



Universidad de Buenos Aires

FACULTAD DE INGENIERIA



ESTABILIDAD I

Clase 4

Equilibrio de Cuerpos Vinculados.



Algunas definiciones

Clasificación de elementos estructurales:

1. Lineales o unidimensionales (barras o piezas prismáticas): una dimensión predominante frente a las otras 2.
2. Superficiales o bidimensionales (placas, chapas o membranas): 2 dimensiones predominantes frente a la tercera
3. Volumétricos o tridimensionales (cuerpos): 3 dimensiones predominantes



Algunas definiciones

Pórtico (planos ó espaciales): estructura construida por una sucesión de barras, de eje rectilíneo o curvo.

Elementos inclinados o verticales: se denominan pilares

Elementos verticales: columnas

Elementos horizontales: vigas o dinteles

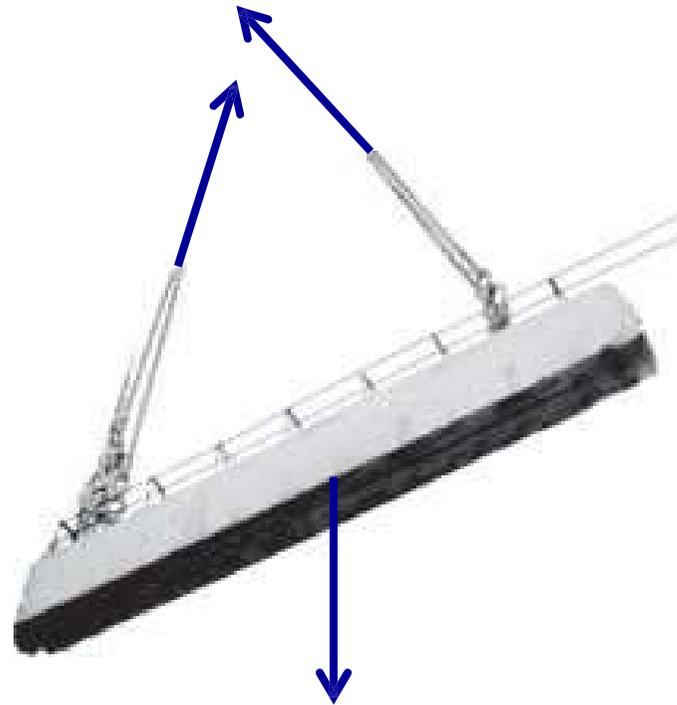
Pórtico plano: los ejes baricéntricos de las barras, vínculos y las cargas se encuentran todos en el mismo plano



Objetos en equilibrio

Con base en los conceptos desarrollados previamente, primero se establecen las ecuaciones generales de equilibrio y se describen las diferentes formas en que los elementos estructurales pueden apoyarse o mantenerse en su lugar. Después, mediante el uso de **diagramas de cuerpo libre (DCL)** y ecuaciones de equilibrio, se muestra cómo determinar las fuerzas y pares desconocidos que ejercen los soportes sobre los elementos estructurales.

La motivación principal para este procedimiento es que representa el paso inicial para responder una pregunta esencial en el análisis estructural: ¿Cómo diseñan los ingenieros elementos estructurales capaces de soportar las cargas a las cuales están sometidos?



La viga está en equilibrio bajo las acciones de su peso y las fuerzas ejercidas por las cadenas.

En este capítulo se aplican ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas y pares desconocidos que actúan sobre los objetos.

Ref: Cap 5 Bedford Fowler



➤ Equilibrio de cuerpos vinculados

- Equilibrio de una partícula
- Equilibrio de un cuerpo rígido



Grados de libertad de una partícula (o coordenadas libres)

- Partícula en el plano: 2 GL
- Partícula en el espacio: 3 GL

Nota: una traslación es una rotación en torno de un punto (polo) impropio

Equilibrio de una partícula



- Condiciones de equilibrio de una partícula
(equilibrio de fuerzas concentradas concurrentes)

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{0}$$

(1° Ley de Newton)

- Diagrama de cuerpo libre

Poner en evidencia todas las fuerzas actuantes, activas y reactivas.

- fuerzas activas: tienden a poner la partícula en movimiento
- fuerzas reactivas: son el resultado de restricciones o soportes que tienden a impedir el movimiento.

Equilibrio de una partícula



- Sistemas de fuerzas coplanares

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{0} \quad (1 \text{ ecuación vectorial})$$

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \sum_i F_{x,i} \hat{i} + \sum_i F_{y,i} \hat{j} = \bar{0}$$

(2 ecuaciones escalares)



$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

Equilibrio de una partícula

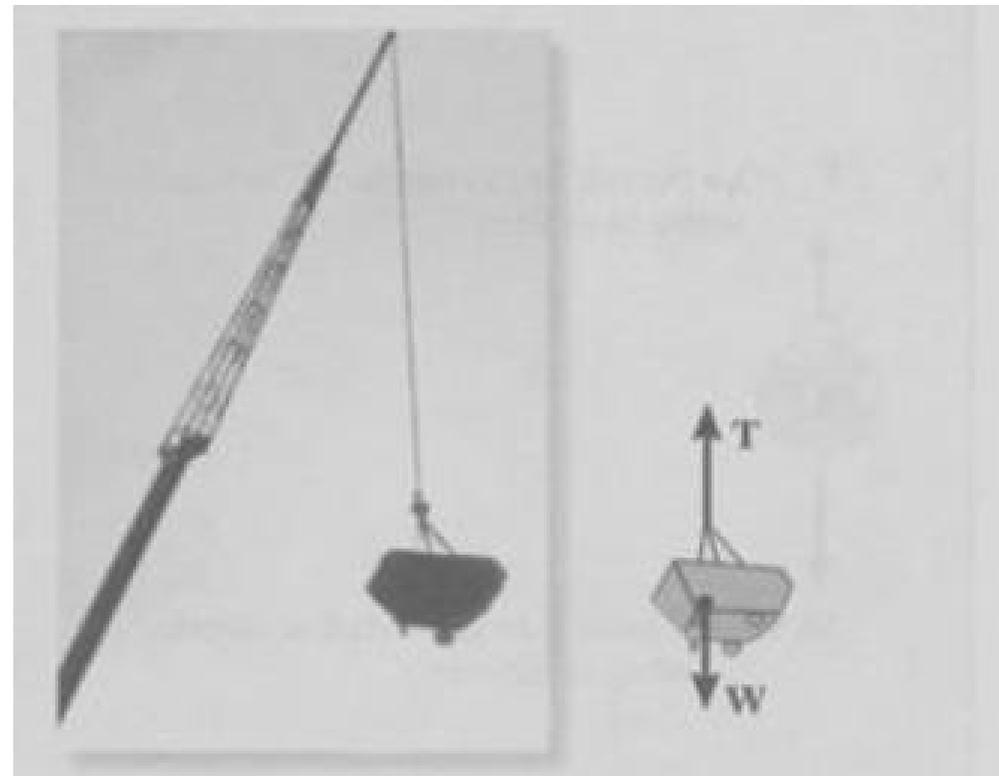


- Sistemas de fuerzas coplanares

$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

La cubeta se mantiene en equilibrio por el cable, e intuitivamente sabemos que la fuerza en el cable debe ser igual al peso de la cubeta. Al trazar un diagrama de cuerpo libre de la cubeta podemos entender por qué esto es así. Este diagrama muestra que hay sólo dos fuerzas actuando sobre la cubeta, su peso W y la fuerza T del cable. Para obtener la posición de equilibrio, la resultante de esas fuerzas debe ser igual a cero, por lo que $T = W$. El punto importante es que al aislar la cubeta, la fuerza T desconocida en el cable resulta "expuesta" y debe ser considerada como un requisito para obtener el equilibrio.



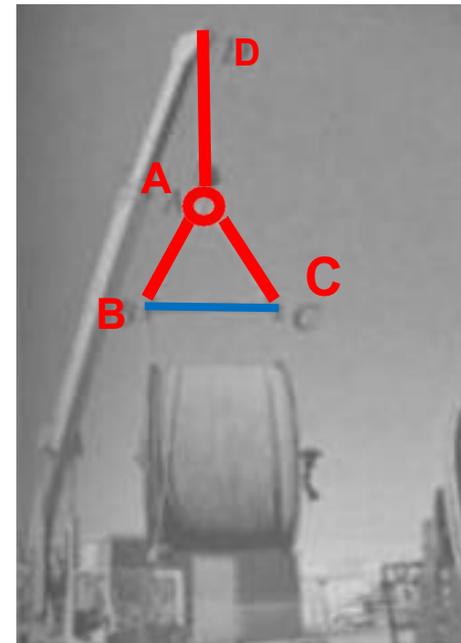
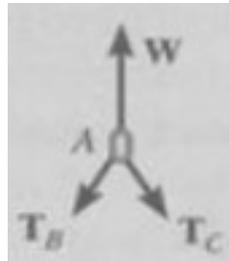
Equilibrio de una partícula



- Sistemas de fuerzas coplanares

$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$



Considere el carrete con peso W que está suspendido de la grúa. Si queremos obtener las fuerzas presentes en los cables AB y AC , podemos considerar el diagrama de cuerpo libre del anillo situado en A , ya que esas fuerzas actúan sobre el anillo. Aquí, los cables AD ejercen una fuerza resultante W sobre el anillo y la condición de equilibrio se usa para obtener T_B y T_C .

Equilibrio de una partícula



- Sistemas de fuerzas coplanares

$$\sum_i F_{x,i} = 0$$
$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los problemas de equilibrio de fuerzas coplanares para una partícula pueden ser resueltos usando el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca los ejes x , y en cualquier orientación apropiada.
- Rotule sobre el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas.
- El sentido de una fuerza con una magnitud desconocida puede ser supuesto.

Ecuaciones de equilibrio.

- Aplique las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$.
- Las componentes son positivas si están dirigidas a lo largo de un eje positivo, y negativas si están dirigidas a lo largo de un eje negativo.
- Si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

Equilibrio de una partícula



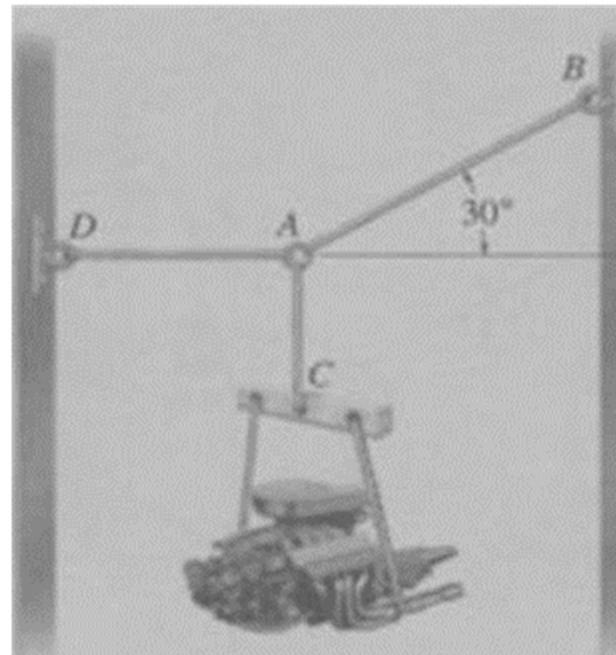
- Sistemas de fuerzas coplanares

EJEMPLO 3.2

Determine la tensión en los cables AB y AD para mantener en equilibrio el motor de 250 kg mostrado en la figura 3-6a.

$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$



Equilibrio de una partícula



- Sistemas de fuerzas coplanares

$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

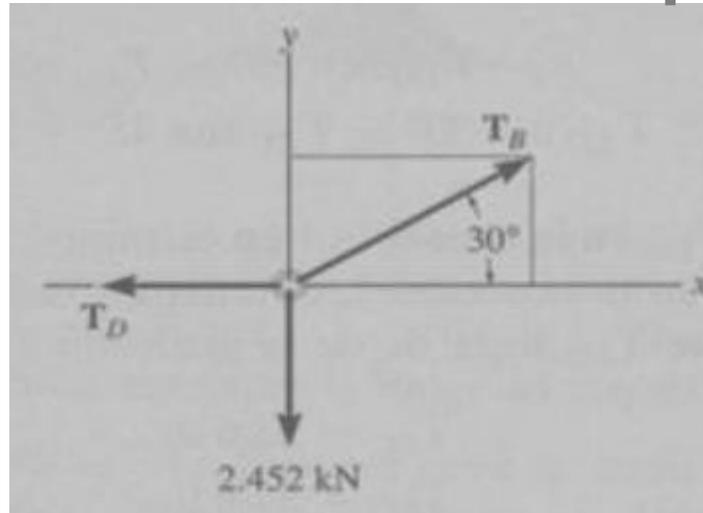


Diagrama de cuerpo libre

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad T_B \cos 30^\circ - T_D = 0 \quad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_B \sin 30^\circ - 2.452 \text{ kN} = 0 \quad (2)$$

Al despejar T_B de la ecuación 2 y sustituirla en la ecuación 1 para obtener T_D resulta

$$T_B = 4.90 \text{ kN} \quad \text{Respuesta}$$

$$T_D = 4.25 \text{ kN} \quad \text{Respuesta}$$



Equilibrio de una partícula

- Sistema tridimensionales de fuerzas

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{0}$$

(1 ecuación vectorial)

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \sum_i F_{x,i} \hat{i} + \sum_i F_{y,i} \hat{j} + \sum_i F_{z,i} \hat{k} = \bar{0}$$



$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

$$\sum_i F_{z,i} = 0$$

(3 ecuaciones escalares)

