componente paralela. Por lo visto en 2) la componente perpendicular puede ser eliminada, trasladando la fuerza.



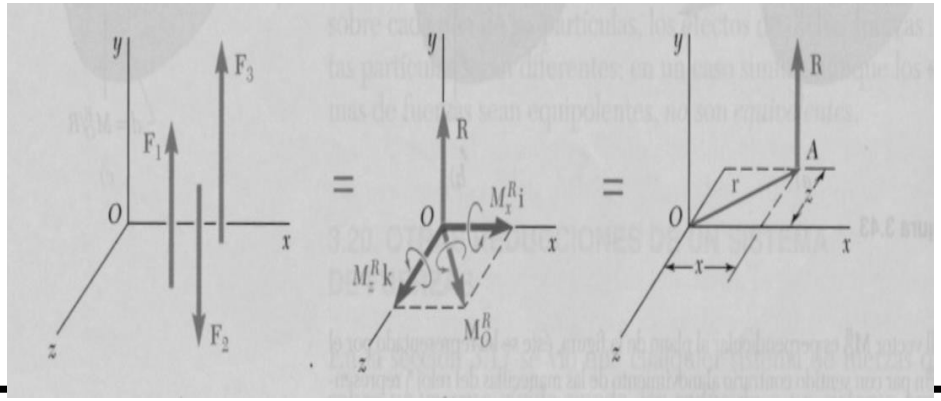
(ref: Beer, Johnston, Eisenbeg)

3. Reducción de sistema de fuerzas: simplificación a una única fuerza resultante (caso particular)

Si el sistema de de fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo rígido se reduce en el punto O a una fuerza resultante $\overline{R}$ y a un momento resultante $\overline{M}_R$ perpendiculares entre sí, siempre se puede trasladar la fuerza a otro punto P, localizado sobre ó fuera del cuerpo, de manera que el par resultante sea nulo.

Ejemplos:

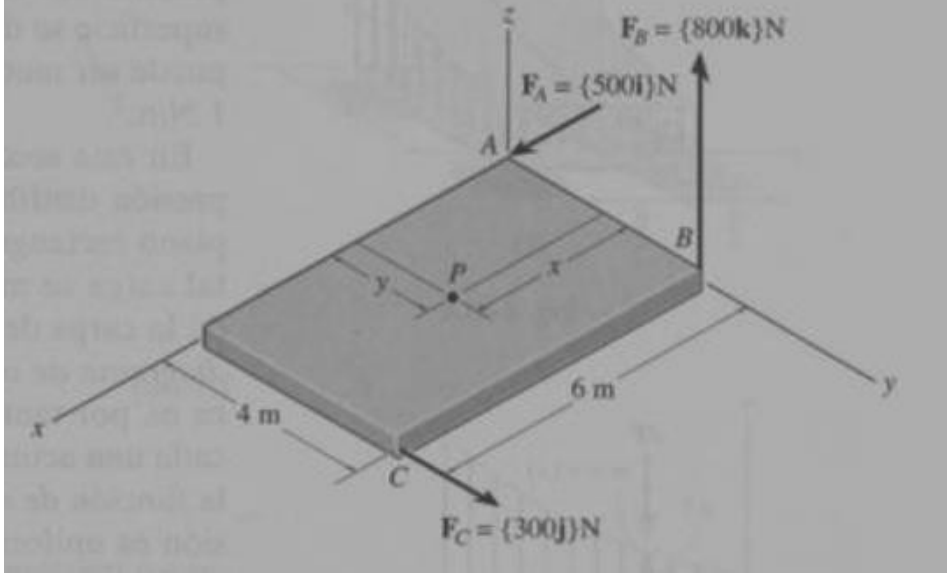
- sistema de fuerzas coplanares
- sistemas de fuerzas paralelas



(ref: Beer, Johnston, Eisenbeg)

Ejercicio

4-137. Reemplace las tres fuerzas que actúan sobre la placa por una llave. Especifique la magnitud de la fuerza y el momento del par para la llave así como el punto $P(x, y)$ donde su línea de acción interseca la placa.



Llave: fuerza resultante + componente colineal del par resultante

Resultados:

Fr= 990 N
Mr=3.07 kN-m
X= 1.16 mts
Y=2.06 mts

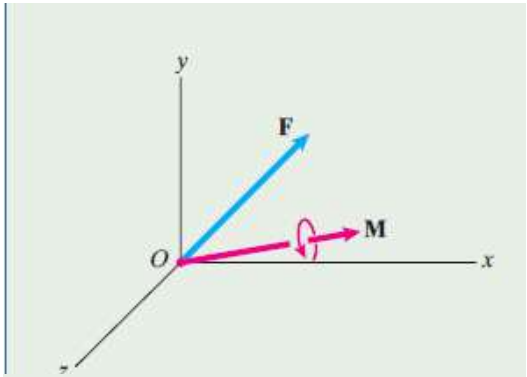
(ref: Russel C. Hibbeler)

Ejercicio

The system consists of the force and couple

$$\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\,(\text{N}),$$
$$\mathbf{M} = 12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\,(\text{N-m}).$$

Represent it by a wrench, and determine where the line of action of the wrench's force intersects the x–z plane.



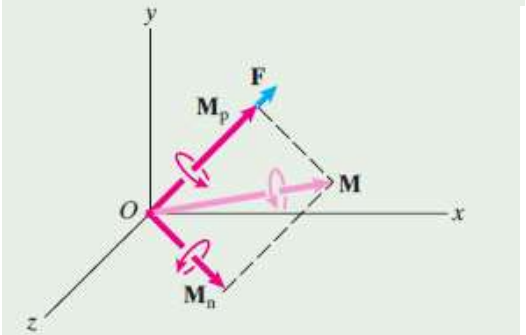
Solution

Dividing **F** by its magnitude, we obtain a unit vector **e** with the same direction as **F**:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|} = \frac{3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\,(\text{N})}{\sqrt{(3\text{ N})^2 + (6\text{ N})^2 + (2\text{ N})^2}} = 0.429\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.286\mathbf{k}.$$

We can use **e** to calculate the component of **M** parallel to **F**:

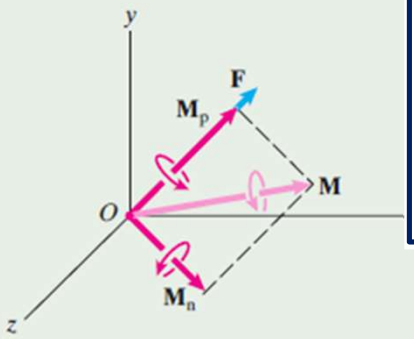
$$\mathbf{M}_p = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{M})\mathbf{e} = [(0.429)(12\text{ N-m}) + (0.857)(4\text{ N-m}) + (0.286)(6\text{ N-m})]\mathbf{e}$$
$$= 4.408\mathbf{i} + 8.816\mathbf{j} + 2.939\mathbf{k}\,(\text{N-m}).$$



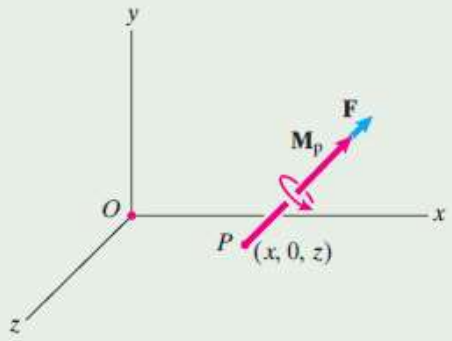
(a) Resolving **M** into components parallel and normal to **F**.

