Mecánica del Solido I-Estabilidad I
Clase 3

Fuerzas, Momento, Pares
Fuerzas No Concurrentes

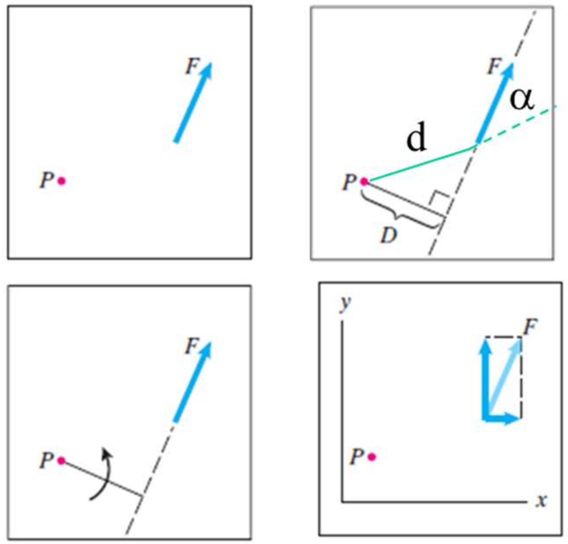
1. Momento de una fuerza respecto de un punto. Representación.
2. Par de fuerzas.
3. Teorema de Varignon.
4. Descomposición de una fuerza en una fuerza y un par.
5. Composición de una fuerza y un par.
6. Momento de una fuerza respecto de un eje
7. Reducción de un sistema de fuerzas generalizadas.

1. Momento de una fuerza respecto de un punto

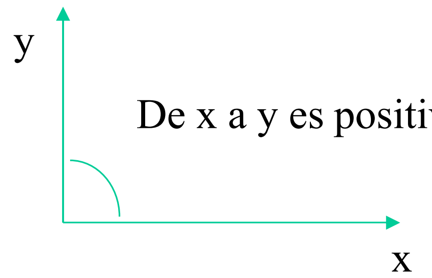
El momento de una fuerza respecto a un punto ó eje proporciona una medida de la tendencia de la fuerza a ocasionar que un cuerpo gire alrededor del punto ó eje. (ref: Russel C. Hibbeler)

1. *Momento de una fuerza respecto de un punto Plano*

- **$M_{O,F}$: momento de la fuerza F respecto punto O**
- **D:es la menor distancia desde el punto O a la línea de acción de la fuerza**
- **El <u>Vector</u> Momento resultante es perpendicular al plano formado por los vectores d y F**

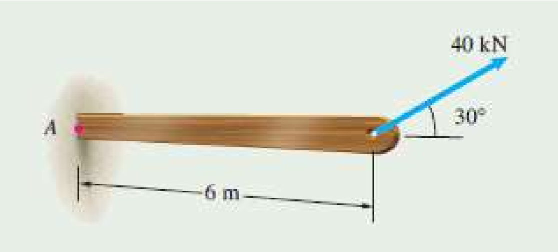


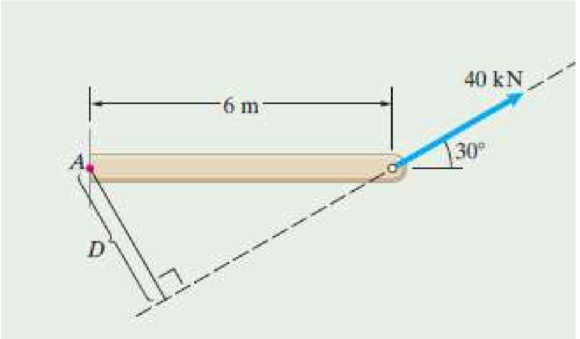
$$M_{O,F} = \mathbf{d \times F} = |d|\,|F| \text{ sen } \alpha = D.F$$

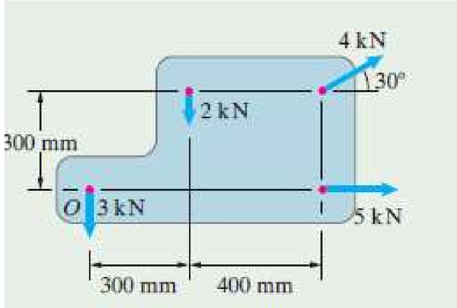


1. *Momento de una fuerza respecto de un punto*

Que valor tiene el momento de la fuerza de 40 kN respecto del punto A?