Equilibrio de una partícula

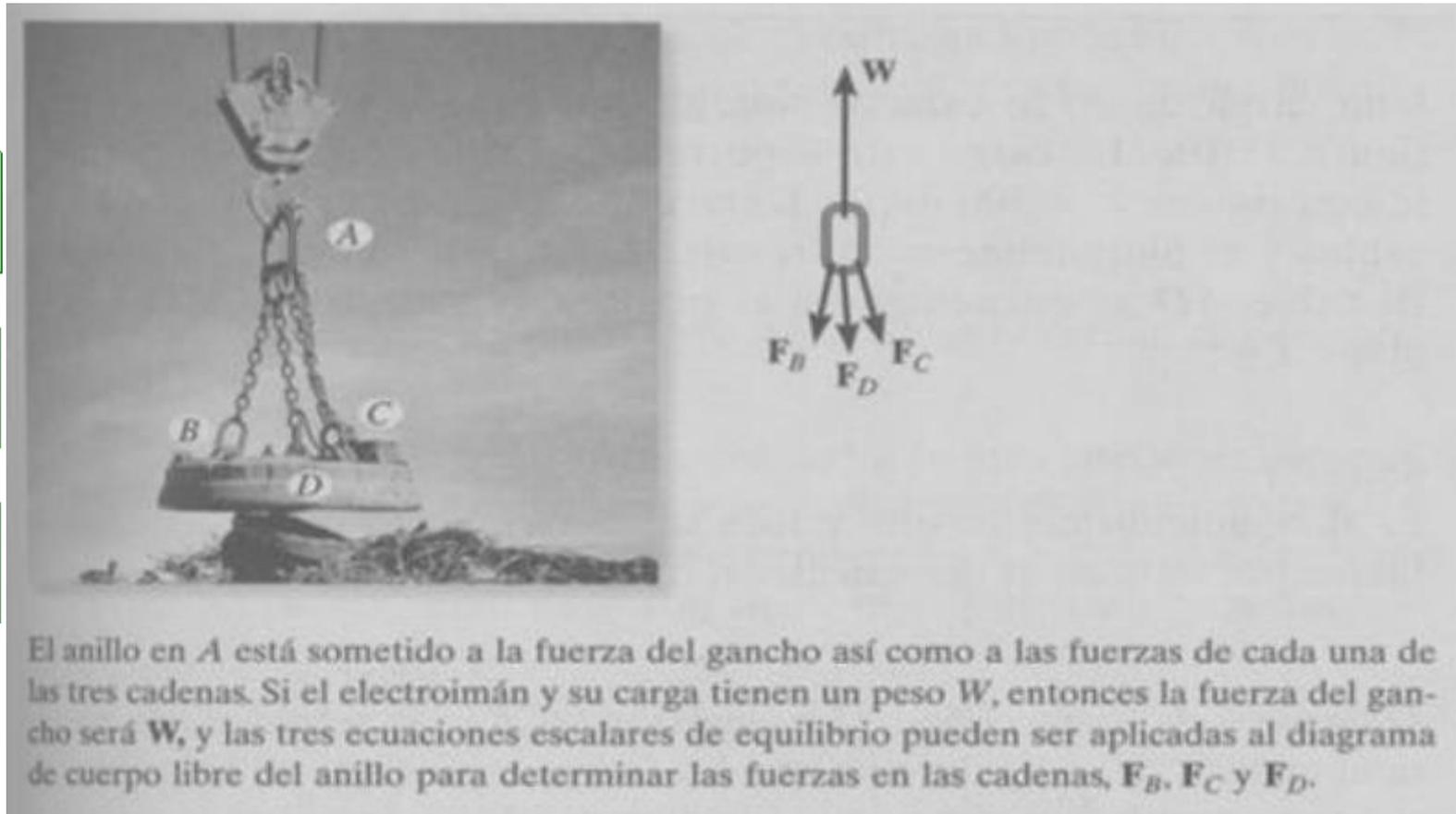


- Sistema tridimensionales de fuerzas

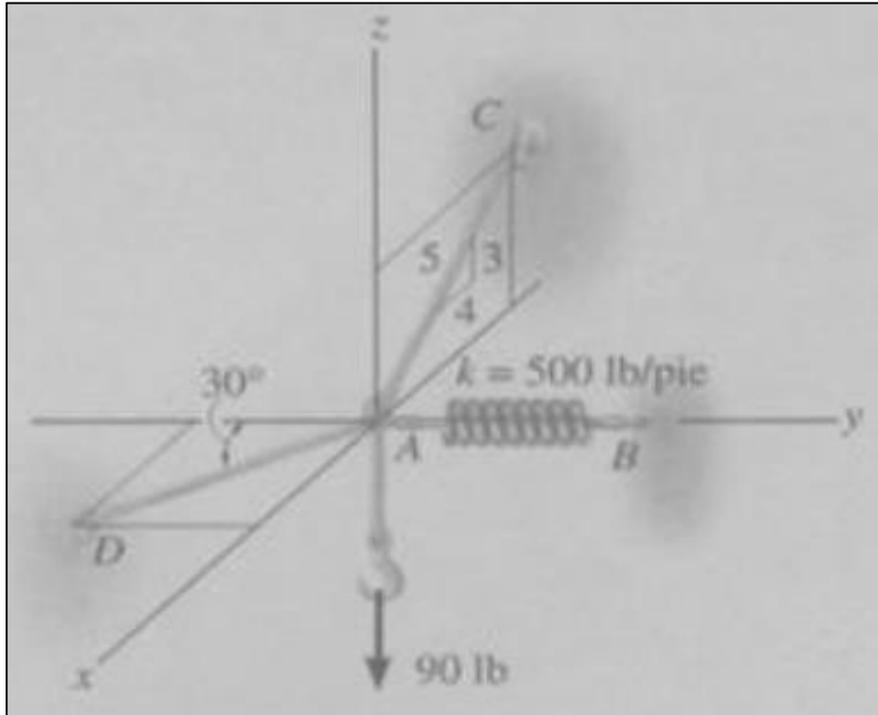
$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

$$\sum_i F_{z,i} = 0$$



Equilibrio de una partícula



Sistema tridimensionales de fuerzas

Una carga de 90 lb está suspendida del gancho mostrado en la figura 3-10a. La carga está soportada por dos cables y un resorte con rigidez $k = 500$ lb/pie. Determine la fuerza presente en los cables

El cable AD se encuentra en el plano $x-y$ y el cable AC en el plano $x-z$.

Equilibrio de una partícula



- Sistema tridimensionales de fuerzas

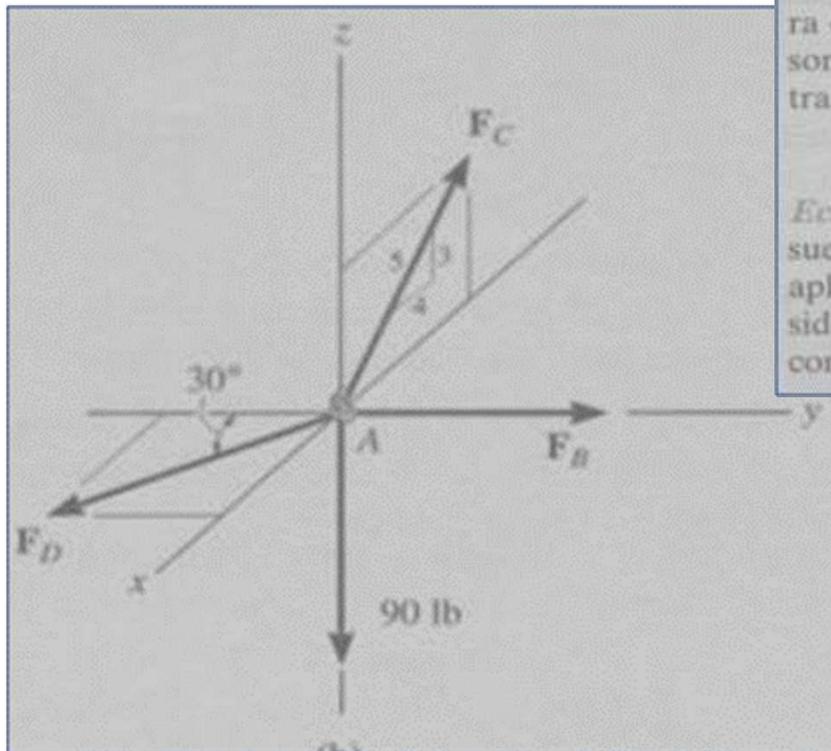


Diagrama de cuerpo libre. La conexión en A es la seleccionada para el análisis del equilibrio ya que las fuerzas presentes en los cables son concurrentes en este punto. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3-10b.

Ecuaciones de equilibrio. Por inspección, cada fuerza puede ser resuelta fácilmente en sus componentes x , y , z , por tanto, es posible aplicar directamente las tres ecuaciones escalares de equilibrio. Considerando las componentes dirigidas a lo largo de los ejes positivos como "positivas", tenemos

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$\Sigma F_z = 0;$$

$$F_D \text{ sen } 30^\circ - \frac{4}{5}F_C = 0$$

$$-F_D \text{ cos } 30^\circ + F_B = 0$$

$$\frac{3}{5}F_C - 90 \text{ lb} = 0$$

(ref: Russel C. Hibbeler)

$$F_C = 150 \text{ lb}$$

$$F_D = 240 \text{ lb}$$

$$F_B = 208 \text{ lb}$$

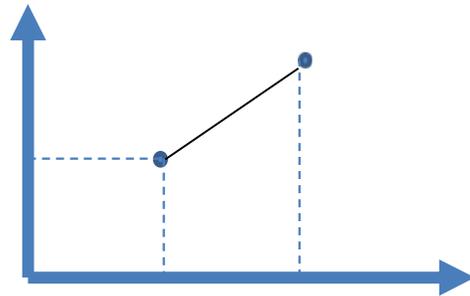


Grados de libertad (o coordenadas libres) de un cuerpo rígido

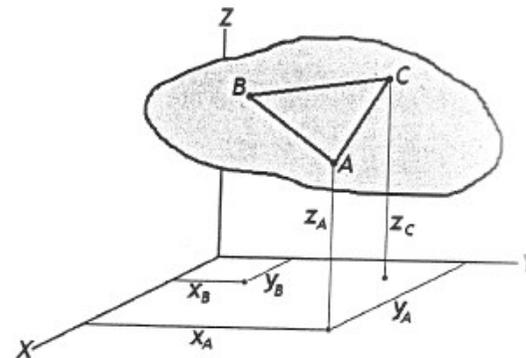
Cuerpo: Conjunto denso de puntos materiales.

Rígido: la distancia entre dos puntos del cuerpo permanece invariable antes y después de aplicar la carga

En el plano: 3 GL



En el Espacio: 6 GL





Clasificación de los sistemas estructurales según su vinculación

- Isostáticos : $GL=CV$
- Hiperestáticos : $GL < CV$
- Hipostáticos : $GL > CV$

Dónde:

- GL: Grados libertad
- CV : número de Condiciones de Vínculos

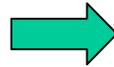
Equilibrio de un cuerpo rígido



Sistemas planos

- Condiciones de equilibrio del cuerpo rígido
(equilibrio de fuerzas concentradas no concurrentes
=> sistema de fuerzas generalizado)

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{0}$$



$$\sum_i F_{x,i} = 0 \quad \sum_i F_{y,i} = 0$$

$$\bar{M}_R^O = \sum_i \bar{M}_{F_i}^O = \bar{0}$$



$$\sum_i M_{z,i}^O = 0$$

(2 ecuaciones vectoriales)

(3 ecuaciones escalares)

- Diagrama de cuerpo libre

Equilibrio de un cuerpo rígido



- Condiciones de equilibrio del cuerpo rígido
(equilibrio de fuerzas concentradas no concurrentes
=> sistema de fuerzas generalizado)

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{0}$$



$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

$$\sum_i F_{z,i} = 0$$

$$\bar{M}_R^O = \sum_i \bar{M}_{F_i}^O = \bar{0}$$



$$\sum_i M_{x,i}^O = 0$$

$$\sum_i M_{y,i}^O = 0$$

$$\sum_i M_{z,i}^O = 0$$

(2 ecuaciones vectoriales)

(6 ecuaciones escalares)

- Diagrama de cuerpo libre



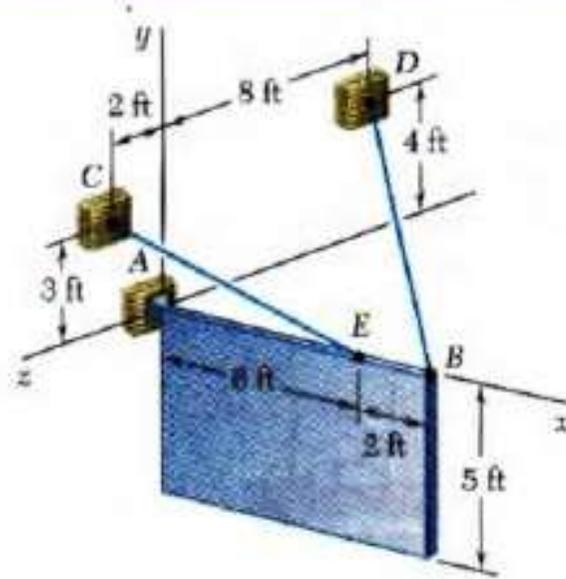
Equilibrio de un cuerpo rígido

- Reacciones en los soportes

Vínculo (ó soporte): toda condición geométrica que limite la posibilidad de movimiento de un cuerpo.

Si un vínculo previene la traslación de un cuerpo en una dirección dada, entonces una fuerza es desarrollada sobre el cuerpo en esa dirección. Igualmente, si el vínculo impide una rotación, sobre el cuerpo se ejerce un momento.

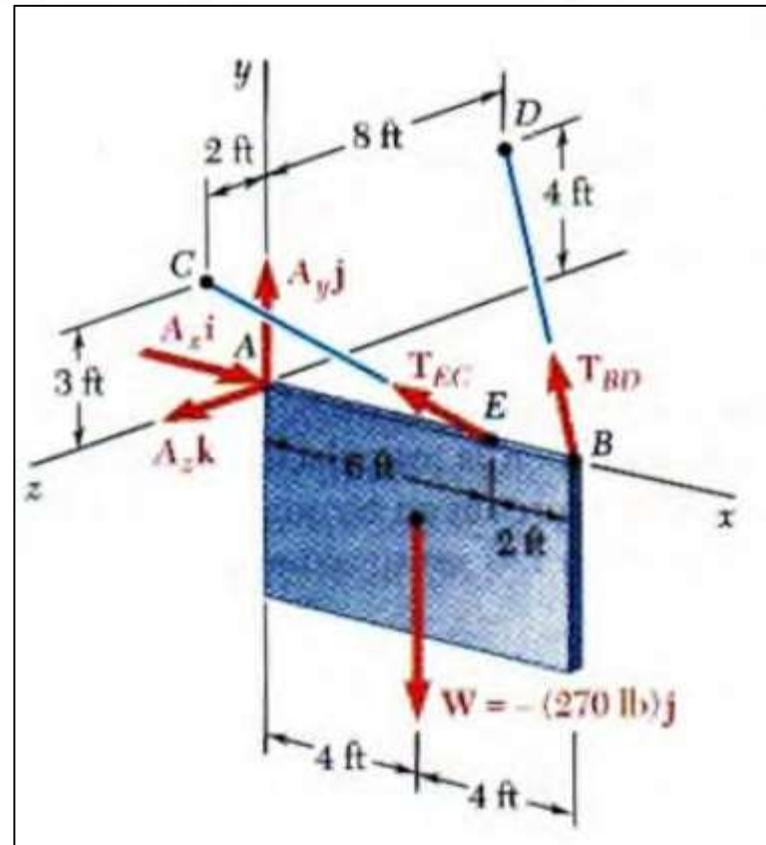
Equilibrio de un cuerpo rígido



PROBLEMA RESUELTO 4.8

Un anuncio de densidad uniforme de 5×8 ft pesa 270 lb y está apoyado por una rótula en A y por dos cables. Determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

- Diagrama de cuerpo libre



Ref: Beer, Johnston, Eisenberg

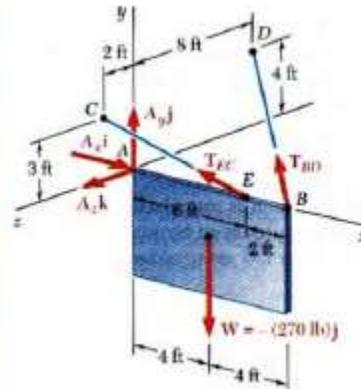
Equilibrio de un cuerpo rígido



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del anuncio. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso $W = -(270 \text{ lb})\mathbf{j}$ y las reacciones en A , B y E . La reacción en A es una fuerza cuya dirección es desconocida y se representa con tres componentes desconocidas. Como las direcciones de las fuerzas ejercidas por los cables son conocidas, cada una de dichas fuerzas sólo involucra una incógnita: las magnitudes T_{BD} y T_{EC} . Como sólo hay cinco incógnitas, el anuncio tiene restricción parcial. Éste puede rotar libremente alrededor del eje x ; sin embargo, el anuncio está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma M_x = 0$.

Equilibrio de un cuerpo rígido



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del anuncio. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso $\mathbf{W} = -(270 \text{ lb})\mathbf{j}$ y las reacciones en A , B y E . La reacción en A es una fuerza cuya dirección es desconocida y se representa con tres componentes desconocidas. Como las direcciones de las fuerzas ejercidas por los cables son conocidas, cada una de dichas fuerzas sólo involucra una incógnita: las magnitudes T_{BD} y T_{EC} . Como sólo hay cinco incógnitas, el anuncio tiene restricción parcial. Éste puede rotar libremente alrededor del eje x ; sin embargo, el anuncio está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma M_x = 0$.

Las componentes de las fuerzas \mathbf{T}_{BD} y \mathbf{T}_{EC} pueden expresarse en términos de las magnitudes desconocidas T_{BD} y T_{EC} al escribir

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{BD} = \frac{-(8 \text{ ft})\mathbf{i} + (4 \text{ ft})\mathbf{j} - (8 \text{ ft})\mathbf{k}}{12 \text{ ft}} \quad BD = 12 \text{ ft}$$

$$\frac{\overrightarrow{EC}}{EC} = \frac{-(6 \text{ ft})\mathbf{i} + (3 \text{ ft})\mathbf{j} + (2 \text{ ft})\mathbf{k}}{7 \text{ ft}} \quad EC = 7 \text{ ft}$$

$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD} \left(\frac{\overrightarrow{BD}}{BD} \right) = T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC} \left(\frac{\overrightarrow{EC}}{EC} \right) = T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right)$$

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre el anuncio forman un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

$$(A_x - \frac{2}{3}T_{BD} - \frac{6}{7}T_{EC})\mathbf{i} + (A_y + \frac{1}{3}T_{BD} + \frac{3}{7}T_{EC} - 270 \text{ lb})\mathbf{j} + (A_z - \frac{2}{3}T_{BD} + \frac{2}{7}T_{EC})\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_A = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$(8 \text{ ft})\mathbf{i} \times T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) + (6 \text{ ft})\mathbf{i} \times T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right) + (4 \text{ ft})\mathbf{i} \times (-270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

$$(2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1080 \text{ lb})\mathbf{k} + (5.333T_{BD} - 1.714T_{EC})\mathbf{j} = 0 \quad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de \mathbf{j} y \mathbf{k} en la ecuación (2), se obtienen dos ecuaciones escalares que deben resolverse para T_{BD} y T_{EC} :

$$T_{BD} = 101.3 \text{ lb} \quad T_{EC} = 315 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

Al igualar a cero los coeficientes de \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} en la ecuación (1), se obtienen otras tres ecuaciones que proporcionan las componentes de \mathbf{A} . Así, se tiene que

$$\mathbf{A} = +(338 \text{ lb})\mathbf{i} + (101.2 \text{ lb})\mathbf{j} - (22.5 \text{ lb})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



4º Principio de la Estática, acción y reacción.