(ref: Bedford-Fowler)

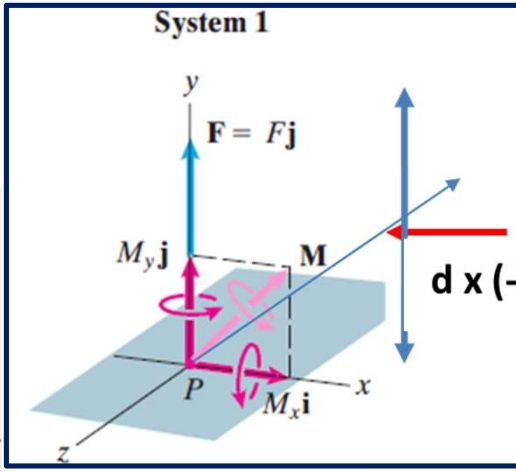
Ejercicio



(a) Resolving **M** into components parallel and normal to **F**.



(b) The wrench acting at a point in the x–z plane.



d x (-F) =- Mx

Hay que hacer desaparecer Mn, por lo que

rop x F = Mp

The component of **M** normal to **F** is

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{M} - \mathbf{M}_p = 7.592\mathbf{i} - 4.816\mathbf{j} + 3.061\mathbf{k}\,(\text{N-m}).$$

The wrench is shown in Fig. b. Let the coordinates of P be $(x, 0, z)$. The moment of **F** about O is

$$\mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & 0 & z \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -6z\mathbf{i} - (2x - 3z)\mathbf{j} + 6x\mathbf{k}\,(\text{N-m}).$$

By equating this moment to $\mathbf{M}_n$, or

$$-6z\mathbf{i} - (2x - 3z)\mathbf{j} + 6x\mathbf{k}\,(\text{N-m}) = 7.592\mathbf{i} - 4.816\mathbf{j} + 3.061\mathbf{k}\,(\text{N-m}),$$

we obtain the equations

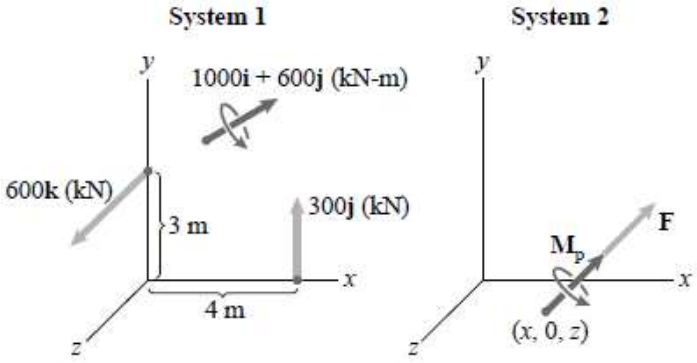
$$\begin{aligned} -6z &= 7.592, \\ -2x + 3z &= -4.816, \\ 6x &= 3.061. \end{aligned}$$

Solving these equations, we find the coordinates of point P are $x = 0.510$ m, $z = -1.265$ m.

(ref. Bedford Fowler)

Ejercicio

Problem 4.173 System 1 consists of two forces and a couple. Suppose that you want to represent it by a wrench (system 2). Determine the force **F**, the couple $\mathbf{M}_p$, and the coordinates x and z where the line of action of **F** intersects the x–z plane.



Solution: The sum of the forces in System 1 is $\mathbf{F} = 300\mathbf{j} + 600\mathbf{k}$ (N). The equivalent force in System 2 must have this value. The unit vector parallel to the force is $\mathbf{e}_F = 0.4472\mathbf{j} + 0.8944\mathbf{k}$. The sum of the moments in System 1 is

$$\mathbf{M} = 600(3)\mathbf{i} + 300(4)\mathbf{k} + 1000\mathbf{i} + 600\mathbf{j}$$

$$= 2800\mathbf{i} + 600\mathbf{j} + 1200\mathbf{k} \text{ (kN m)}.$$

The component parallel to the force is

$$\mathbf{M}_P = 599.963\mathbf{j} + 1199.93\mathbf{k} \text{ (kN-m)} = 600\mathbf{j} + 1200\mathbf{k} \text{ (kN-m)}.$$

The normal component is $\mathbf{M}_N = \mathbf{M} - \mathbf{M}_P = 2800\mathbf{i}$. The moment of the force

$$\mathbf{M}_N = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & 0 & z \\ 0 & 300 & 600 \end{vmatrix} = -300z\mathbf{i} - 600x\mathbf{j} + 300x\mathbf{k} = 2800\mathbf{i},$$

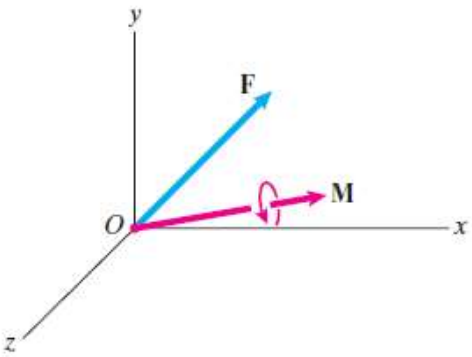
from which

$$x = 0, \quad z = \frac{2800}{-300} = -9.333 \text{ m}$$

(ref: Bedford-Fowler)

Ejercicio

Problem 4.170 Consider the force **F** acting at the origin O and the couple **M** given in Example 4.15. If you represent this system by a wrench, where does the line of action of the force intersect the $x-y$ plane?



Solution: From Example 4.15 the force and moment are $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (N), and $\mathbf{M} = 12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (N-m).

The normal component of the moment is

$$M_N = 7.592\mathbf{i} - 4.816\mathbf{j} + 3.061\mathbf{k} \text{ (N-m)}.$$

The moment produced by the force must equal the normal component:

$$\mathbf{M}_N = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2y)\mathbf{i} - (2x)\mathbf{j} + (6x - 3y)\mathbf{k} = 7.592\mathbf{i} - 4.816\mathbf{j} + 3.061\mathbf{k},$$

from which

$$x = \frac{4.816}{2} = 2.408 \text{ m and } y = \frac{7.592}{2} = 3.796 \text{ m}$$

4. Sistemas de fuerzas equivalentes

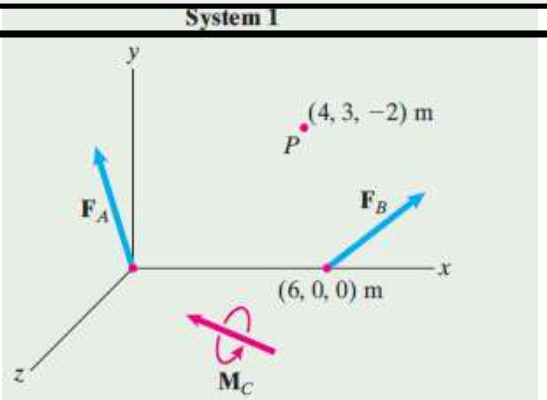
Dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo rígido, son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado O.

Ejercicio

System 1 consists of the following forces and couples:

$$\mathbf{F}_A = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 15\mathbf{k}\ (\text{kN}),$$
$$\mathbf{F}_B = 30\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\ (\text{kN}),$$
$$\mathbf{M}_C = -90\mathbf{i} + 150\mathbf{j} + 60\mathbf{k}\ (\text{kN-m}).$$

Suppose that you want to represent system 1 by an equivalent system consisting of a force **F** acting at the point P with coordinates (4, 3, −2) m and a couple **M** (system 2). Determine **F** and **M**.

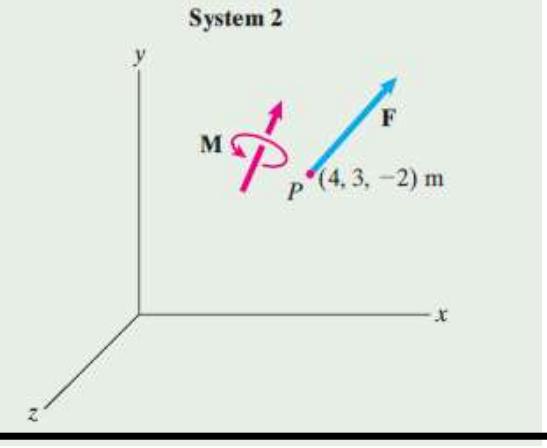


$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = 20\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\ (\text{kN}).$$

The force **F** must equal the sum of the forces in system 1.