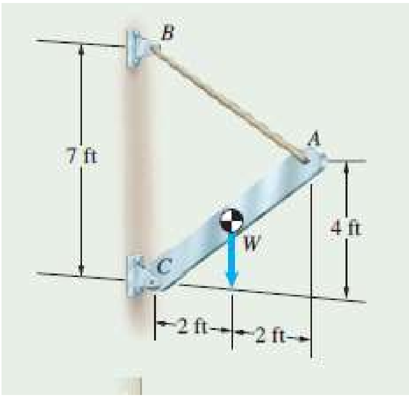


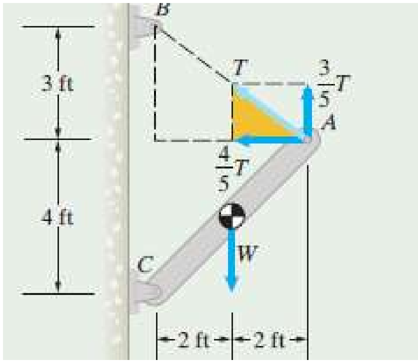
$$D = (6 \text{ m})\sin 30^\circ = 3 \text{ m.}$$

$$(3 \text{ m})(40 \text{ kN}) = 120 \text{ kN-m.}$$

1. *Momento de una fuerza respecto de un punto*

El peso de la barra es W=300 N, la suma de los momentos respecto de C del peso W y de la fuerza que ejerce el cable AB sobre la barra OA es igual a cero. Cual es la fuerza en el cable?

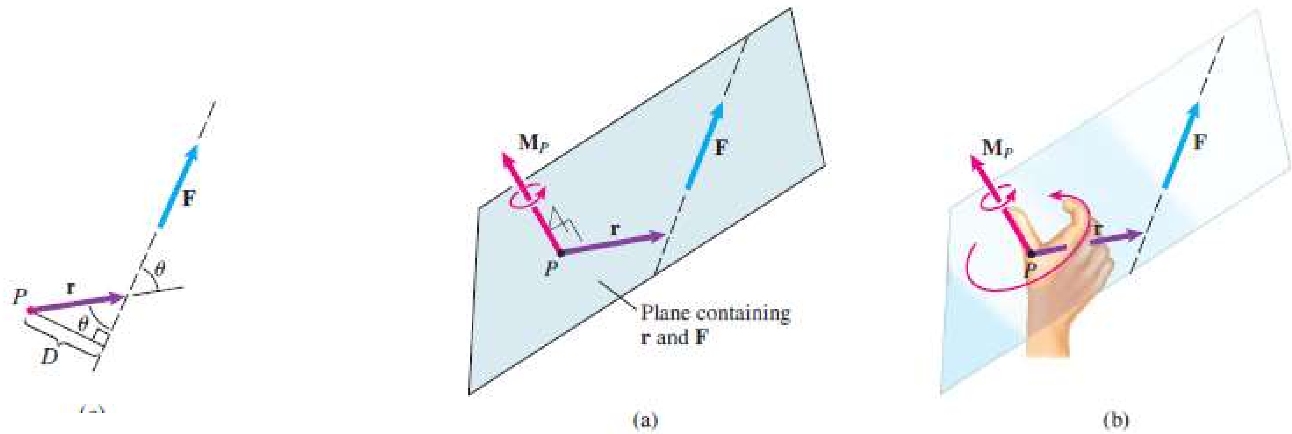




$$\Sigma M_C = 4\left(\frac{4}{5}T\right) + 4\left(\frac{3}{5}T\right) - 2W = 0.$$