Toda acción implica la existencia de una reacción,
de igual intensidad y sentido contrario.



Fotografías de vínculos reales.

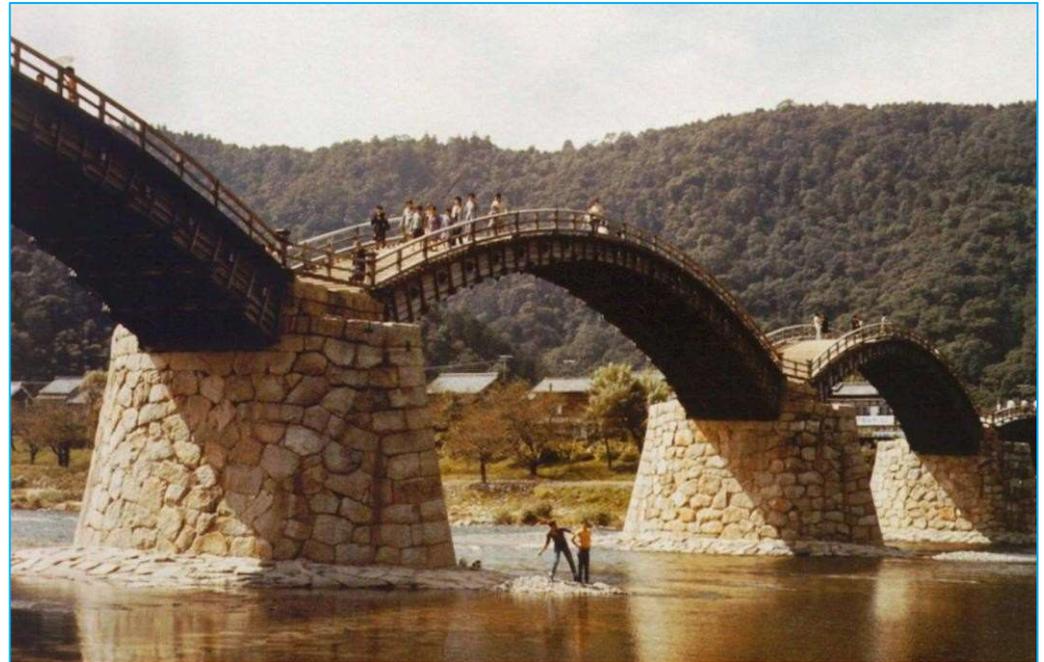
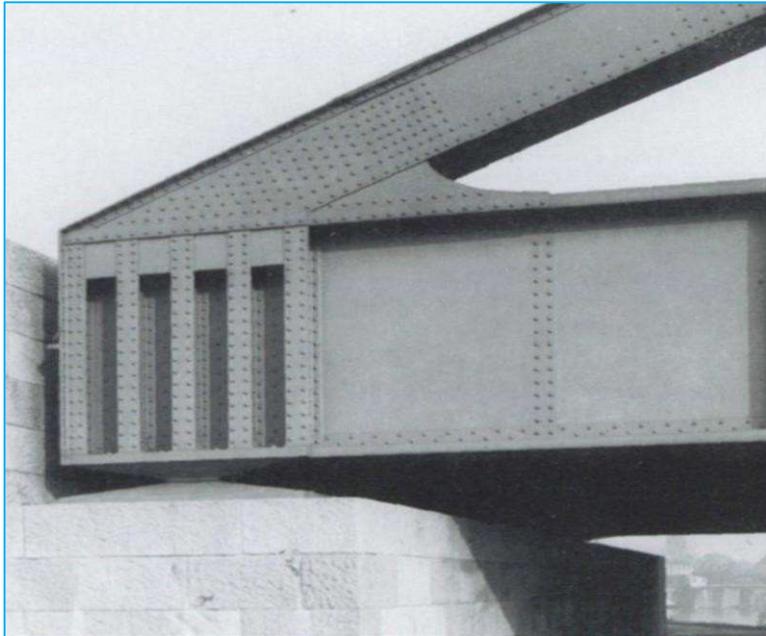
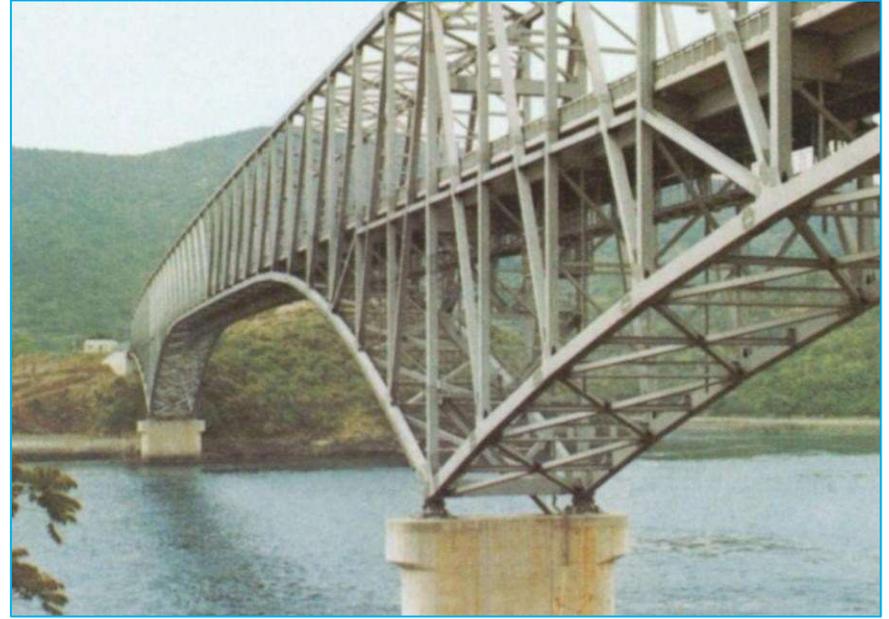
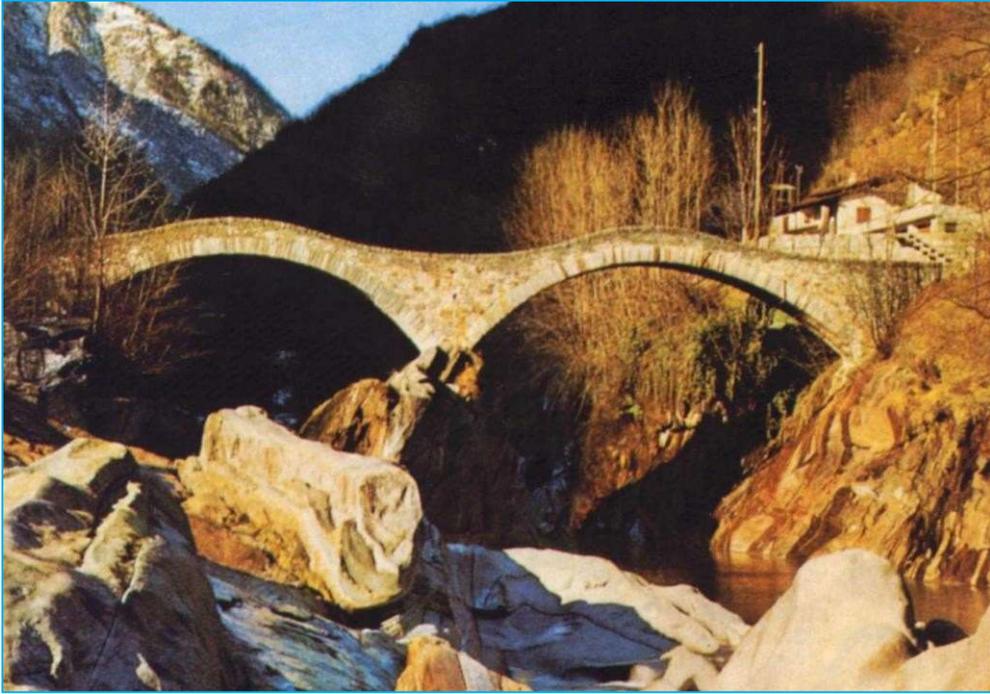








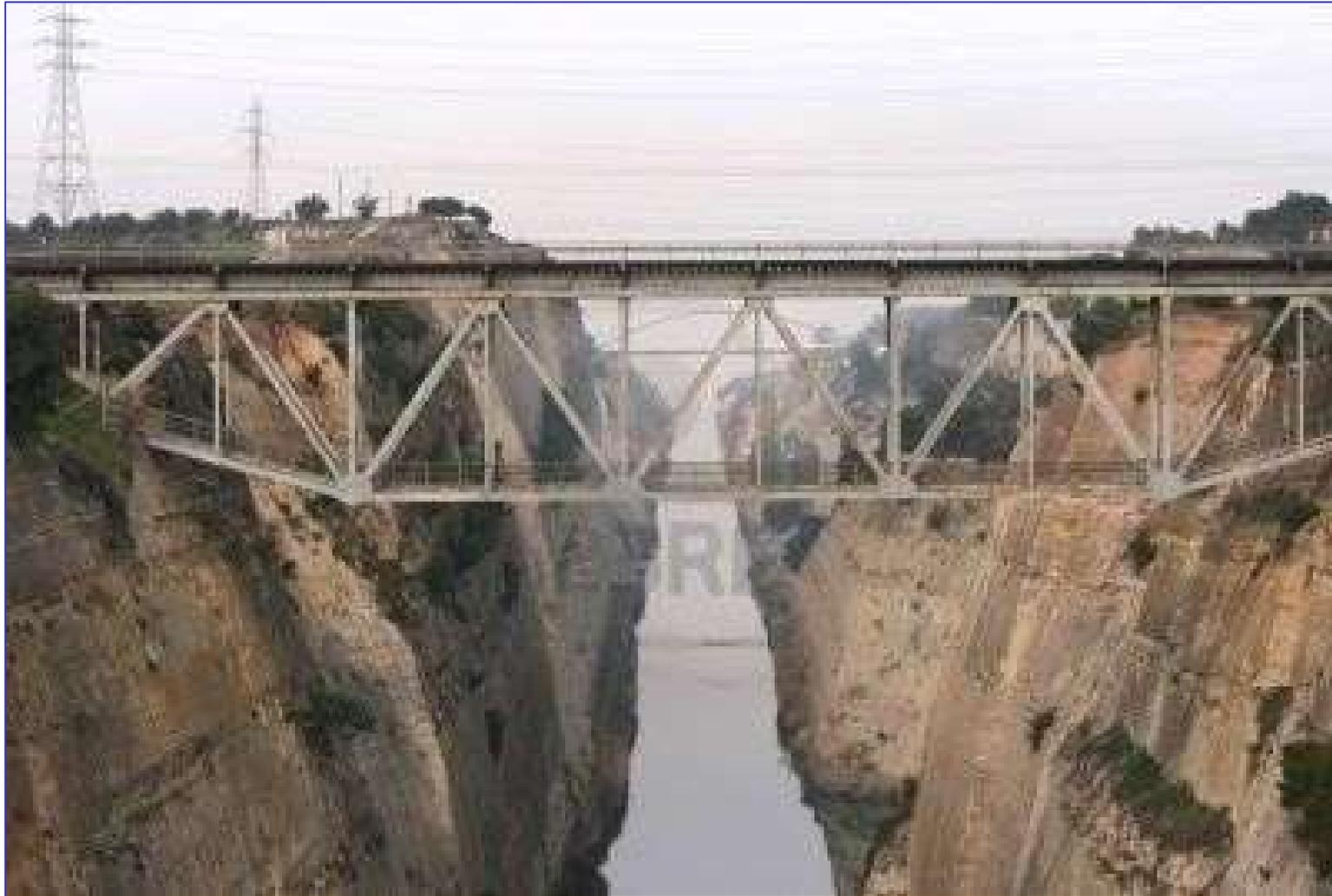












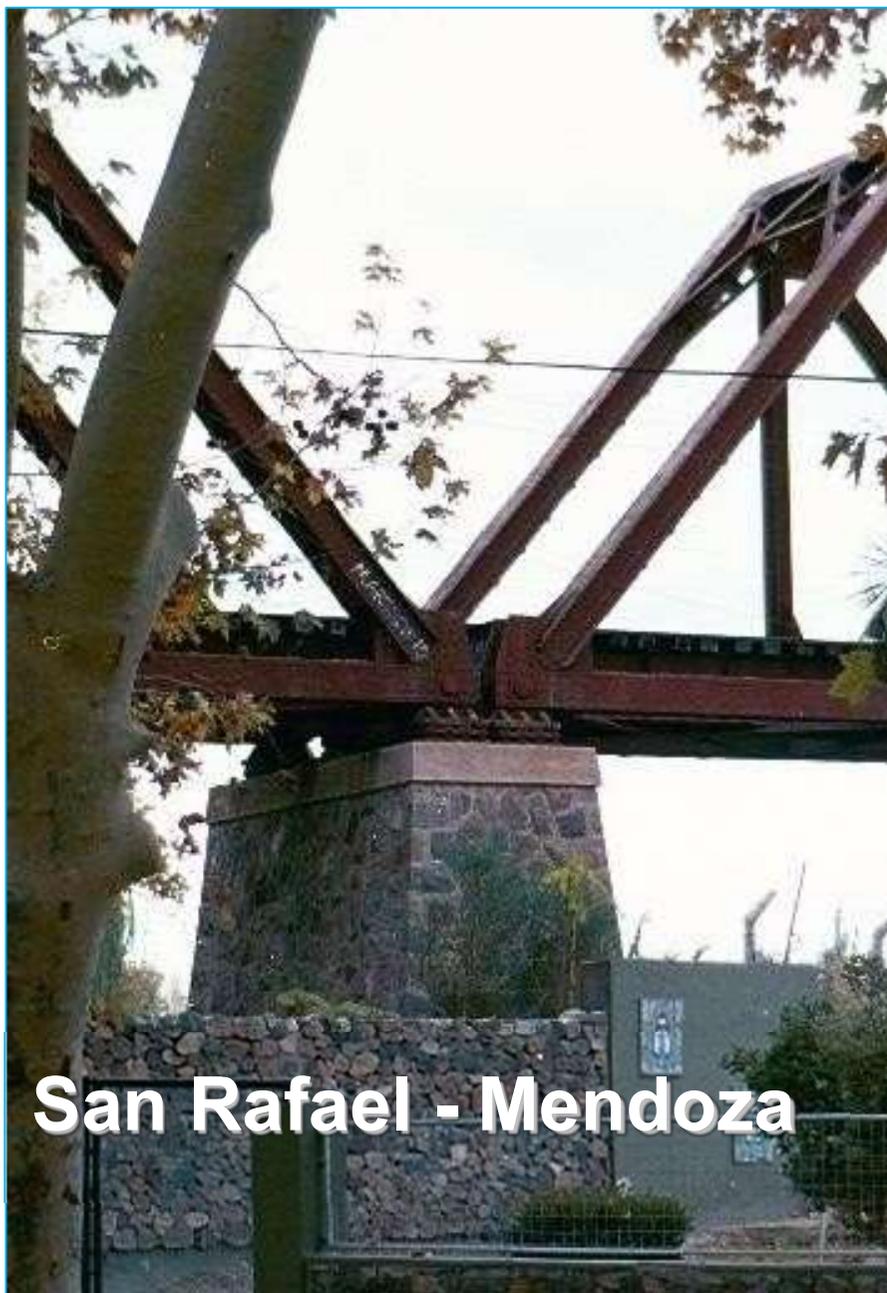
**Apoyos
compuestos
de Neopreno
y de acero**