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -3 & 2 \\ -10 & 10 & -15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 30 & 5 & 10 \end{vmatrix} + (-90\mathbf{i} + 150\mathbf{j} + 60\mathbf{k}) = -105\mathbf{i} + 110\mathbf{j} + 90\mathbf{k}\ (\text{kN-m}).$$

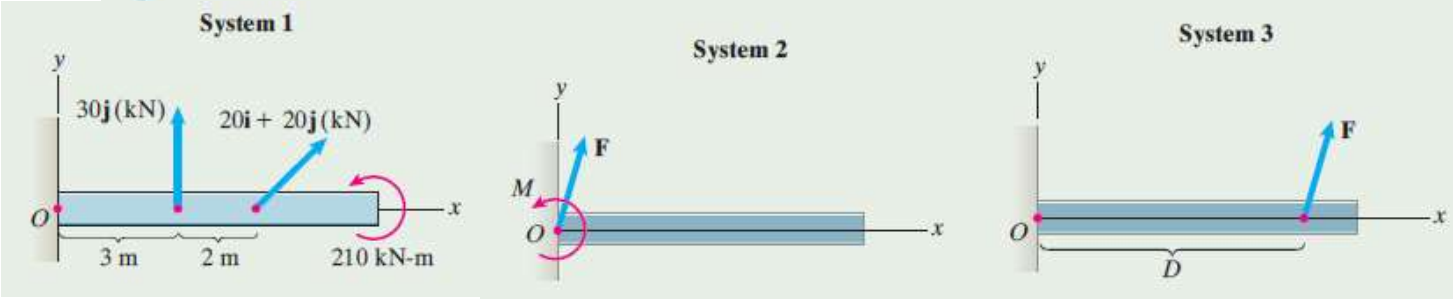
The couple **M** must equal the sum of the moments about point P due to the forces and moments in system 1.



(ref: Bedford Fowler)

Ejercicio

System 1 consists of two forces and a couple acting on a pipe. Represent system 1 by (a) a single force acting at the origin O of the coordinate system and a single couple and (b) a single force.



(a) A force **F** acting at O and a couple M. **(b)** A system consisting of the force **F** acting at a point on the x axis.

Solution

(a) The conditions for equivalence are

$$(\Sigma \mathbf{F})_2 = (\Sigma \mathbf{F})_1:$$

$$\mathbf{F} = 30\mathbf{j} + (20\mathbf{i} + 20\mathbf{j})\ (\text{kN}) = 20\mathbf{i} + 50\mathbf{j}\ (\text{kN}),$$

and

$$(\Sigma M_O)_2 = (\Sigma M_O)_1:$$

$$M = (30\ \text{kN})(3\ \text{m}) + (20\ \text{kN})(5\ \text{m}) + 210\ \text{kN-m}$$

$$= 400\ \text{kN-m}.$$

(b) The sums of the forces in systems 2 and 3 are equal. Equating the sums of the moments about O yields

$$(\Sigma M_O)_3 = (\Sigma M_O)_2:$$

$$(50\ \text{kN})D = 400\ \text{kN-m},$$

and we find that system 3 is equivalent to system 2 if $D = 8$ m.

(ref: Bedford Fowler)

Ejercicio

System 1 consists of parallel forces. Suppose you want to represent it by a force **F** (system 2). What is **F**, and where does its line of action intersect the x–z plane?

The sums of the forces must be equal.

$$(\Sigma \mathbf{F})_2 = (\Sigma \mathbf{F})_1:$$
$$\mathbf{F} = 30\mathbf{j} + 20\mathbf{j} - 10\mathbf{j}\,(\text{lb}) = 40\mathbf{j}\,(\text{lb}).$$

The sums of the moments about an arbitrary point must be equal: Let the coordinates of point P be (x, y, z). The sums of the moments about the origin O must be equal.

$$(\Sigma \mathbf{M}_O)_2 = (\Sigma \mathbf{M}_O)_1:$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 0 & 40 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 30 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 20 & 0 \end{vmatrix}$$

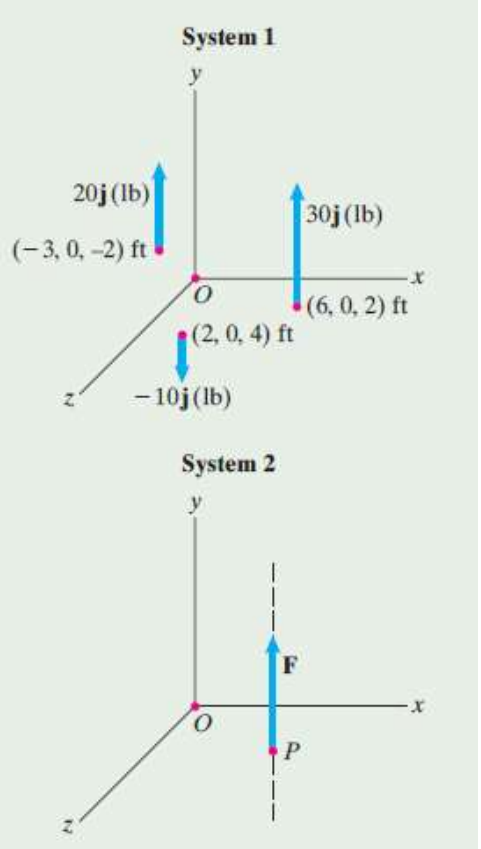
Expanding the determinants, we obtain

$$[20\ \text{ft-lb} + (40\ \text{lb})z]\mathbf{i} + [100\ \text{ft-lb} - (40\ \text{lb})x]\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

The sums of the moments about the origin are equal if

$$x = 2.5\ \text{ft},$$
$$z = -0.5\ \text{ft}.$$

The systems are equivalent if $\mathbf{F} = 40\mathbf{j}\,(\text{lb})$ and its line of action intersects the x–z plane at $x = 2.5$ ft and $z = -0.5$ ft. Notice that we did not obtain an equation for the y coordinate of P. The systems are equivalent if **F** is applied at any point along the line of action.



5. Equilibrio de un sistema de fuerzas

$$\overline{R} = \sum_i \overline{F}_i = \overline{0}$$

$$\overline{M}_R^O = \sum_i \overline{M}_{F_i}^O = \overline{0}$$

2 ecuaciones vectoriales de nulidad

6 ecuaciones algebraicas de nulidad

5.1 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano

3 ecuaciones algebraicas de nulidad

5.1 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano

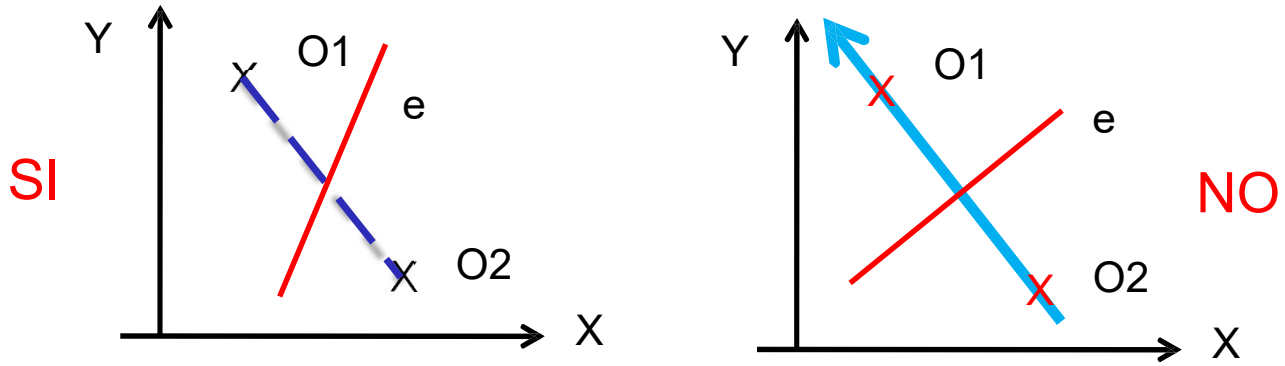
5.1.1) 2 ecuaciones de proyección sobre 2 ejes no coincidentes ni paralelos y una ecuación de momentos respecto a un punto cualquiera del plano, nulas