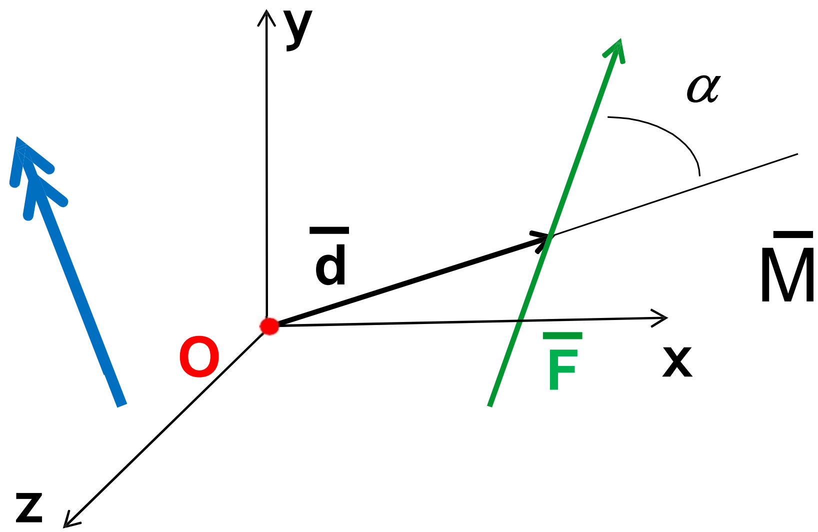
1. Momento de una fuerza respecto de un punto es el producto vectorial $M = r \times F$

El producto vectorial no es conmutativo, por definición siempre **M** = **r** x **F** y no al revés!!



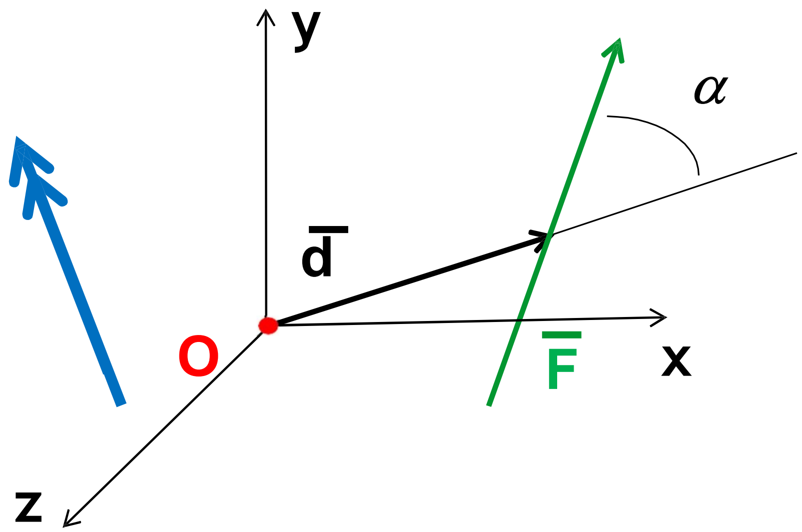
1. Momento de una fuerza respecto de un punto

- $M_{O,F}$: momento de la fuerza F respecto punto O
- d: distancia de un punto de la línea de acción de la fuerza al punto
- El <u>Vector</u> Momento resultante es perpendicular al plano formado por los vectores d y F



$$\overline{M}_{O,F} = \overline{d} \times \overline{F} = d\,F\,\text{sen}\,\alpha$$

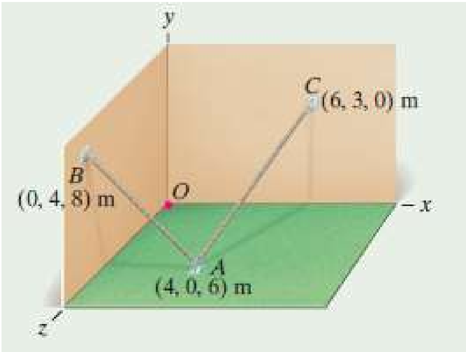
1. Momento de una fuerza respecto de un punto

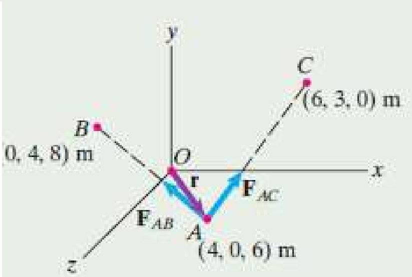


$$\overline{M}_F^O = \overline{d} \times \overline{F} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ dx & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = (F_z d_y - F_y d_z)\,\hat{i} + (F_x d_z - F_z d_x)\,\hat{j} + (F_y d_x - F_x d_y)\,\hat{k}$$