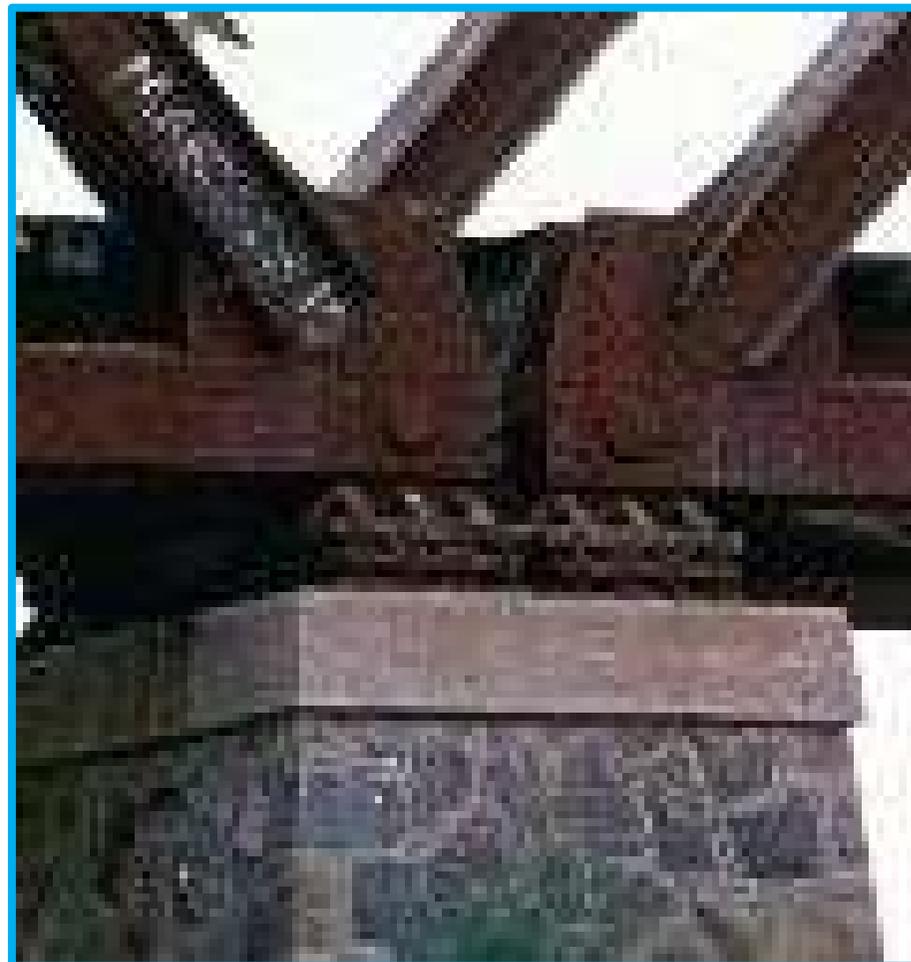








San Rafael - Mendoza



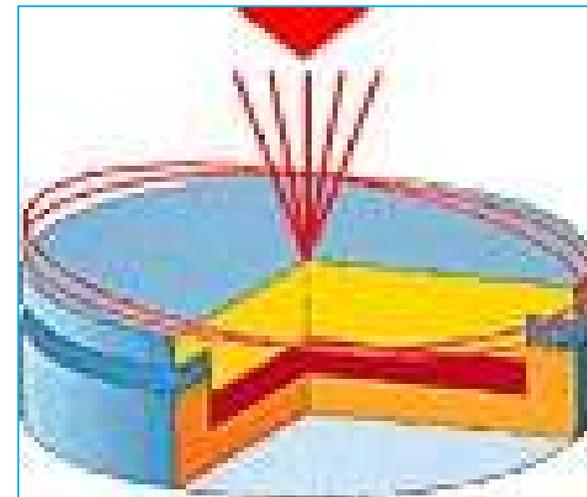


Puente Gral. J. F. Uriburu (Pte. Alsina) – Riachuelo 1938 – Bs. Aires



Apoyos oscilantes para puentes

En la actual ingeniería de construcción de autopistas generalmente hacen uso de estructuras curvas y soportes inclinados, por lo que generan problemas para el libre movimiento de sus apoyos. Esta circunstancia impulsó a diseñar los apoyos oscilantes, viables técnicamente al crearlos de materiales sintéticos como el **PTFE** (politetraflúor-etileno) y el **elastómero**.





Ball joint base

The forces acting on the retaining wall are transmitted via the trusses and the ball joint onto a colossal triangular block of concrete weighing 52,000 tons which forms the base of the ball joint.

Together, the bases can handle a force of 70,000 tons. This may be necessary during the heaviest storm conceivable, which occurs once every 10,000 years.

No piles were driven under the bases.

However sufficient resistance is provided by the friction between the concrete and the ground. During the heaviest storm conceivable, the joint may move 20 centimetres backwards during closure of the barrier, but will subsequently move back.

Bola de apoyo

Receptáculo de la
bola de apoyo





Cuerpos Rígidos Vinculados.

Clasificación de los vínculos:

- **Externos o absolutos:** imponen condiciones geométricas que limitan la posición del cuerpo respecto de la tierra, supuesta fija (conectan la estructura a la tierra).
- **Internos o relativos:** limitan la movilidad entre los cuerpos (conectan partes de la estructura entre sí).
- **Bilaterales ó reversibles:** limitan el movimiento en ambos sentidos
- **Unilaterales** (ej: contacto): limitan el movimiento en un único sentido.



Cuerpos Rígidos Vinculados.

Clasificación de los vínculos según los GL - sistemas planos:

- Móvil (1 GL : 1° especie); CV=1
- Fijo (2 GL : 2° especie); CV=2
- Empotramiento (3 GL : 3° especie); CV=3
- Biela (1 GL : 1° especie); CV=1

Clasificación de los vínculos según los GL - sistemas espaciales:

- Móvil (1 ó 2 GL); CV=1
- Fijo (3 GL); CV=3
- Empotramiento (6 GL); CV=6
- Biela (1 GL : 1° especie); CV=1

Por todo vínculo que limita un movimiento, se dirá que se ha impuesto 1 condición de vínculo (CV)

2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas



5.1 Aplicaciones bidimensionales 197

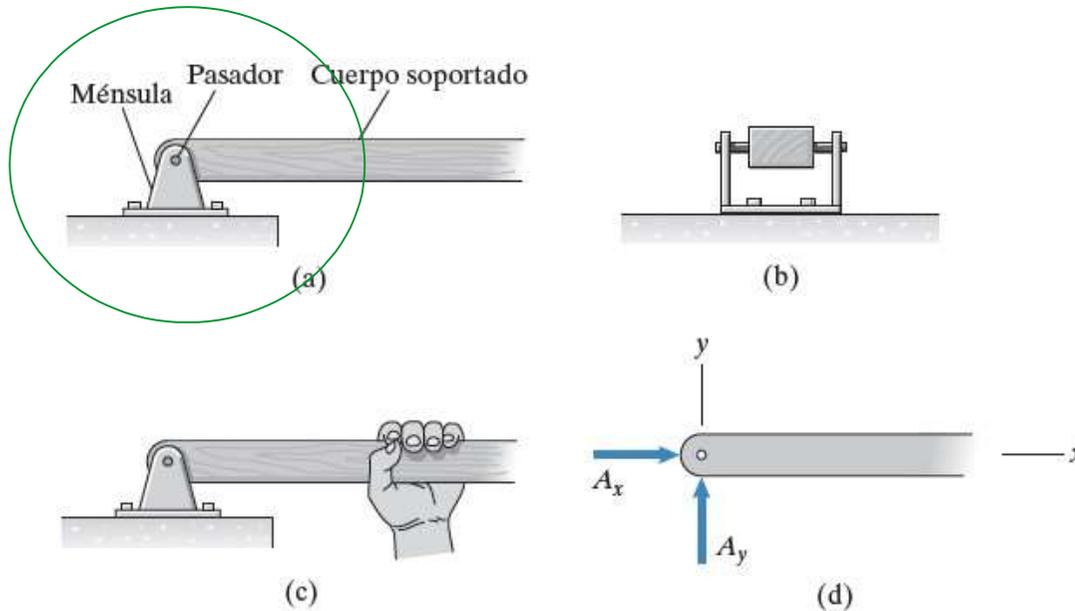
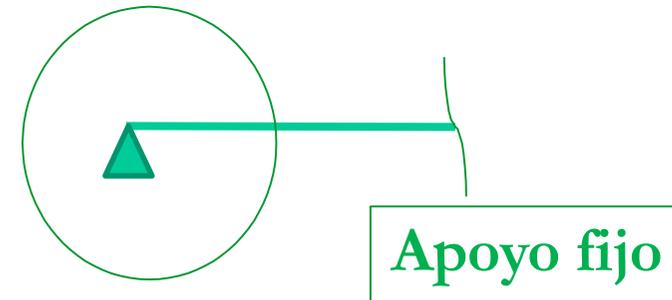


Figura 5.1

- (a) Soporte de pasador.
- (b) Vista lateral que muestra el pasador que atraviesa la viga.
- (c) Sujeción de una barra soportada.
- (d) El soporte de pasador es capaz de ejercer dos componentes de fuerza.



Si se trata de mover la barra sin hacerla girar (es decir, trasladar la barra), el soporte ejerce una fuerza reactiva que lo impide. Sin embargo, se puede hacer girar la barra alrededor del eje del pasador. El soporte no puede generar un par respecto al eje del pasador para impedir el giro. Así, un soporte de pasador no puede generar un par respecto al eje del pasador, pero sí puede ejercer una fuerza sobre un cuerpo en cualquier dirección, lo que comúnmente se expresa representando la fuerza en términos de sus componentes (figura 5.1d).

Ref: Cap 5 Bedford Fowler

2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas



198 Capítulo 5 Objetos en equilibrio

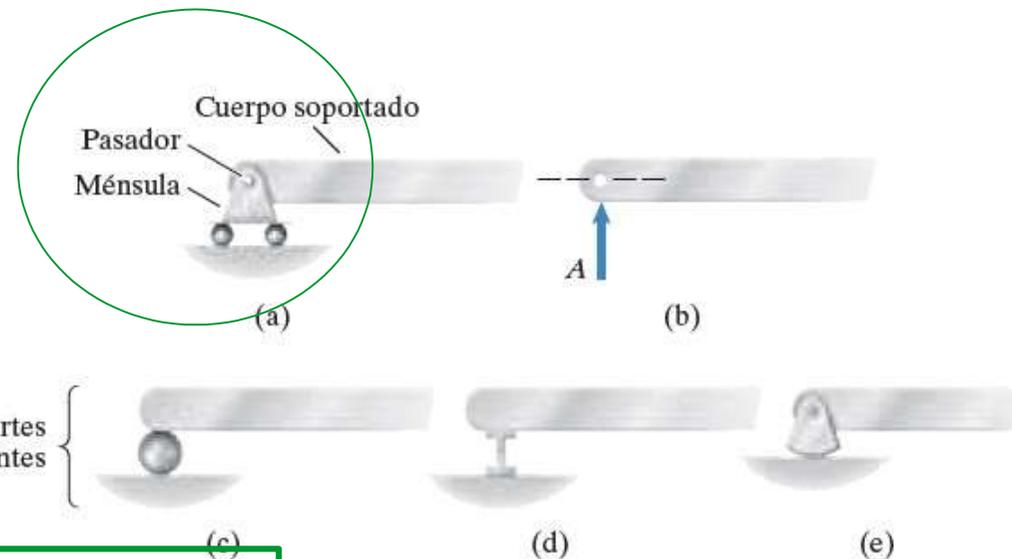
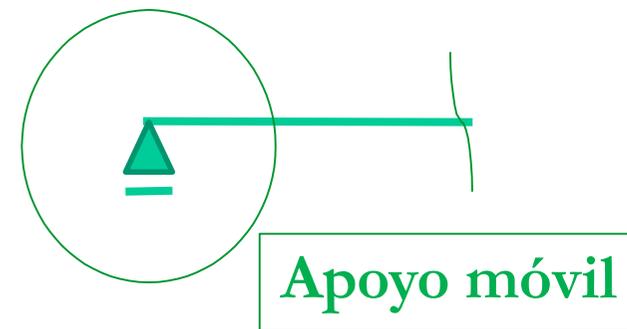


Figura 5.3

- (a) Soporte de rodillos.
- (b) La reacción consiste en una fuerza normal a la superficie.
- (c)–(e) Soportes equivalentes al soporte de rodillos.

Como el soporte de pasador, éste no puede generar un par respecto al eje del pasador. Dado que puede moverse libremente en la dirección paralela a la superficie sobre la que rueda, no puede generar una fuerza paralela a la superficie, sino sólo una fuerza normal (perpendicular) a ella (figura 5.3b). En las figuras 5.3c-e se muestran otras convenciones usadas comúnmente como equivalentes al soporte de rodillo.

Las ruedas de vehículos y que soportan partes de máquinas son soportes de rodillo si las fuerzas de fricción ejercidas sobre ellas son insignificantes en comparación con las fuerzas normales.



Apoyo móvil

Ref: Cap 5 Bedford Fowler

2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas



Empotramiento

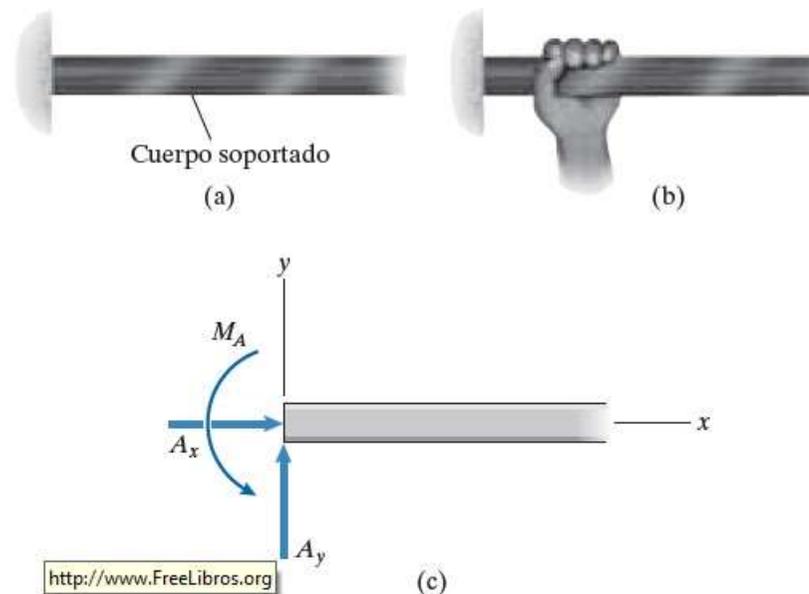


Figura 5.6

- (a) Soporte fijo.
- (b) Sujeción de una barra empotrada.
- (c) Reacciones que es capaz de ejercer un soporte fijo.

Soporte fijo El *soporte fijo* presenta el objeto soportado literalmente empotrado en la pared (figura 5.6a). Esta convención también se denomina *soporte empotrado*. Para entender sus reacciones, imagínese sujetando una barra unida a un soporte fijo (figura 5.6b). Si intenta trasladar la barra, el soporte genera una fuerza reactiva que lo impide; si trata de hacerla girar, el soporte genera un par reactivo que lo impide. Un soporte fijo puede generar dos componentes de fuerza y un par (figura 5.6c). El término M_A es el par generado por el soporte y la flecha curva indica su dirección.

Ref: Cap 5 Bedford Fowler

2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas



Tabla 5.1 Soportes usados en aplicaciones bidimensionales.