$$\overline{M}_R^O = \sum_i \overline{M}_{F_i}^O = \overline{0}$$

$$\overline{R} = \sum_i \overline{F}_i = \overline{0}$$

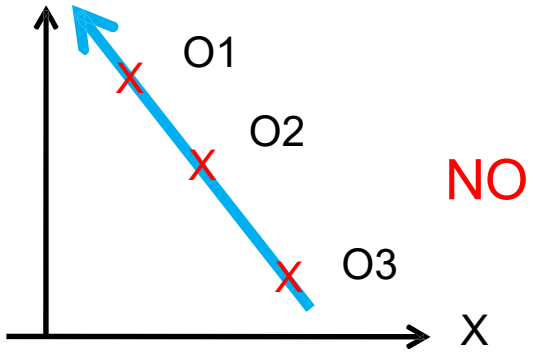
5.1 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano

5.1.2) 2 ecuaciones de momento respecto a 2 puntos cualesquiera del plano, O1 y O2, y 1 ecuación de proyección sobre un eje, nulas, siempre que este último no sea normal a la recta definida por los centros de momentos O1 - O2. Si el M respecto de O1 es cero, la resultante es cero o pasa por O1. Si el M02 es cero pasa por O2 o es cero. O sea que pasa por O1 y O2, por lo que la proyección no debe ser perpendicular a O1O2.



5.1 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano

5.1.3)3 ecuaciones de momentos, respecto de 3 puntos no alinrados 3 puntos



5.2 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio

6 ecuaciones algebraicas de nulidad

5.2 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio

5.2.1) 3 ecuaciones de proyección sobre 3 ejes, y los momentos del sistema respecto de los mismos ejes, nulos.

$$\overline{M}_R^O = \sum_i \overline{M}_{F_i}^O = \overline{0}$$

$$\overline{R} = \sum_i \overline{F}_i = \overline{0}$$

5.2 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio

5.2.2) 2 ecuaciones de proyección sobre 2 ejes y 4 de momentos sobre 4 ejes, nulas

3 de momentos = 0 => no hay Momento

2 de proyeccion = 0 proyecta sobre en eje perpendicular a los dos ejes, o intersecta ambos ejes

Elijo a un eje que no sea paralelo al perpendicular y que no pase por O.

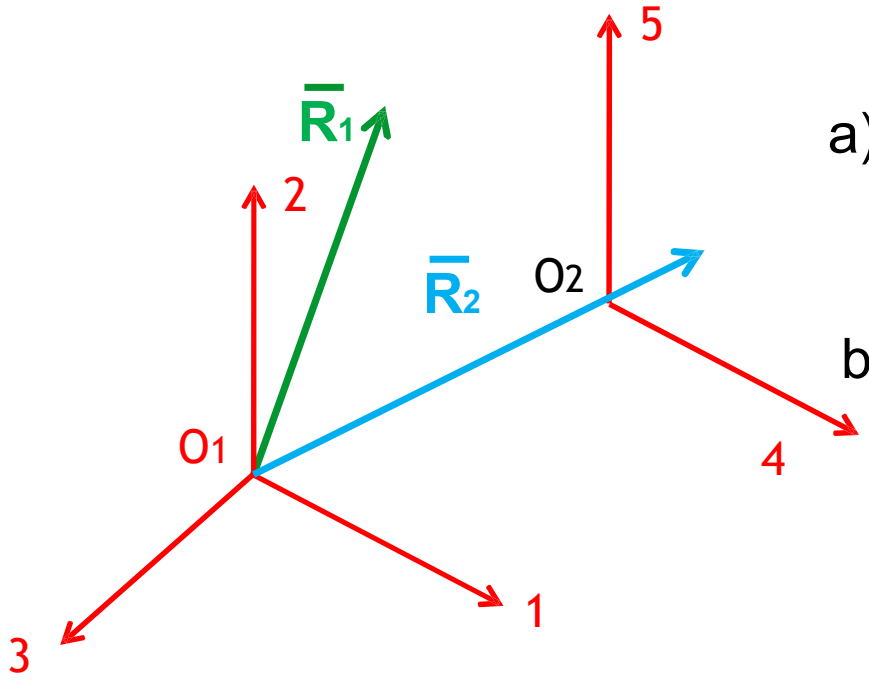
5.2 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio

5.2.3) 1 ecuaciónde proyección sobre un eje y 5 ecuaciones de momentos respecto de 5 ejes, nulas

**3 momentos =0 => no hay M*
**2 momentos de dos ejes = 0 la resultante corta a los dos ejes.*
**1 Proyeccion eje cualquiera que no sea normal a la resultante si la proyeccion es 0 estamos en equilibrio*

5.2 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio

5.2.4) 6 ecuaciones de momentos sobre 6 ejes, nulas.



a)

$$M_1 = 0$$
$$M_2 = 0$$
$$M_3 = 0$$

La resultante pasa por O1 ó sistema equilibrado

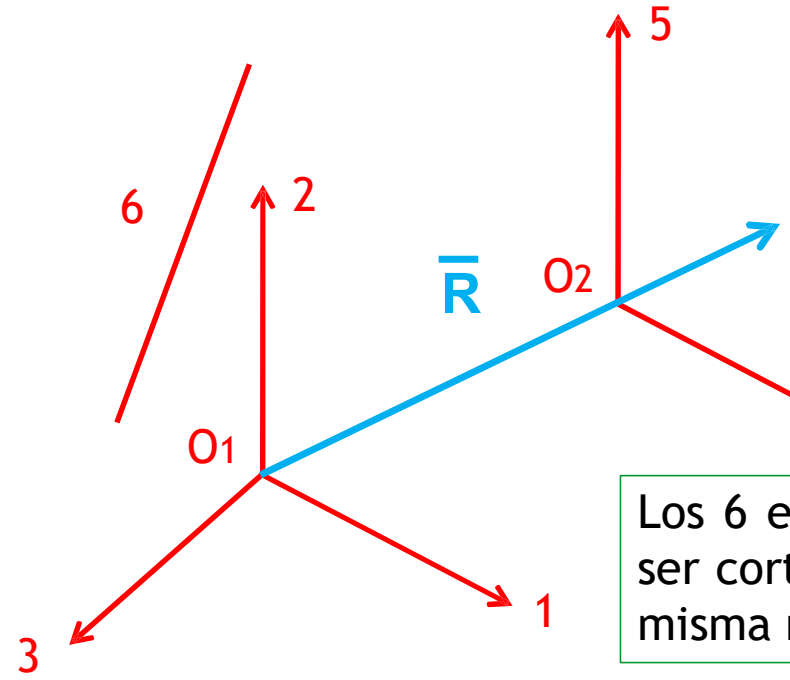
b)

$$M_1 = 0$$
$$M_2 = 0$$
$$M_3 = 0$$
$$M_4 = 0$$
$$M_5 = 0$$

La resultante pasa por O1 – O2 ó sistema equilibrado

5.2 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio

5.2.4) 6 ecuaciones de momentos sobre 6 ejes, nulas.



$$M_1 = 0$$
$$M_2 = 0$$
$$M_3 = 0$$
$$M_4 = 0$$
$$M_5 = 0$$
$$M_6 = 0$$

Condición necesaria de equilibrio

Los 6 ejes no deben ser cortados por una misma recta.

6. Descomposición de una fuerza en 6 componentes no concurrentes en el espacio.

6 ecuaciones con 6 incógnitas

$$\overline{R} = \sum_i \overline{F}_i$$

$$\overline{M}_O^R = \sum_i \overline{M}_{O,i} = \sum_i (\overline{r}_i \times \overline{F}_i)$$

Para que el sistema de ecuaciones sea matemáticamente determinado, las rectas de acción de las fuerzas incógnitas deben cumplir la condiciones vistas para equilibrio.

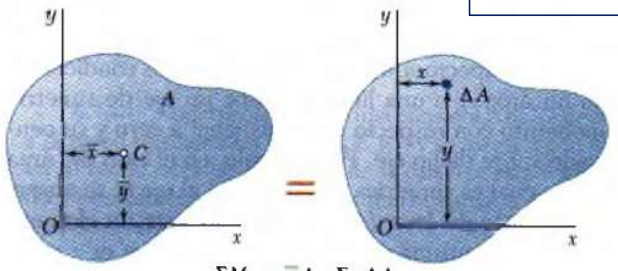
Sistemas de Fuerzas Distribuidas

Centroide de Areas

Centroide de Areas

*Momento de primer orden, o momento estático respecto de los ejes coordenados x e y:

$$Sx = \int y dA \qquad Sy = \int x dA$$



ΣM_y: $\bar{x} A = \Sigma x \, \Delta A$

ΣM_x: $\bar{y} A = \Sigma y \, \Delta A$

Figura 5.3 Centroide de un área.

*Coordenadas del centroide del Área:

$$Xg = \frac{Sx}{A} \qquad Yg = \frac{Sx}{A}$$

Si la placa no es homogénea, estas ecuaciones no se pueden utilizar para determinar el centro de gravedad de la placa; sin embargo, éstas aún definen al centroide del área.

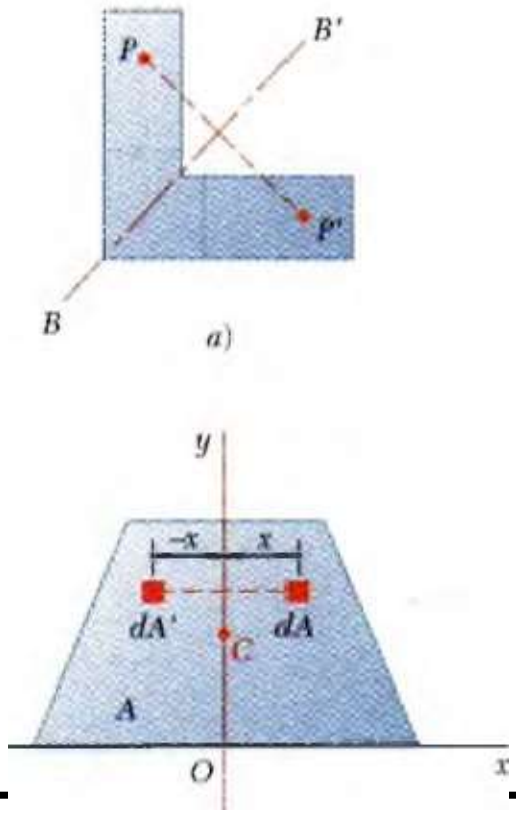
Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, el centroide coincide con el centro de gravedad.

Centro de Areas

A partir de las ecuaciones (5.6) se concluye que las coordenadas del centroide de un área pueden obtenerse al dividir los primeros momentos de dicha área entre el área misma.]

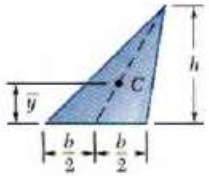
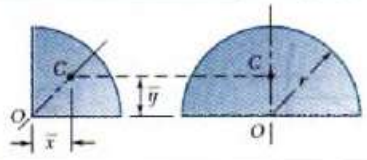
a partir de las ecuaciones (5.6) se observa que si el centroide de un área está localizado sobre un eje coordenado, entonces el primer momento del área con respecto a ese eje es igual a cero. De manera inversa, si el primer momento de un área con respecto a un eje coordenado es igual a cero, entonces el centroide del área está localizado sobre ese eje.

Centroide de Areas

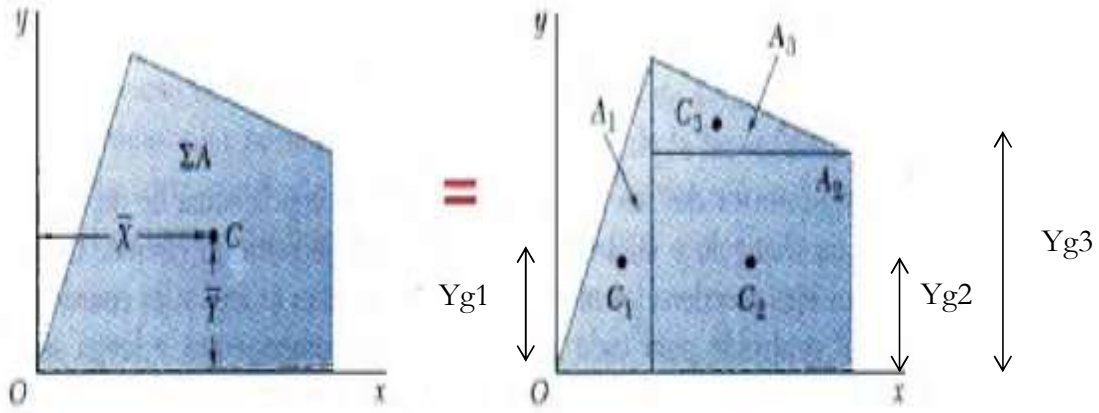


Si el área posee un eje de simetría, el momento estático (o primer momento) respecto de ese eje es nulo => el centroide estará ubicado sobre dicho eje.

Si el área tiene 2 ejes de simetría, el centroide estará ubicado en la intersección de los mismos.

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$

Centroide de Areas



$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$Y_G \cdot A = \text{Sx1} + \text{Sx2} + \text{Sx3}$$

Centroide de Areas Compuesta

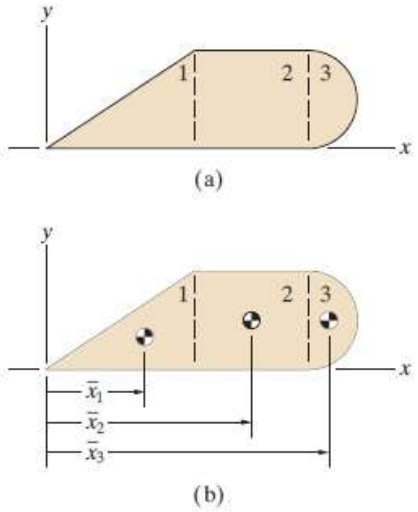


Figure 7.3
(a) A composite area composed of three simple areas.
(b) The centroids of the parts.

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{A_1} x\,dA + \int_{A_2} x\,dA + \int_{A_3} x\,dA}{\int_{A_1} dA + \int_{A_2} dA + \int_{A_3} dA}. \tag{7.8}$$

The x coordinates of the centroids of the parts are shown in Fig. 7.3b. From the equation for the x coordinate of the centroid of part 1,

$$\bar{x}_1 = \frac{\int_{A_1} x\,dA}{\int_{A_1} dA},$$

we obtain

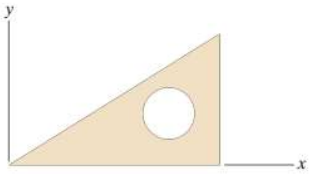
$$\int_{A_1} x\,dA = \bar{x}_1 A_1.$$

Using this equation and equivalent equations for parts 2 and 3, we can write Eq. (7.8) as

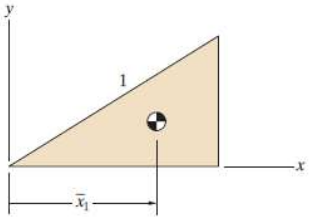
$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}.$$

Centroide de Areas Compuestsa

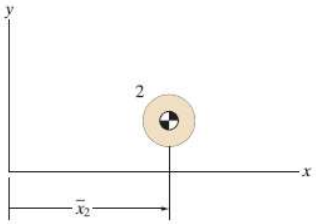
A triangular area with a circular cutout.