Soportes	Reacciones
<p>Cuerda o cable Resorte</p>	<p>Una fuerza colineal</p>
<p>Apoyo móvil</p> <p>Contacto con una superficie lisa</p>	<p>Una fuerza normal a la superficie de soporte</p>
<p>Contacto con una superficie rugosa</p>	<p>Dos componentes de fuerza</p>
<p>Apoyo fijo</p> <p>Soporte de pasador</p>	<p>Dos componentes de fuerza</p>

<p>Apoyo móvil</p> <p>Soporte de rodillo</p>	<p>Una fuerza normal a la superficie de soporte</p>
<p>Equivalentes</p>	
<p>Apoyo móvil</p> <p>Pasador guiado o collarín</p>	<p>Una fuerza normal</p>
<p>Empotramiento</p> <p>Soporte fijo (empotrado)</p>	<p>Dos componentes de fuerza y un par</p>

Ref: Cap 5 Bedford Fowler

2 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas

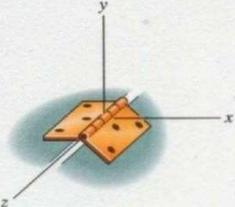
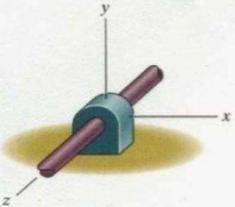
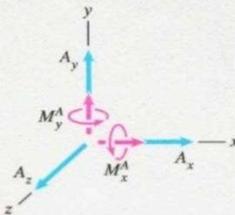
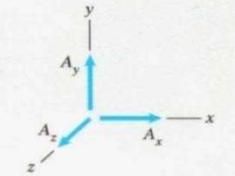
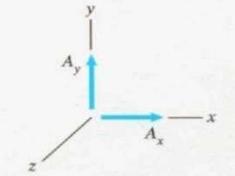
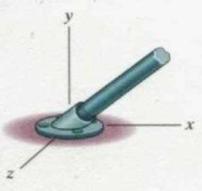
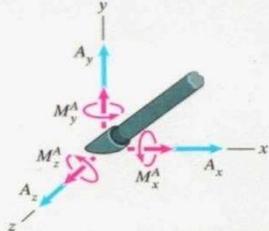


<p>(4)</p> <p>rodillo o pasador confinado en una ranura lisa</p>	<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la ranura.</p>
<p>(5)</p> <p>mecedora</p>	<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(6)</p> <p>superficie de contacto lisa</p>	<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(7)</p> <p>miembro conectado mediante un pasador a un collar sobre una barra lisa</p>	<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.</p>

3 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas espaciales de fuerzas



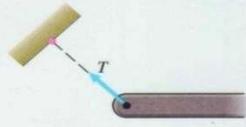
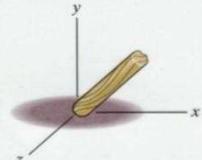
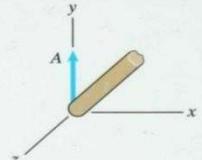
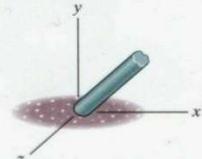
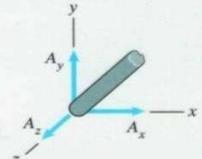
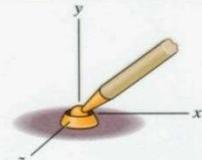
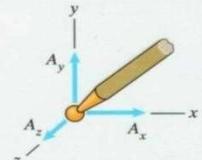
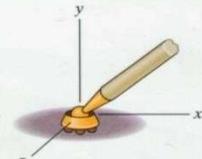
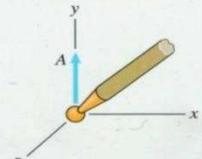
3D

Supports	Reactions
 <p>Hinge (The z axis is parallel to the hinge axis.)</p>  <p>Bearing (The z axis is parallel to the axis of the supported shaft.)</p>	 <p>Three Force Components, Two Couple Components</p>  <p>(When no couples are exerted)</p>  <p>(When no couples and no axial force are exerted)</p>
 <p>Built-in (Fixed) Support</p>	 <p>Three Force Components, Three Couple Components</p>

3 D: soportes para cuerpos sometidos a sistemas espaciales de fuerzas



3D

Supports	Reactions
 <p>Rope or Cable</p>	 <p>One Colinear Force</p>
 <p>Contact with a Smooth Surface</p>	 <p>One Normal Force</p>
 <p>Contact with a Rough Surface</p>	 <p>Three Force Components</p>
 <p>Ball and Socket Support</p>	 <p>Three Force Components</p>
 <p>Roller Support</p>	 <p>One Normal Force</p>

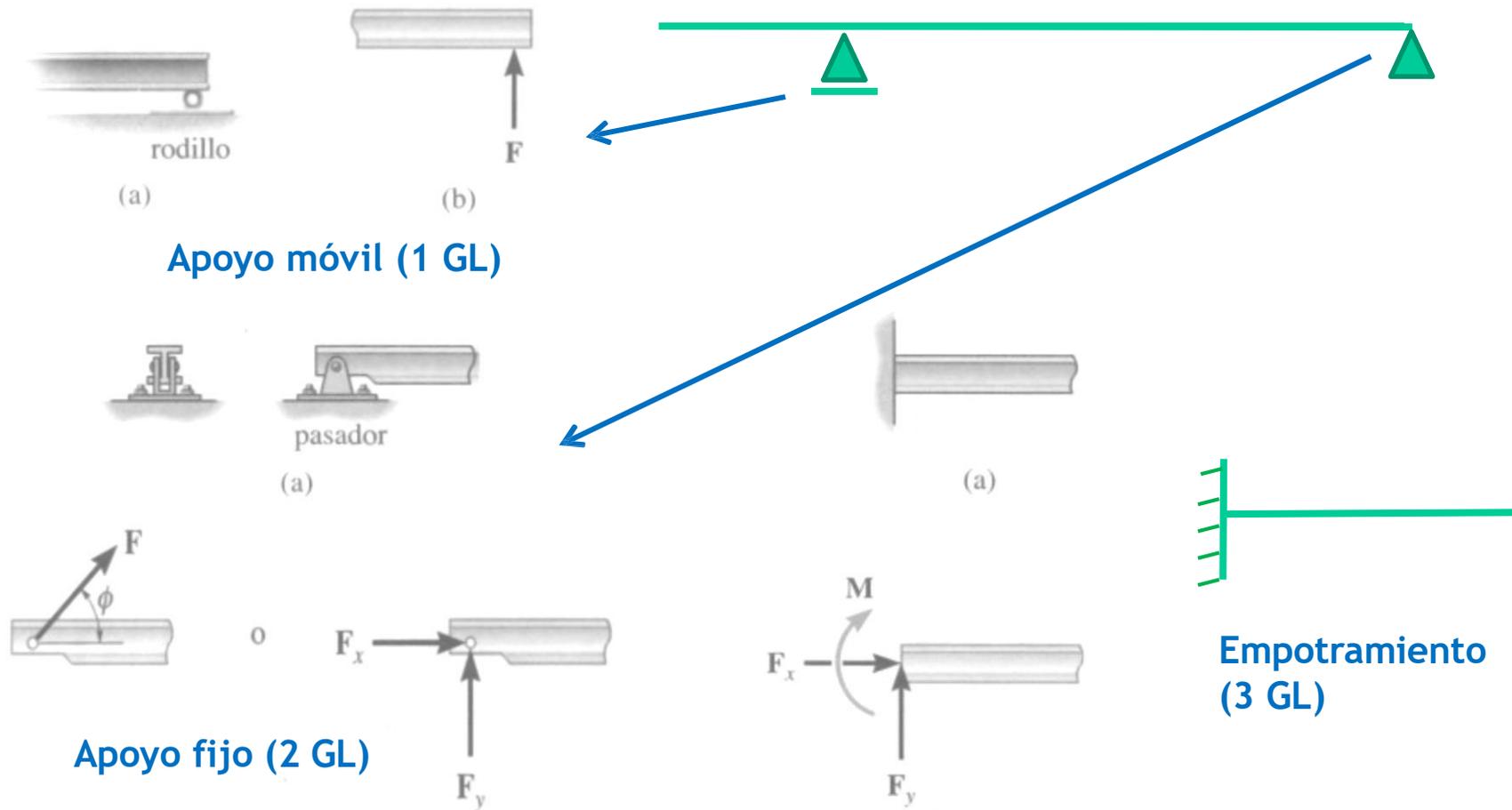


Modelización

Modelización

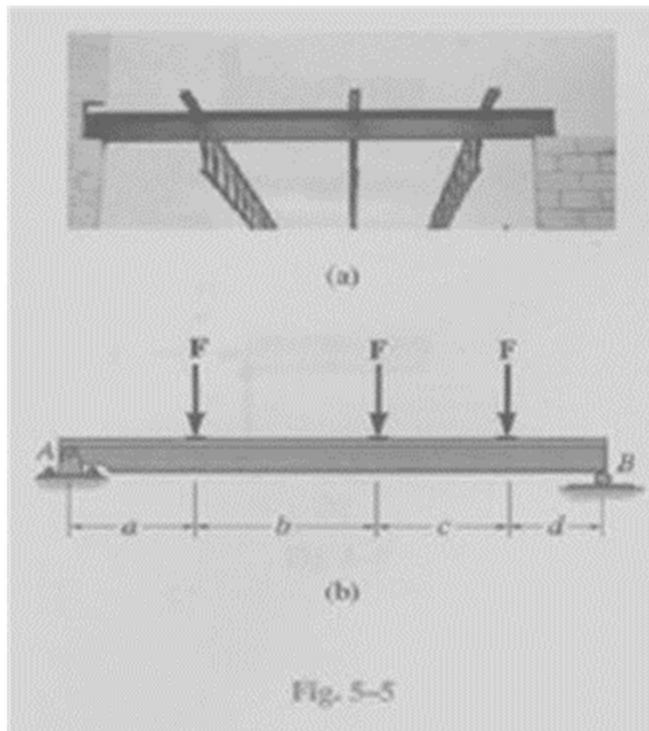


Vínculos (en sistemas planos)



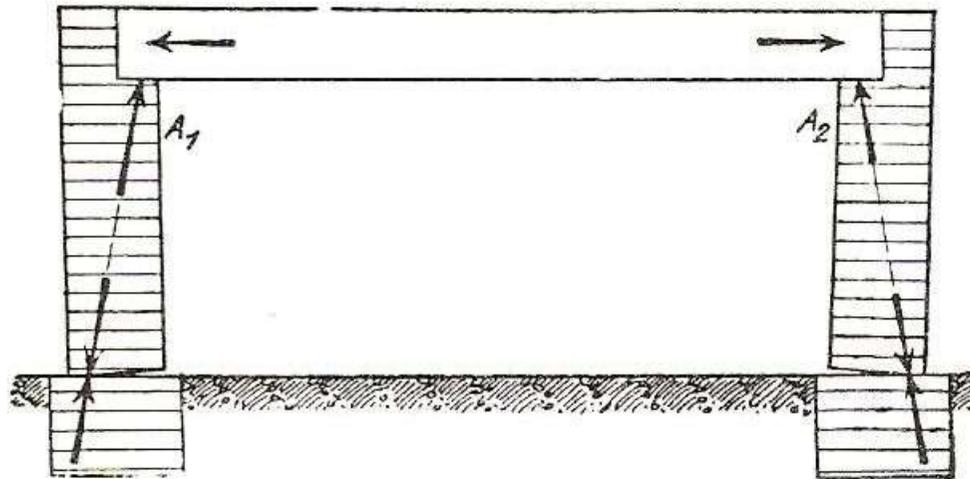


Modelización



Para ilustrar qué se requiere para desarrollar un modelo apropiado, consideraremos ahora algunos casos. Como se ve en la figura 5-5a, la viga de acero va a ser usada para soportar los largueros del techo de un edificio. En un análisis de fuerza, es razonable suponer que el material es rígido ya que sólo ocurrirán muy pequeñas deflexiones cuando la viga sea cargada. Una conexión con pernos en A permitirá cualquier ligera rotación que ocurra cuando la carga se aplique, por lo que para este soporte puede ser considerado un *pasador*. En B puede considerarse un *rodillo* ya que ahí el soporte no ofrece resistencia al movimiento horizontal. Los requisitos del código de construcción se tienen en cuenta para especificar la carga de techo que resulta en el cálculo de las cargas F de los largueros. Estas fuerzas serán mayores que cualquier carga real sobre la viga ya que toman en cuenta los casos extremos de carga y los efectos dinámicos o de vibración. El peso de la viga generalmente se ignora cuando es pequeño comparado con la carga que la viga soporta. El modelo idealizado de la viga se muestra con dimensiones promedio a , b , c y d en la figura 5-5b.

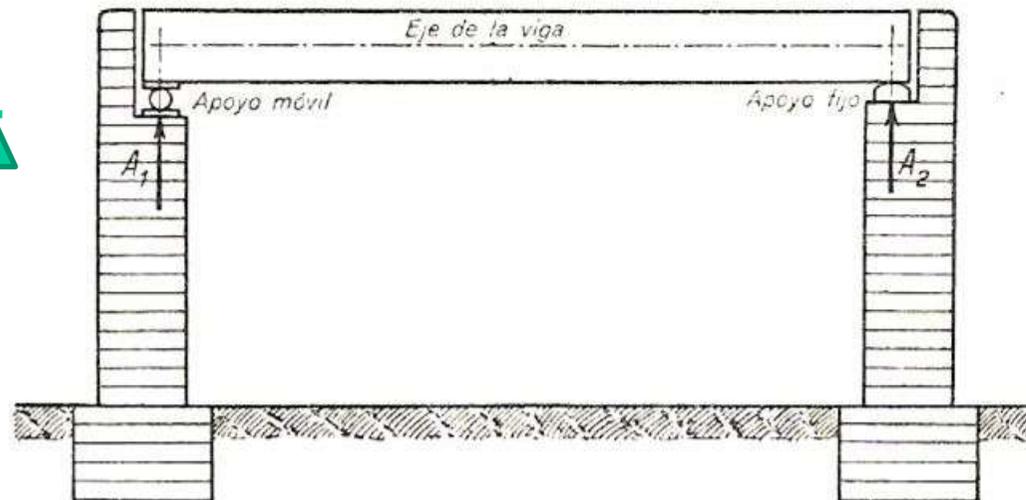
Modelización: viga puente



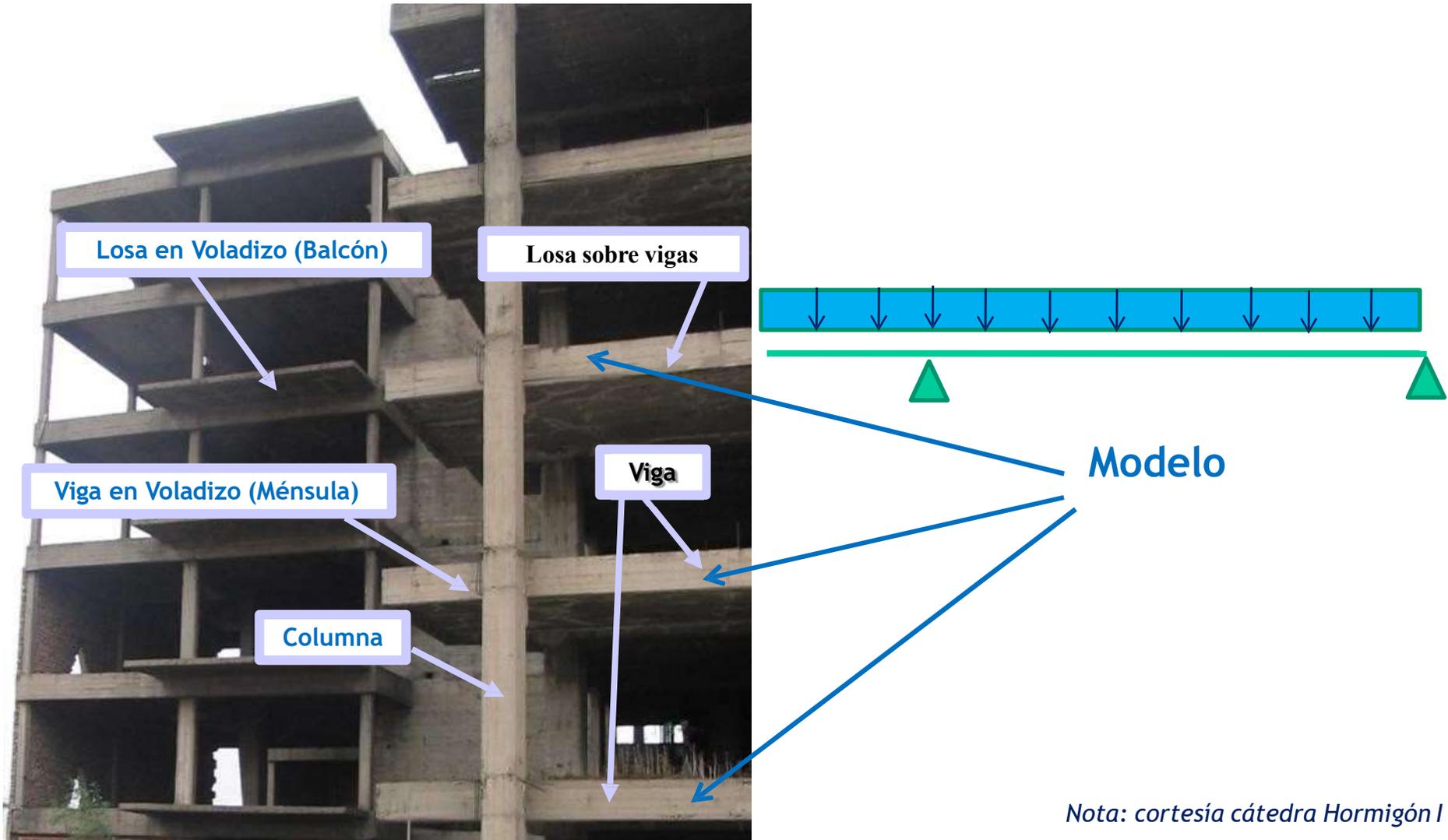
Dilatación de una viga a causa del calor, y grietas que aparecen en los muros