The triangular area without the cutout. Let its area be A_1 and let $\bar{x}_1$ be the x coordinate of its centroid.



The area of the circular cutout. Let its area be A_2 and let $\bar{x}_2$ be the x coordinate of its centroid.

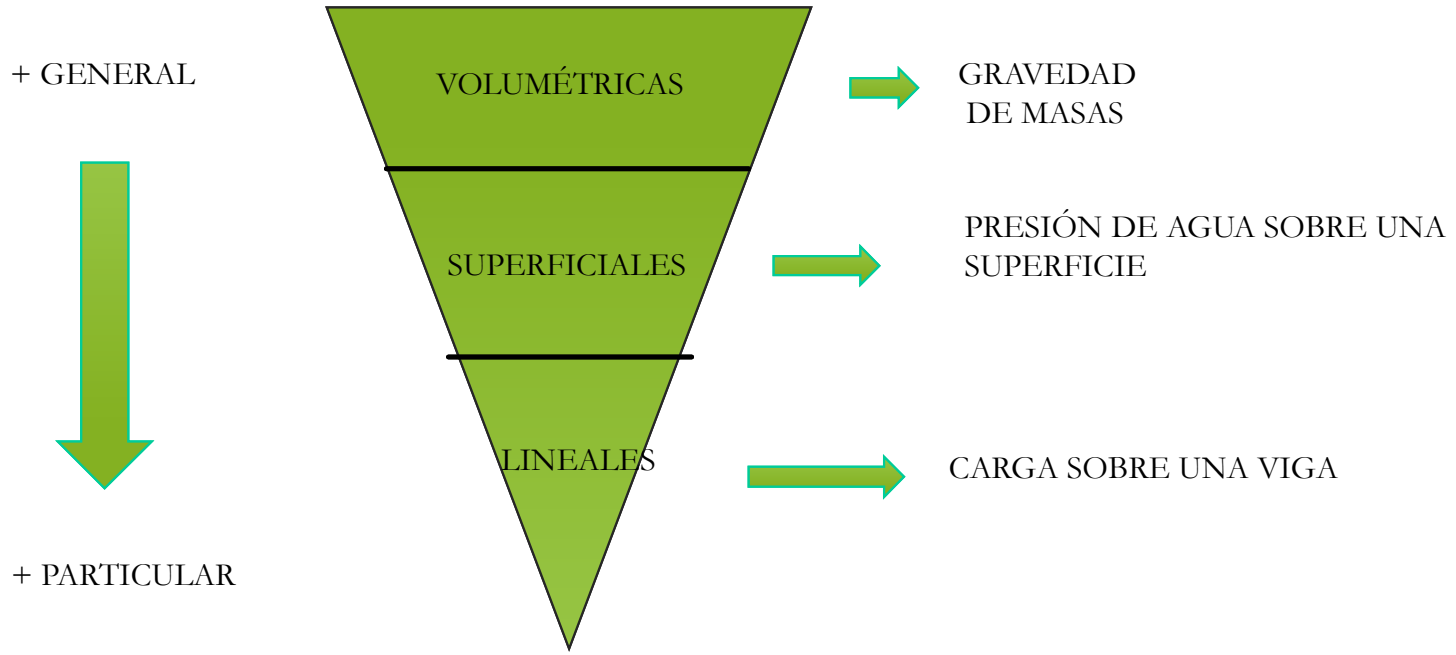


The x coordinate of the centroid of the triangular area with the cutout is

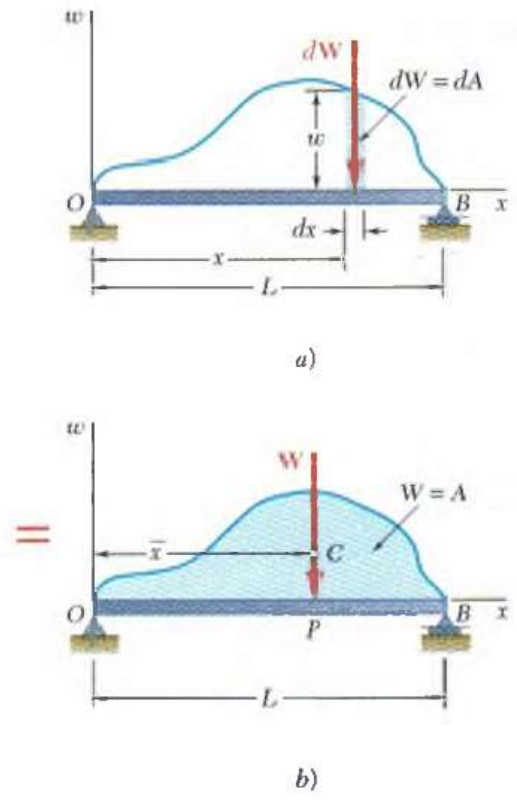
$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 - \bar{x}_2 A_2}{A_1 - A_2}.$$

Sistemas de Fuerzas Distribuidas

Sistemas de Fuerzas Distribuidas



Sistema de Fuerzas Distribuidas



1.Resultante W de la carga distribuida w

Carga distribuida w=w(x)

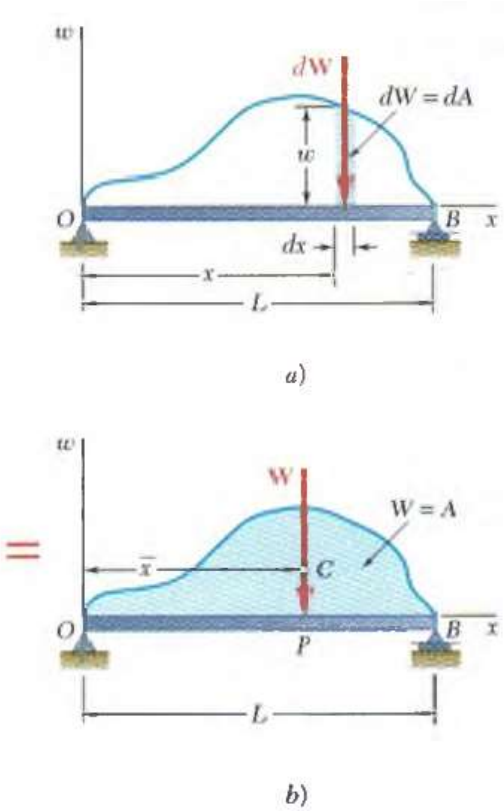
La carga distribuida puede representarse al graficar la carga w soportada por unidad de longitud (figura 5.17); esta carga está expresada en N/m o en lb/ft. La magnitud de la fuerza ejercida sobre un elemento de viga de longitud dx es $dW = w\,dx$, y la carga total soportada por la viga es

$$W = \int_0^L w\,dx$$

Se observa que el producto $w\,dx$ es igual en magnitud al elemento de área dA mostrado en la figura 5.17*a*. Por tanto, la carga W es igual en magnitud al área total A bajo la curva de carga:

$$W = \int dA = A$$

Sistema de Fuerzas Distribuidas



2.Ubicación de la resultante W

El punto de aplicación P de la carga concentrada equivalente **W** se obtiene expresando que el momento de **W** con respecto a un punto O es igual a la suma de los momentos de las cargas elementales $d\mathbf{W}$ con respecto a O:

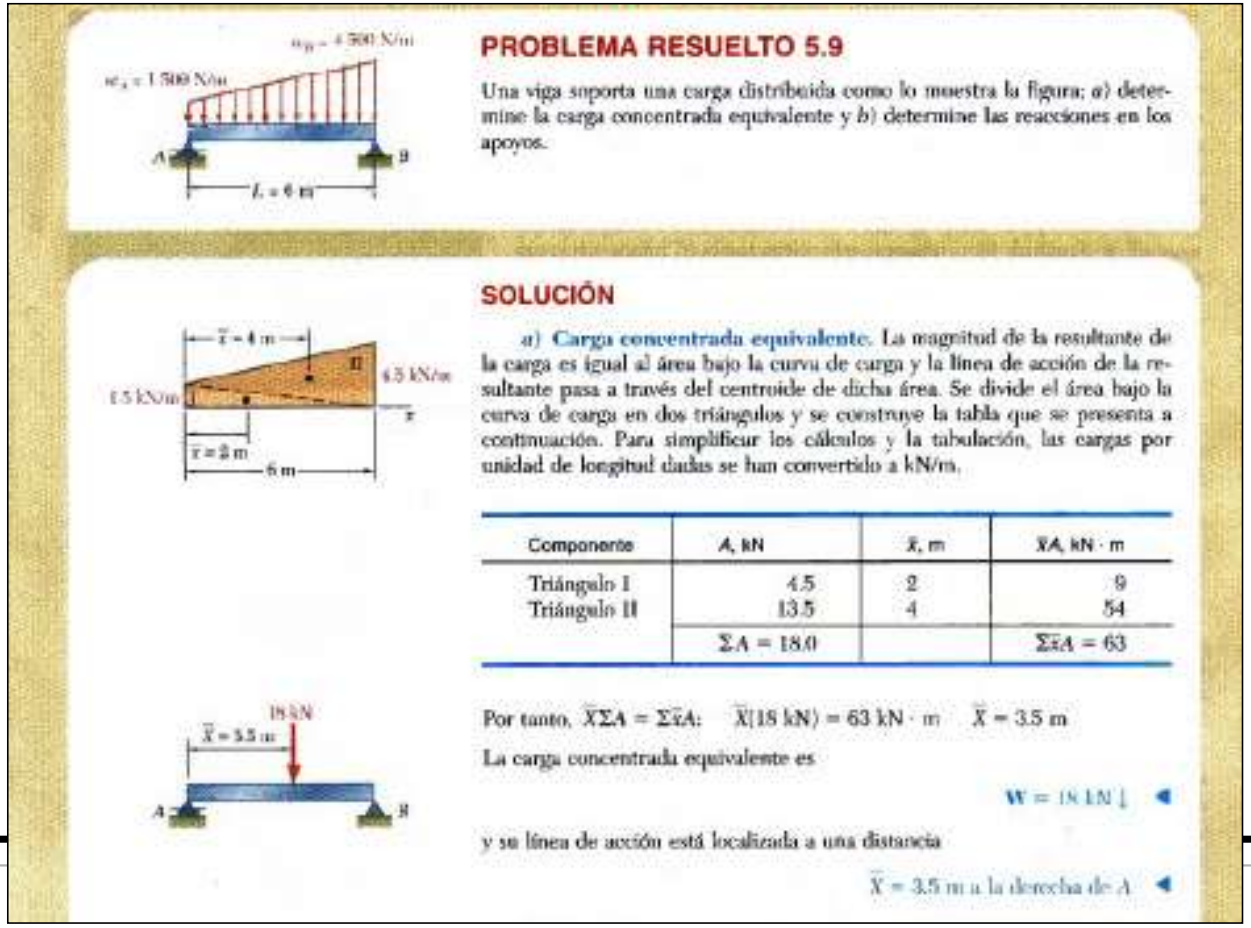
$$(OP)W = \int x\, dW$$

o, como $dW = w\, dx = dA$ y $W = A$,

$$(OP)A = \int_0^L x\, dA \qquad (5.12)$$

En este sentido, una carga distribuida que actúa sobre una viga puede reemplazarse por una carga concentrada, la magnitud de dicha carga es igual al área bajo la curva de carga y su línea de acción pasa a través del centroide de dicha área. Sin embargo, se debe señalar que la carga concentrada es equivalente a la carga distribuida dada sólo en lo que respecta a las fuerzas externas. Esta carga concentrada puede utilizarse para determinar reacciones pero no debe ser empleada para calcular fuerzas internas y deflexiones.

Sistema de Fuerzas Distribuidas



PROBLEMA RESUELTO 5.9

Una viga soporta una carga distribuida como lo muestra la figura; *a*) determine la carga concentrada equivalente y *b*) determine las reacciones en los apoyos.

SOLUCIÓN

a) **Carga concentrada equivalente.** La magnitud de la resultante de la carga es igual al área bajo la curva de carga y la línea de acción de la resultante pasa a través del centroide de dicha área. Se divide el área bajo la curva de carga en dos triángulos y se construye la tabla que se presenta a continuación. Para simplificar los cálculos y la tabulación, las cargas por unidad de longitud dadas se han convertido a kN/m.

Componente	A, kN	$\bar{X}$, m	$\bar{X}A$, kN · m
Triángulo I	4.5	2	9
Triángulo II	13.5	4	54
	$\Sigma A = 18.0$		$\Sigma \bar{x}A = 63$

Por tanto, $\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A$: $\bar{X}(18\text{ kN}) = 63\text{ kN} \cdot \text{m}$ $\bar{X} = 3.5\text{ m}$

La carga concentrada equivalente es

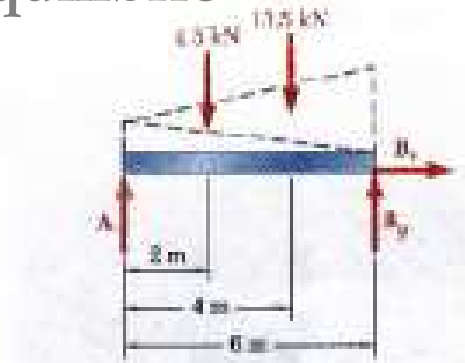
$\mathbf{W} = 18\text{ kN}\downarrow$ ◀

y su línea de acción está localizada a una distancia

$\bar{X} = 3.5\text{ m}$ a la derecha de A ◀

Sistema de Fuerzas Distribuidas

Equilibrio



b) **Reacciones.** La reacción en A es vertical y se representa con $\mathbf{A}$; la reacción en B está representada por sus componentes $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$. Como se muestra en la figura, la carga dada se puede considerar como la suma de dos cargas triangulares. La resultante de cada carga triangular es igual al área del triángulo y actúa en su centroide. Se escriben las siguientes ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre mostrado:

$$\pm\Sigma F_x = 0: \qquad B_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad -(4.5\ \text{kN})(2\ \text{m}) - (13.5\ \text{kN})(4\ \text{m}) + B_y(6\ \text{m}) = 0$$

$$B_y = 10.5\ \text{kN} \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad +(4.5\ \text{kN})(4\ \text{m}) + (13.5\ \text{kN})(2\ \text{m}) - A(6\ \text{m}) = 0$$

$$A = 7.5\ \text{kN} \uparrow$$

Solución alternativa. La carga distribuida dada se puede reemplazar por su resultante, la cual se determinó en la parte *a*. Las reacciones pueden determinarse con las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$. De nuevo se obtiene

$$B_x = 0 \qquad B_y = 10.5\ \text{kN} \uparrow \qquad A = 7.5\ \text{kN} \uparrow$$

Sistema de Fuerzas Distribuidas Superficiaales

Fuerzas distribuidas superficiales, se deben a la acción que ejercen sobre un cuerpo, por contacto directo, con otros cuerpos sólidos o fluidos.

Se define **presión** a la intensidad de la carga perpendicular a una superficie y **fricción** a la paralela a la tangente de la superficie.

La acción superficial por contacto con otros cuerpos sólidos o de un fluido en reposo (hidrostática) es en general una presión.