Viga con sustentación fija y móvil



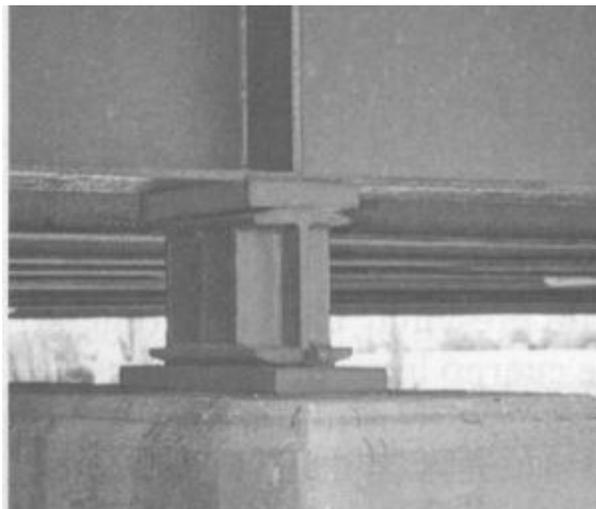
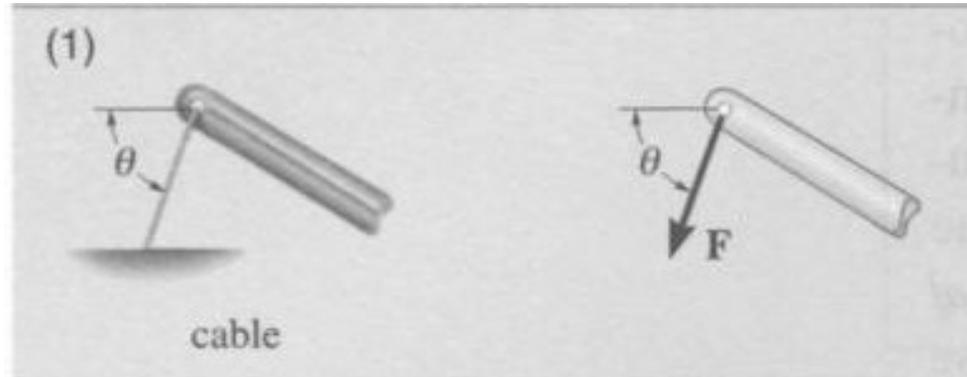
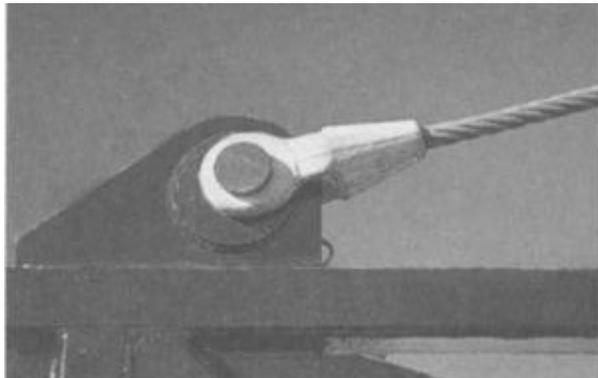
Modelización



Nota: cortesía cátedra Hormigón I



Modelización





Análisis estructural:

Resolución de sistemas vinculados

1. Análisis cinemático

Según la vinculación, los sistemas se clasifican como:

- Isostáticos : $GL=V$
- Hiperestáticos : $GL < V$
- Hipostáticos : $GL > V$

Dónde:

- GL: Grados libertad
- V : número de Vínculos



Análisis estructural:

Resolución de sistemas vinculados

1. Análisis cinemático

- Verificar que el sistema es isostático
- Verificar que no hay vinculación aparente

Si se verifican estos 2 ítems  SISTEMA
CINEMÁTICAMENTE ESTABLE



Análisis estructural:

Resolución de sistemas vinculados

2. Análisis Estático

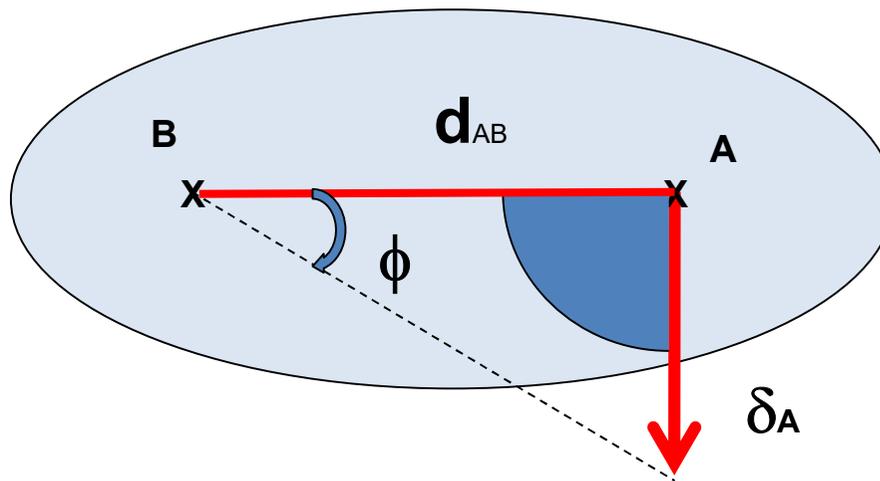
- Diagrama de cuerpo libre.
- Resolución ecuaciones de equilibrio
- Verificar resultados

De las reacciones de vínculo conocemos punto de aplicación y dirección, pero no conocemos módulo ni sentido.

Vínculos aparentes



Repasemos: movimiento de un punto A de un cuerpo rígido en torno a un punto fijo B

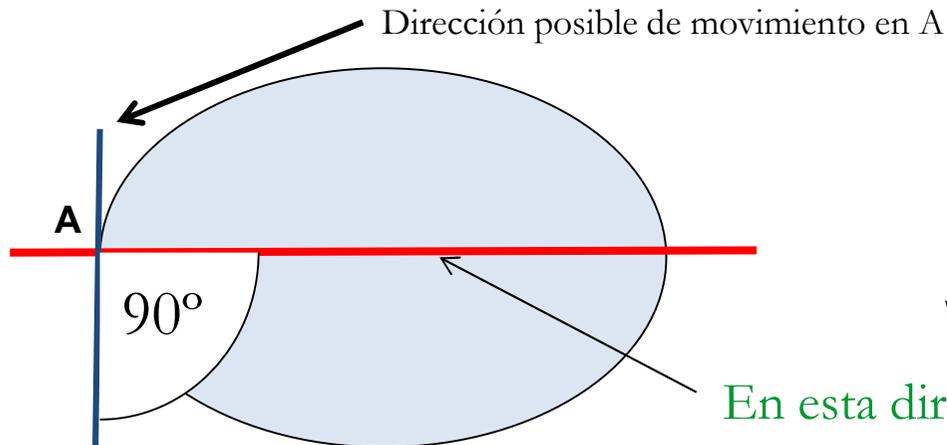


$$\delta_A = \phi \cdot d_{AB}$$

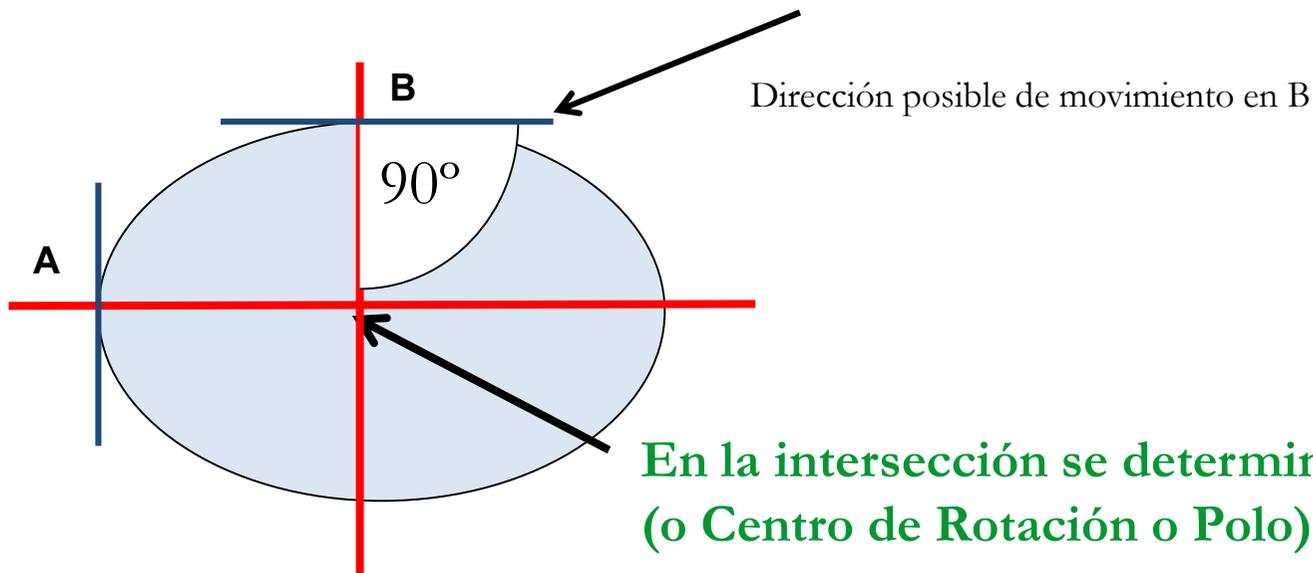


La intersección de las direcciones de 2 apoyos móviles constituyen un punto fijo.

Vínculos aparentes



La intersección de las direcciones de 2 apoyos móviles constituyen un punto fijo.

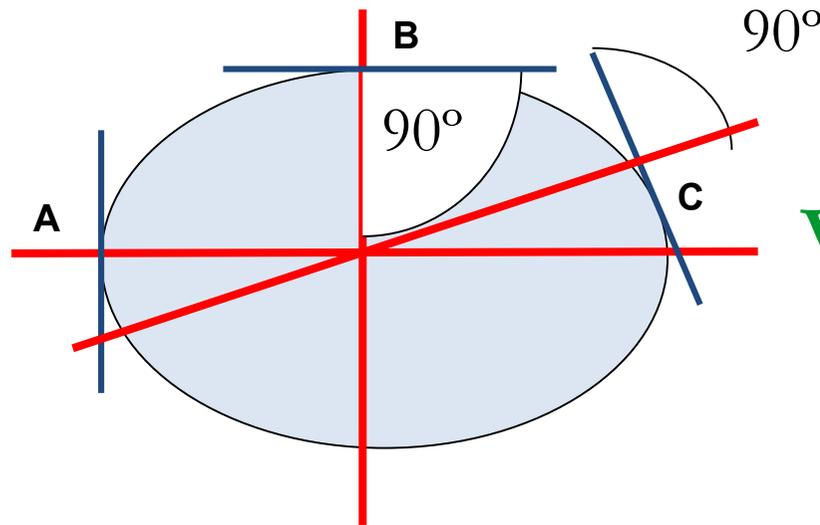




Vínculos aparentes

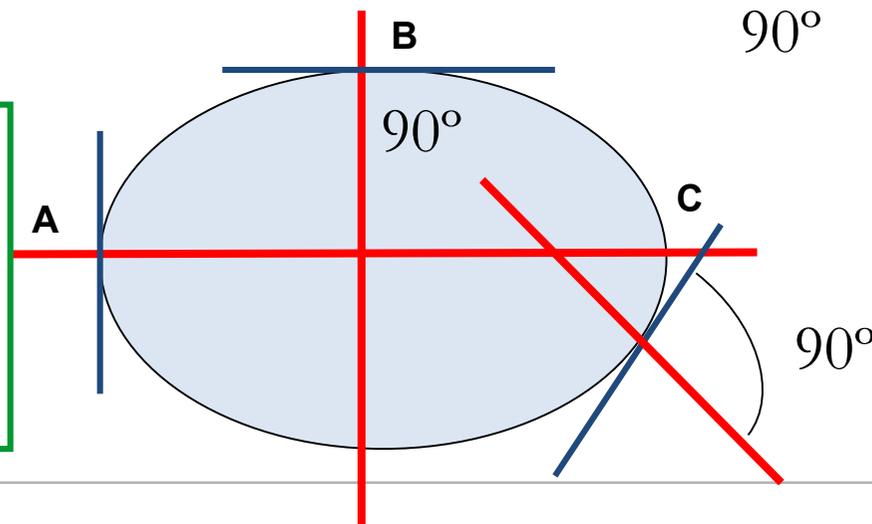
Dirección posible de movimiento en A

La intersección de las direcciones de 2 apoyos móviles constituyen un punto fijo.



VINCULACIÓN APARENTE

NO HAY VINCULACIÓN APARENTE: las normales a las direcciones de los posibles movimientos no se cortan en el mismo punto

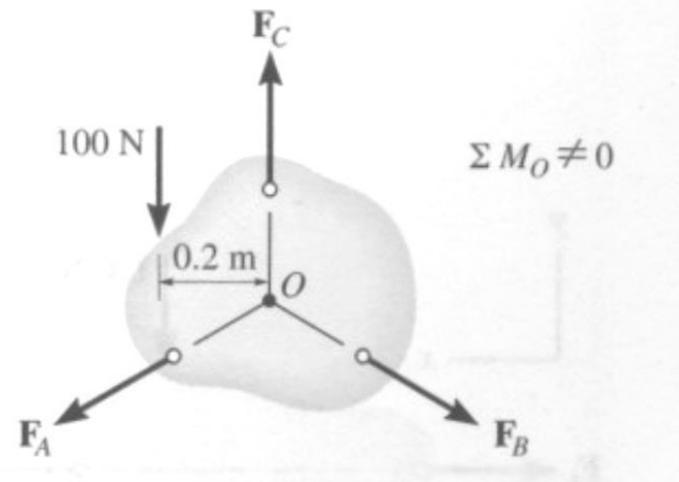
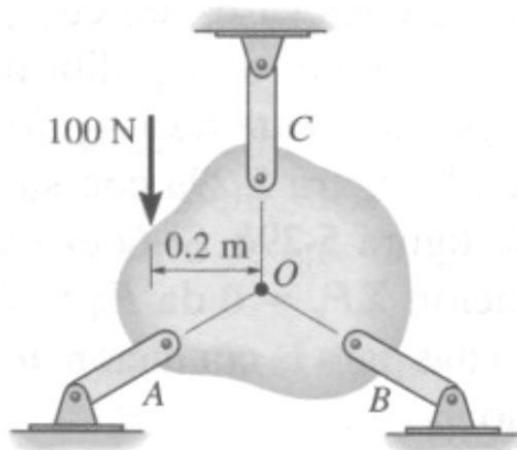


Vínculos aparentes



1. Vínculo aparente en sistemas planos

- Las reacciones de los vínculos móviles son concurrentes a un punto

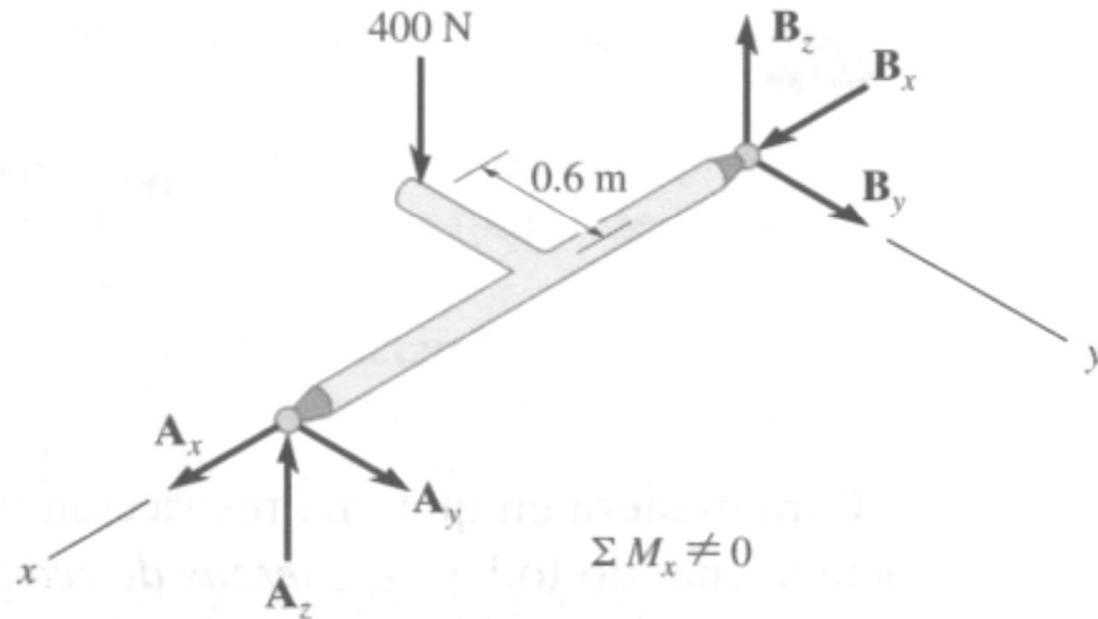
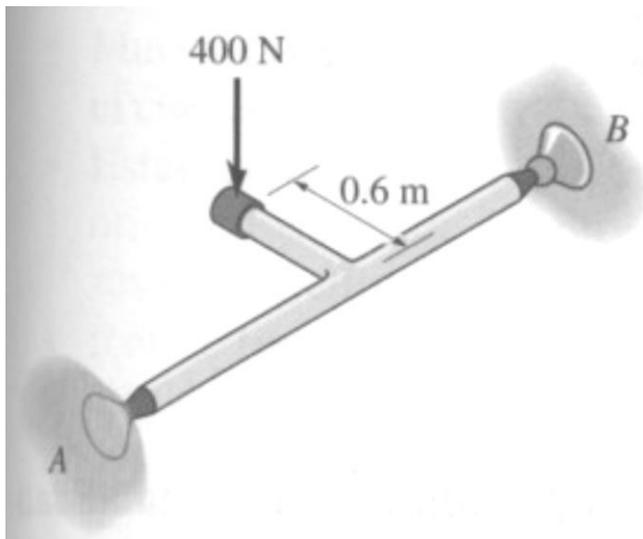