Cuando la superficie de contacto entre los cuerpos es muy reducida frente a la superficie del cuerpo, puede reemplazarse la fuerza superficial por su resultante aplicada en un punto.

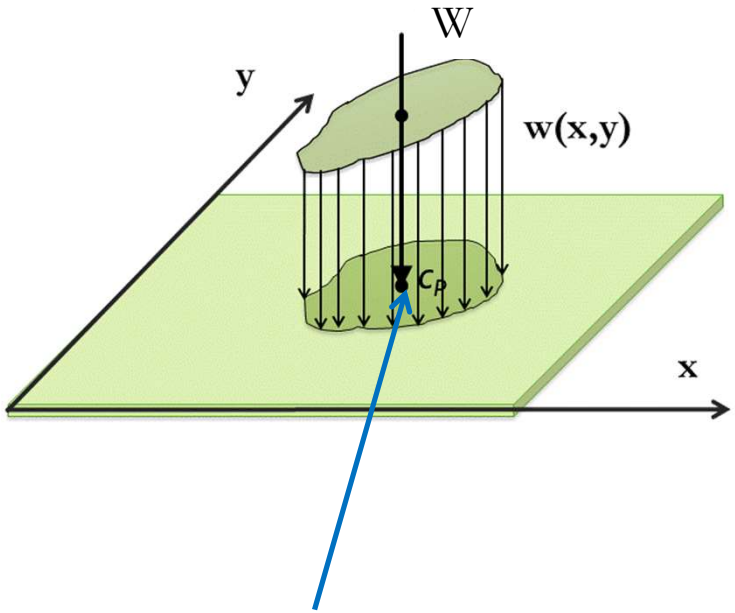
Se trata el caso más común de carga de presión distribuida actuando sobre una placa (superficie plana).

Se busca reemplazar la carga distribuida con una carga puntual equivalente llamada resultante R.

La magnitud de la fuerza resultante es equivalente a la suma de todas las fuerzas del sistema.

Sistema de Fuerzas Distribuidas Superficiales

Resultante: W es la fuerza concentrada equivalente



Magnitud de la fuerza resultante:

$$W = \int w\,(x,y)\,dA = V$$

= Volumen bajo la superficie

Cp (centro de presiones): punto de ubicación de la resultante sobre la superficie

Sistema de Fuerzas Distribuidas sobre superficies sumergidas

1. Superficie rectangular => b (ancho de la compuerta) constante

El procedimiento usado en la sección anterior puede emplearse para determinar la resultante de las fuerzas de presión hidrostática ejercidas sobre una *superficie rectangular* sumergida en un líquido. Considérese la placa rectangular mostrada en la figura 5.18, la cual tiene una longitud L y un ancho b, donde b se mide perpendicular al plano de la figura. Como se señaló en la sección 5.8, la carga ejercida sobre un elemento de la placa de longitud dx es $w\,dx$, donde w es la carga por unidad de longitud. Sin embargo, esta carga también puede expresarse como $p\,dA = pb\,dx$, donde p es la presión manométrica en el líquido[1] y b es el ancho de la placa; por tanto, $w = bp$. Como la presión manométrica en un líquido es $p = \gamma h$, donde γ es el peso específico del líquido y h es la distancia vertical a partir de la superficie libre, se concluye que

$$w = bp = b\gamma h \qquad (5.13)$$

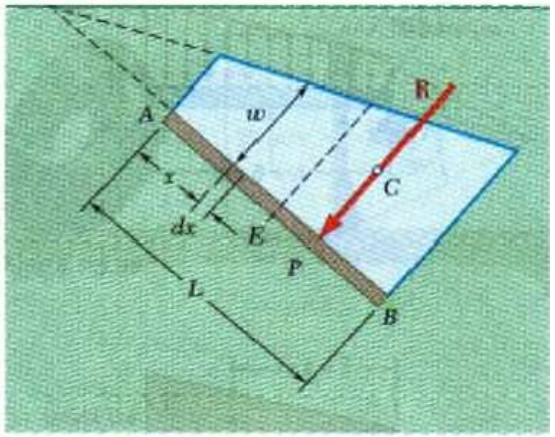


Figura 5.18

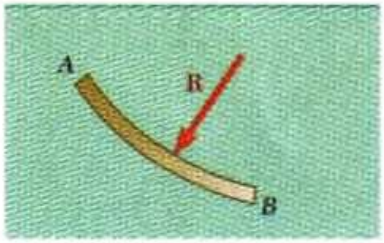
Resultante W=área del trapecio

Ubicación de W (centro de presión cp): centroide del trapecio de carga

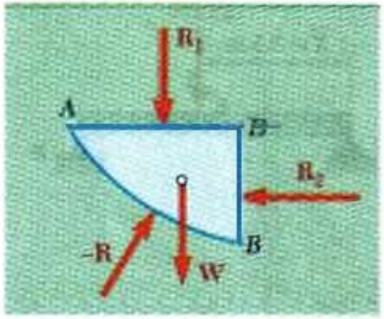
Nota: la presión actúa SIEMPRE perpendicularmente a la superficie

Sistema de Fuerzas Distribuidas sobre superficies sumergidas

2. Superficie curva de ancho constante



a)



b)

Figura 5.19

A continuación se consideran las fuerzas ejercidas por un líquido sobre una superficie curva de ancho constante (figura 5.19*a*). Como la determinación por integración directa de la resultante **R** de dichas fuerzas podría no ser fácil, se considera el cuerpo libre obtenido por la separación del volumen de líquido *ABD* el cual está limitado por la superficie curva *AB* y por las dos superficies planas *AD* y *DB* como se muestra en la figura 5.19*b*. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre *ABD* son el peso **W** del volumen de líquido separado, la resultante $\mathbf{R}_1$ de las fuerzas ejercidas sobre *AD*, la resultante $\mathbf{R}_2$ de las fuerzas ejercidas sobre *BD* y la resultante $-\mathbf{R}$ de las fuerzas ejercidas *por la superficie curva sobre el líquido*. La resultante $-\mathbf{R}$ es igual y opuesta y tiene la misma línea de acción que la resultante **R** de las fuerzas ejercidas *por el líquido sobre la superficie curva*. Las fuerzas **W**, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ se pueden determinar mediante los métodos convencionales; una vez que se han encontrado estos valores, la fuerza $-\mathbf{R}$ se obtiene al resolver las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre de la figura 5.19*b*. Entonces la resultante **R** de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre la superficie curva se obtienen invirtiendo el sentido de $-\mathbf{R}$.

Ejercicio

side of the free-body diagram. Its magnitude is

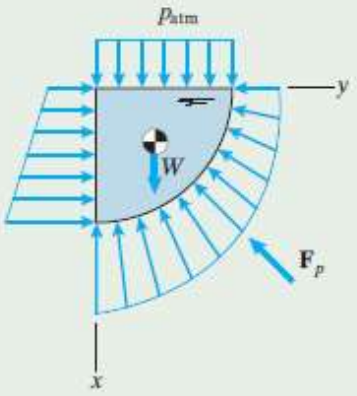
$$\int_A p\,dA = \int_0^R (p_{\text{atm}} + \gamma x) b\,dx = Rb\left(p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\gamma R\right).$$

From the equilibrium equation

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{1}{4}\gamma\pi R^2 b\mathbf{i} + Rbp_{\text{atm}}\mathbf{i} + Rb\left(p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\gamma R\right)\mathbf{j} + \mathbf{F}_p = \mathbf{0},$$

we obtain the force exerted on the wall AB by the pressure of the liquid:

$$-\mathbf{F}_p = Rb\left(p_{\text{atm}} + \frac{\pi}{4}\gamma R\right)\mathbf{i} + Rb\left(p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\gamma R\right)\mathbf{j}$$



(b) Free-body diagram of the liquid to the right of A.

Critical Thinking