Vínculos aparentes



2. Vínculo aparente en sistemas tridimensionales

- Las reacciones de los vínculos móviles intersecan un eje común

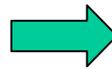




Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas planos

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{0}$$



$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

$$\bar{M}_R^O = \sum_i \bar{M}_{F_i}^O = \bar{0}$$



$$\sum_i M_{z,i}^O = 0$$

(2 ecuaciones vectoriales)

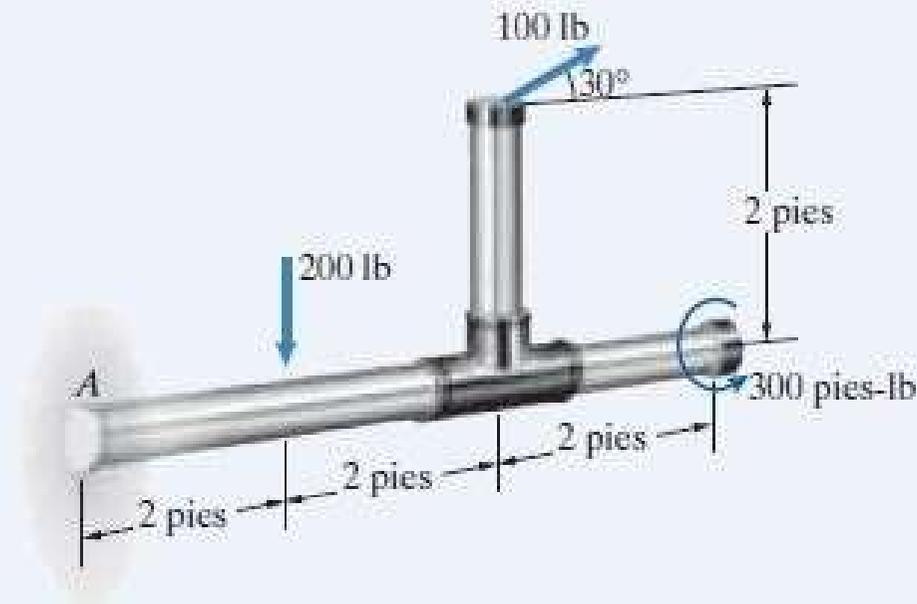
(3 ecuaciones escalares)



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas planos

El objeto de la figura tiene un soporte fijo en A y está sometido a dos fuerzas y un par. ¿Qué valor tienen las reacciones en el soporte?



Ref: Cap 5 Bedford Fowler



Equilibrio de un cuerpo rígido

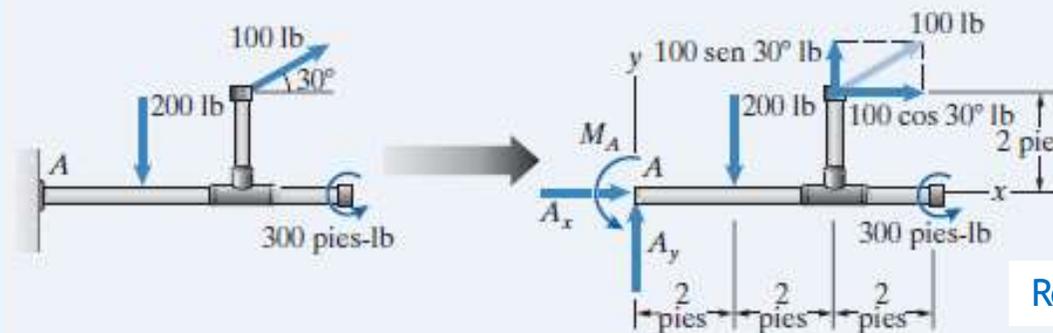
Sistemas planos

Estrategia

Se obtendrá un diagrama de cuerpo libre aislando el objeto del soporte fijo en A y mostrando las reacciones ejercidas en dicho punto, *se incluirá el par que puede ser ejercido por un soporte fijo*. Luego pueden determinarse las reacciones desconocidas al aplicar las ecuaciones de equilibrio.

Solución

Dibujo del diagrama de cuerpo libre. Se aísla el cuerpo de su soporte y se muestran las reacciones en el soporte fijo (figura a). Hay tres reacciones desconocidas: dos componentes de fuerza A_x y A_y y un par M_A (recuerde que las direcciones de esas flechas pueden escogerse de manera arbitraria). También se puede descomponer la fuerza de 100 lb en sus componentes.



Ref: Cap 5 Bedford Fowler



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas planos

Ejemplo 5.4

Análisis de un portaequipaje (► Relacionado con los problemas 5.65–5.68)

En la figura se muestran un portaequipaje mantenido en equilibrio en posición inclinada y su diagrama de cuerpo libre. Si el portaequipaje soporta un peso $W = 50$ lb, $\alpha = 30^\circ$, $a = 8$ pulg, $b = 16$ pulg y $d = 48$ pulg, ¿qué fuerza F debe ejercer el usuario?

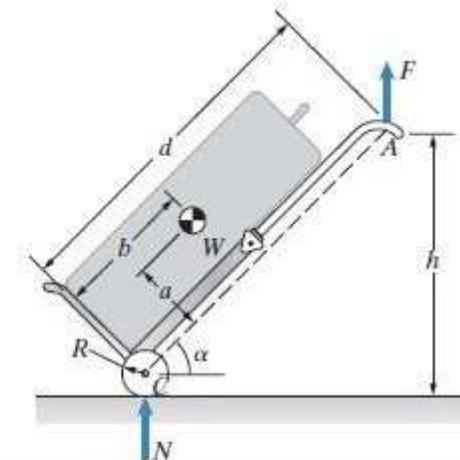
Estrategia

Las reacciones desconocidas en el diagrama de cuerpo libre son la fuerza F y la fuerza normal N ejercida por el piso. Sumando momentos respecto al centro de la rueda C , se obtiene una ecuación donde F es la única reacción desconocida.



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas planos



Solución

Sumando momentos respecto a C,

$$\Sigma M_{(\text{punto } C)} = d(F \cos \alpha) + a(W \sin \alpha) - b(W \cos \alpha) = 0,$$

y despejando F , se obtiene

$$F = \frac{(b - a \tan \alpha)W}{d}.$$

Sustituyendo los valores de W , α , a , b y d , la solución es $F = 11.9 \text{ lb}$.

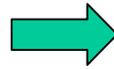
Ref: Cap 5 Bedford Fowler

Equilibrio de un cuerpo rígido



- Condiciones de equilibrio del cuerpo rígido
(equilibrio de fuerzas concentradas no concurrentes
=> sistema de fuerzas generalizado)

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{0}$$

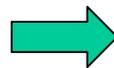


$$\sum_i F_{x,i} = 0$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0$$

$$\sum_i F_{z,i} = 0$$

$$\bar{M}_R^O = \sum_i \bar{M}_{F_i}^O = \bar{0}$$



$$\sum_i M_{x,i}^O = 0$$

$$\sum_i M_{y,i}^O = 0$$

$$\sum_i M_{z,i}^O = 0$$

(2 ecuaciones vectoriales)

(6 ecuaciones escalares)

- Diagrama de cuerpo libre



Equilibrio de un cuerpo rígido

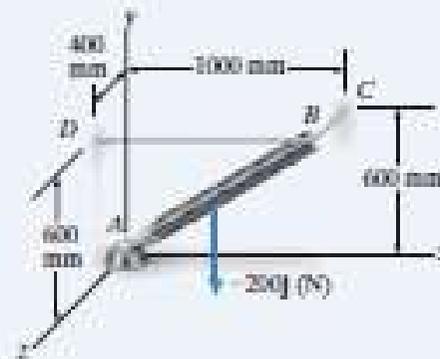
Sistemas espaciales (3D)

230 Capítulo 5 Objetos en equilibrio

Ejemplo activo 5.7

Determinación de las reacciones en tres dimensiones (► Relacionado con el problema 5.86)

La barra AB de la figura está soportada por los cables BC y BD y por un soporte de bola y cuenco en A . El cable BC es paralelo al eje z y el cable BD es paralelo al eje x . La fuerza de 200 N actúa en el punto medio de la barra. Determine el valor de las tensiones en los cables y las reacciones en A .



Ref: Cap 5 Bedford Fowler



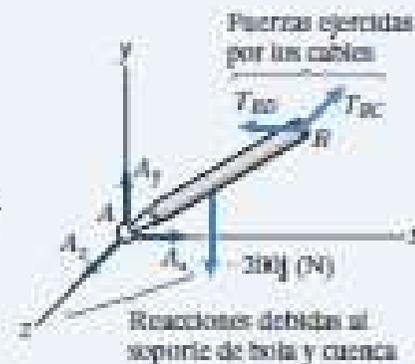
Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas espaciales (3D)

Solución

Dibujo del diagrama de cuerpo libre de la barra

Aísla la barra y muestra las reacciones ejercidas por los cables y el soporte de bola y cuenca.



Aplicación de las ecuaciones de equilibrio

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x &= A_x - T_{AB} = 0, \\ \Sigma F_y &= A_y - 200 \text{ N} = 0, \\ \Sigma F_z &= A_z - T_{BC} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Las sumas de las fuerzas en cada dirección coordenada son iguales a cero.

Ref: Cap 5 Bedford Fowler



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas espaciales (3D) 5.3 Aplicaciones tridimensionales 231

$$\Sigma \mathbf{M}_{\text{punto A}} = [\mathbf{r}_{AB} \times (-T_{BC}\mathbf{k})] + [\mathbf{r}_{AB} \times (-T_{BD}\mathbf{i})] + \left[\frac{1}{2} \mathbf{r}_{AB} \times (-200\mathbf{j}) \right]$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & -T_{BC} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0.6 & 0.4 \\ -T_{BD} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & -200 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-0.6T_{BC} + 40)\mathbf{i} + (T_{BC} - 0.4T_{BD})\mathbf{j} + (0.6T_{BD} - 100)\mathbf{k}$$

La suma de los momentos respecto a cualquier punto es igual a cero.

Las componentes de este vector (las sumas de los momentos respecto a los tres ejes coordenados) deben ser iguales a cero.

$$\Sigma M_x = -(0.6 \text{ m})T_{BC} + 40 \text{ N}\cdot\text{m} = 0,$$
$$\Sigma M_y = (1 \text{ m})T_{BC} - (0.4 \text{ m})T_{BD} = 0,$$
$$\Sigma M_z = (0.6 \text{ m})T_{BD} - 100 \text{ N}\cdot\text{m} = 0.$$

Al resolver las seis ecuaciones de equilibrio escalares se obtiene
 $A_x = 166.7 \text{ N}$, $A_y = 200 \text{ N}$, $A_z = 66.7 \text{ N}$, $T_{BC} = 66.7 \text{ N}$,
y $T_{BD} = 166.7 \text{ N}$.

Ref: Cap 5 Bedford Fowler

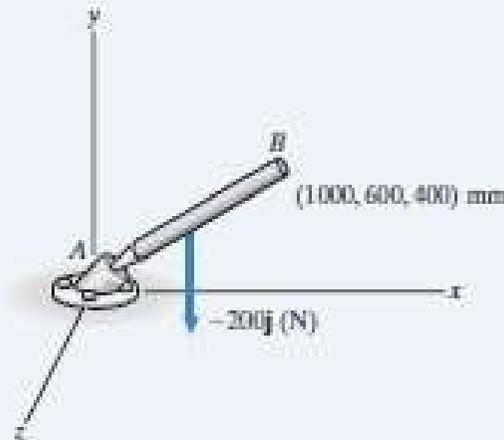


Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas espaciales (3D)

Empotramiento (6GL)

Problema de práctica Suponga que los cables BC y BD se remueven y que la unión de bola y cuenca en A se reemplaza por un soporte fijo. Determine las reacciones en A .



Respuesta: $A_x = 0$, $A_y = 200$ N, $A_z = 0$, $M_{Ax} = -40$ N-m, $M_{Ay} = 0$, $M_{Az} = 100$ N-m.

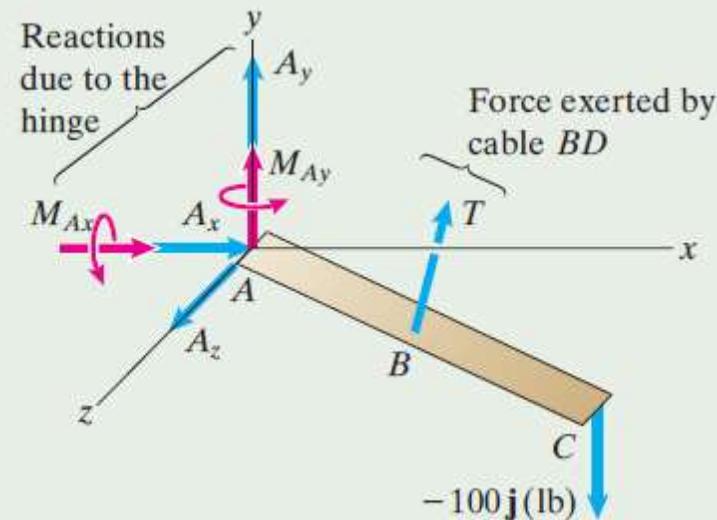
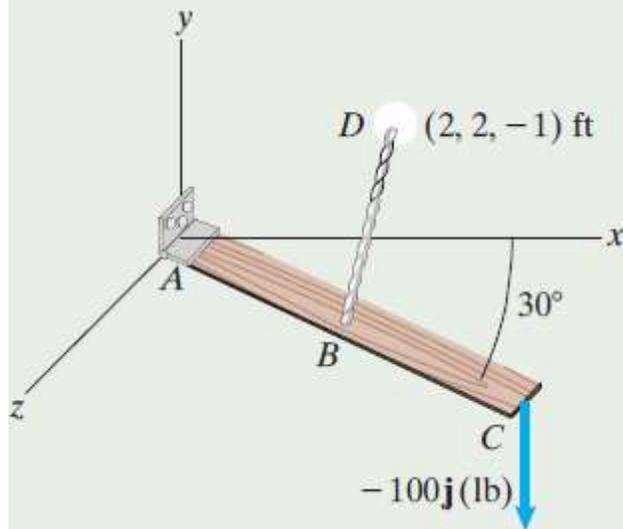
Ref.: Cap 5 Bedford Fowler



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas espaciales (3D)

The bar AC is 4 ft long and is supported by a hinge at A and the cable BD . The hinge axis is along the z axis. The centerline of the bar lies in the x - y plane, and the cable attachment point B is the midpoint of the bar. Determine the tension in the cable and the reactions exerted on the bar by the hinge.

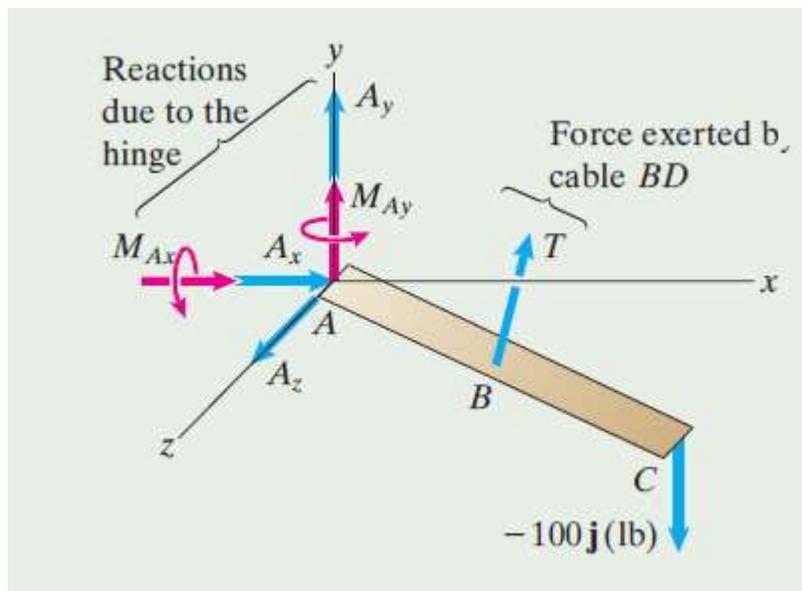


ap 5 Bedford Fowler



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas espaciales (3D)



$$\mathbf{r}_{BD} = (2 - 2 \cos 30^\circ)\mathbf{i} + [2 - (-2 \sin 30^\circ)]\mathbf{j} + (-1 - 0)\mathbf{k}$$
$$= 0.268\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k} \text{ (ft).}$$

$$\mathbf{e}_{BD} = \frac{\mathbf{r}_{BD}}{|\mathbf{r}_{BD}|} = 0.084\mathbf{i} + 0.945\mathbf{j} - 0.315\mathbf{k}.$$

$$T\mathbf{e}_{BD} = T(0.084\mathbf{i} + 0.945\mathbf{j} - 0.315\mathbf{k}).$$

$$\Sigma F_x = A_x + 0.084T = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + 0.945T - 100 \text{ lb} = 0,$$

$$\Sigma F_z = A_z - 0.315T = 0.$$

$$\mathbf{r}_{AB} = 2 \cos 30^\circ\mathbf{i} - 2 \sin 30^\circ\mathbf{j} \text{ (ft),}$$

$$\mathbf{r}_{AC} = 4 \cos 30^\circ\mathbf{i} - 4 \sin 30^\circ\mathbf{j} \text{ (ft).}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_{\text{point A}} = M_{Ax}\mathbf{i} + M_{Ay}\mathbf{j} + [\mathbf{r}_{AB} \times (T\mathbf{e}_{BD})] + [\mathbf{r}_{AC} \times (-100\mathbf{j})]$$

Ref: Cap 5 Bedford Fowler



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas espaciales (3D)

$$= M_{Ax}\mathbf{i} + M_{Ay}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1.732 & -1 & 0 \\ 0.084T & 0.945T & -0.315T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3.464 & -2 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (M_{Ax} + 0.315T)\mathbf{i} + (M_{Ay} + 0.546T)\mathbf{j}$$

$$+ (1.72T - 346)\mathbf{k} = 0.$$

$$\Sigma M_x = M_{Ax} + (0.315 \text{ ft})T = 0,$$

$$\Sigma M_y = M_{Ay} + (0.546 \text{ ft})T = 0, \quad T = 201 \text{ lb}, \quad M_{Ax} = -63.4 \text{ ft-lb}, \quad M_{Ay} = -109.8 \text{ ft-lb}.$$

$$\Sigma M_z = (1.72 \text{ ft})T_{BD} - 346 \text{ ft-lb} = 0.$$

$$A_x = -17.0 \text{ lb}, \quad A_y = -90.2 \text{ lb}, \quad A_z = 63.4 \text{ lb}.$$

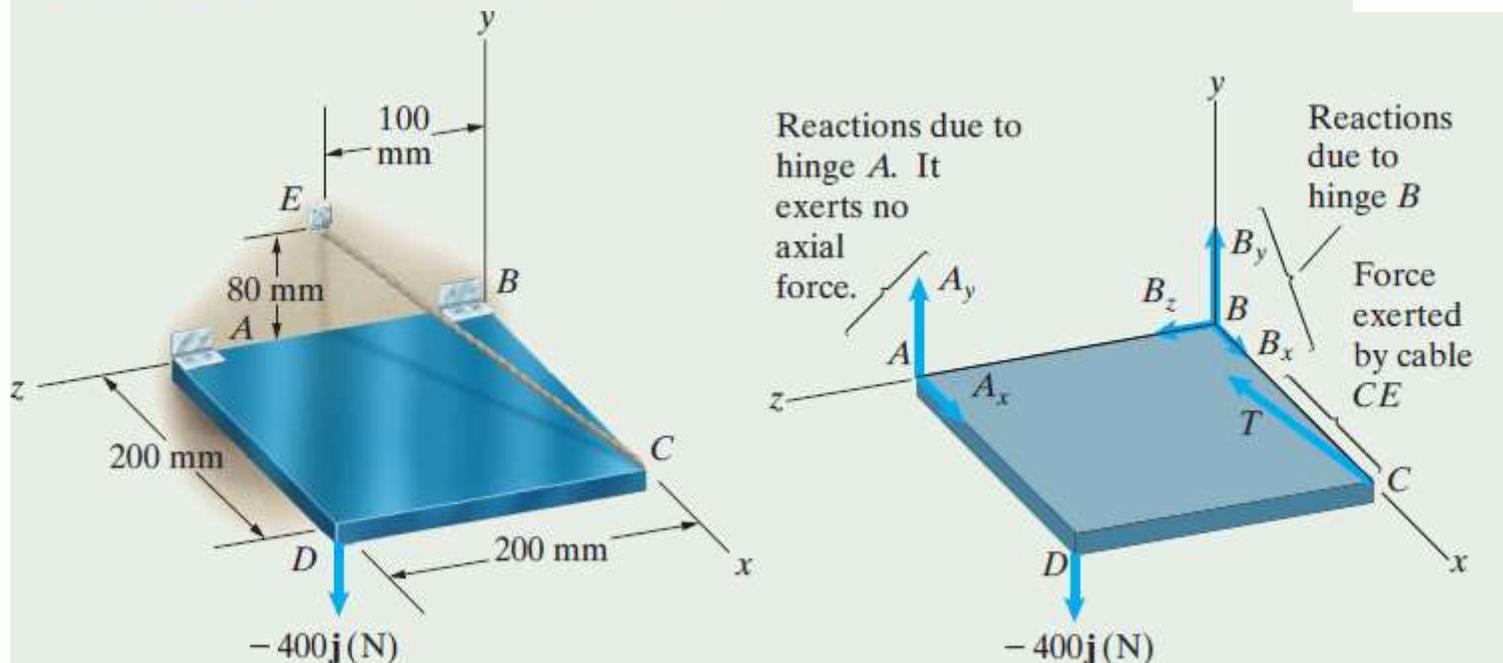
Ref: Cap 5 Bedford Fowler



Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas espaciales (3D)

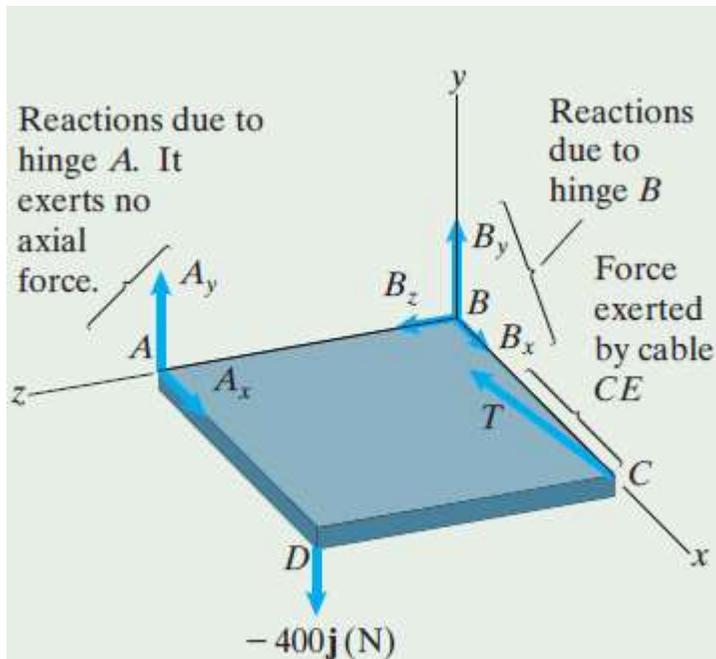
The plate is supported by hinges at A and B and the cable CE . The properly aligned hinges do not exert couples on the plate, and the hinge at A does not exert a force on the plate in the direction of the hinge axis. Determine the reactions at the hinges and the tension in the cable.





Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas espaciales (3D)



$$T(-0.842\mathbf{i} + 0.337\mathbf{j} + 0.421\mathbf{k}).$$

The sums of the forces in each coordinate direction equal zero:

$$\Sigma F_x = A_x + B_x - 0.842T = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + B_y + 0.337T - 400 = 0,$$

$$\Sigma F_z = B_z + 0.421T = 0.$$

$$\Sigma \mathbf{M}_{\text{point } B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.2 & 0 & 0 \\ -0.842T & 0.337T & 0.421T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0.2 \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & -400 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-0.2A_y + 80)\mathbf{i} + (-0.0842T + 0.2A_x)\mathbf{j}$$

$$+ (0.0674T - 80)\mathbf{k} = 0.$$

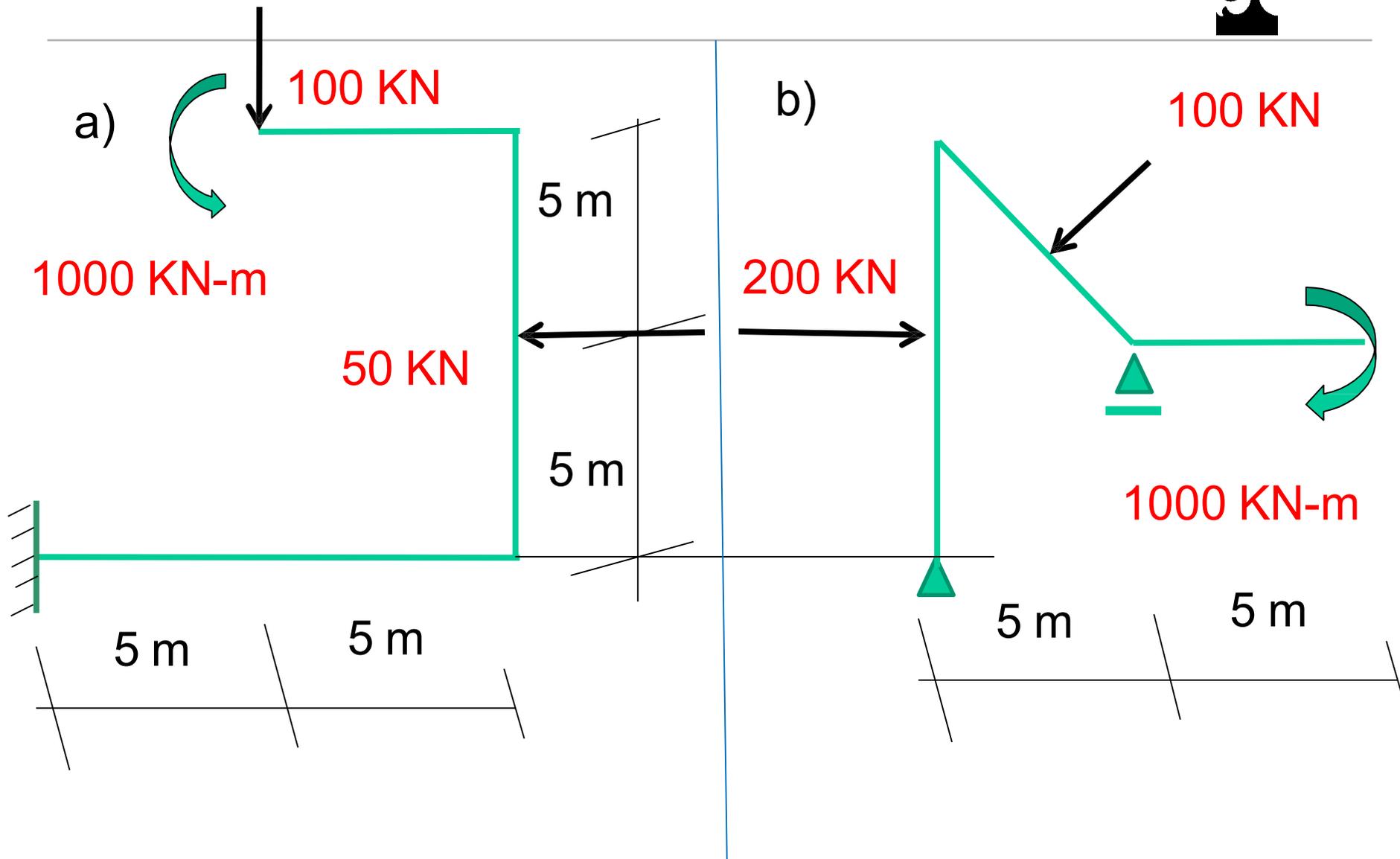
$$T = 1187 \text{ N}, \quad A_x = 500 \text{ N}, \quad A_y = 400 \text{ N}.$$

$$B_x = 500 \text{ N}, \quad B_y = -400 \text{ N}, \quad B_z = -500 \text{ N}.$$



Principio de superposición de efectos

**Sólo aplicable a sistema
lineales: proporcionalidad entre
causa y efecto**



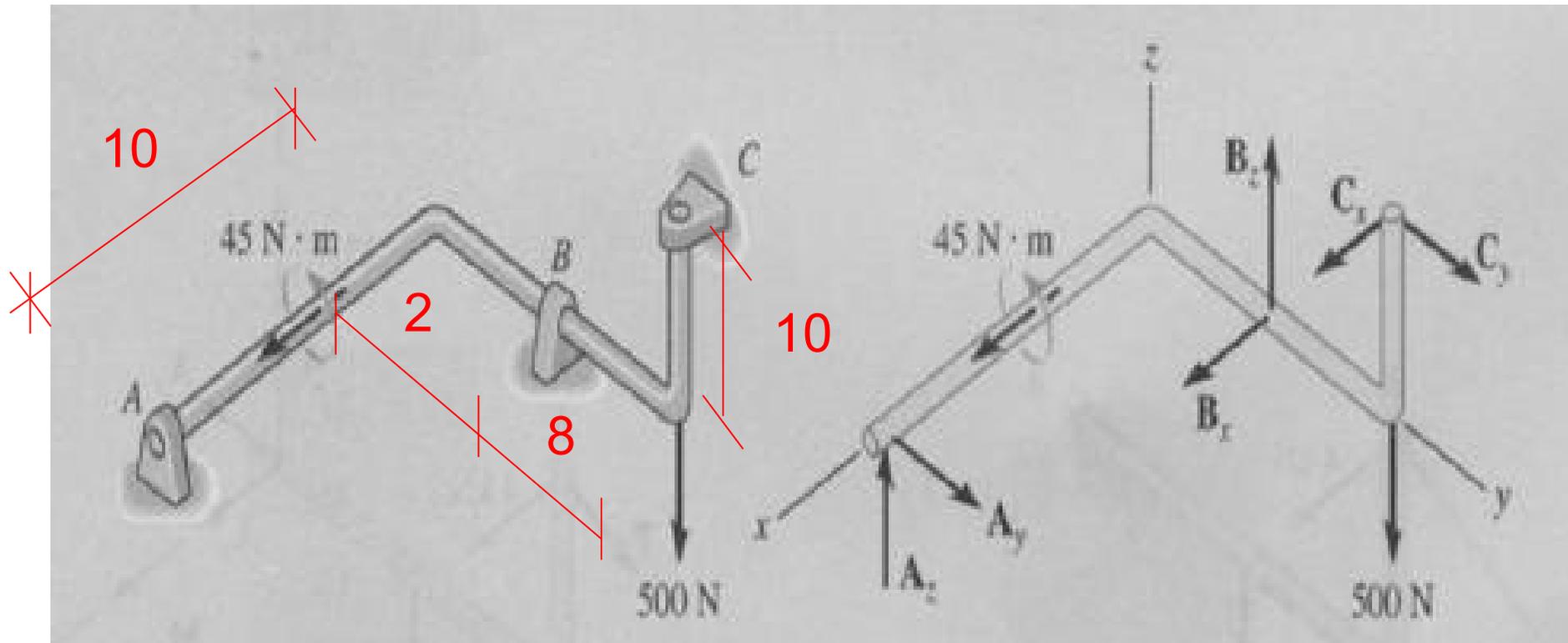


Diagrama cuerpo libre