1. Momento de una fuerza respecto de un punto

Los cables AB y AC se extienden del punto A a los puntos B y C. La fuerza en el cable AB es 10 kN, y la del cable AC es de 20 kN. Que valor tiene la suma de los momentos de las fuerzas en los cables respecto de O.





$$\mathbf{r}_{AB} = (0-4)\mathbf{i} + (4-0)\mathbf{j} + (8-6)\mathbf{k} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\ (\text{m}),$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\ (\text{m})}{\sqrt{(-4\ \text{m})^2 + (4\ \text{m})^2 + (2\ \text{m})^2}} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{F}_{AB} = 10\mathbf{e}_{AB} = -6.67\mathbf{i} + 6.67\mathbf{j} + 3.33\mathbf{k}\ (\text{kN})$$

$$\mathbf{F}_{AC} = 5.71\mathbf{i} + 8.57\mathbf{j} - 17.14\mathbf{k}\ (\text{kN}).$$

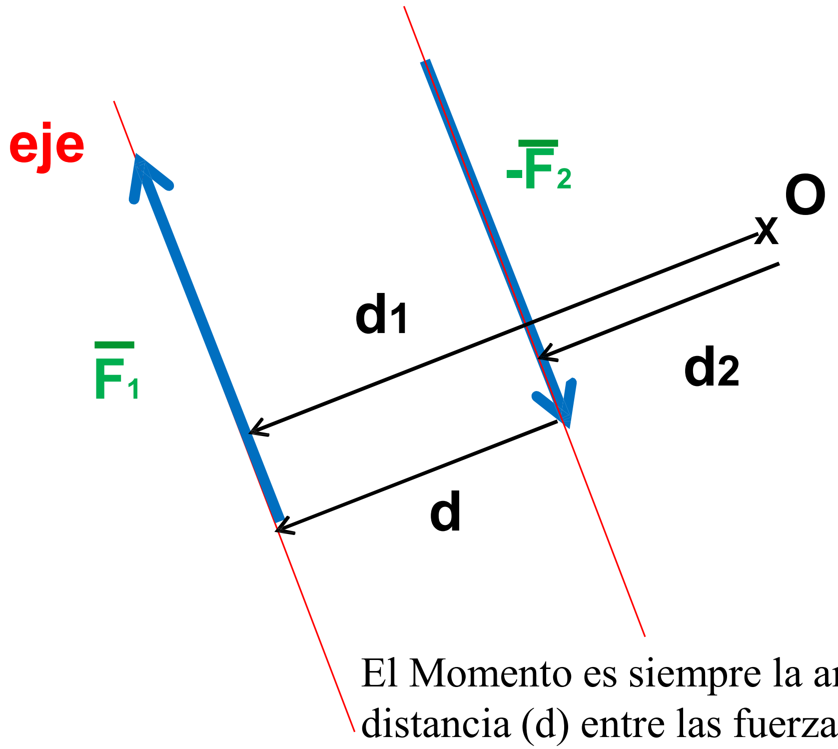
$$\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{k}\ (\text{m}).$$

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\mathbf{r}\times\mathbf{F}_{AB}) + (\mathbf{r}\times\mathbf{F}_{AC})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 6 \\ -6.67 & 6.67 & 3.33 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 6 \\ 5.71 & 8.57 & -17.14 \end{vmatrix}$$

$$= -91.4\mathbf{i} + 49.5\mathbf{j} + 61.0\mathbf{k}\ (\text{kN-m}).$$

2. Par de Fuerzas o Cupla



$$\overline{d}=\overline{d}_1-\overline{d}_2$$

$$\overline{F}_1=-\overline{F}_2=\overline{F}$$

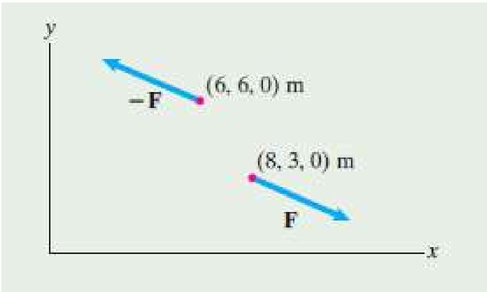
$$\overline{M}_{O,F} = (\overline{d}_1-\overline{d}_2)\times\overline{F}$$

$$\overline{M}_{O,F} = \overline{d}\times\overline{F}$$

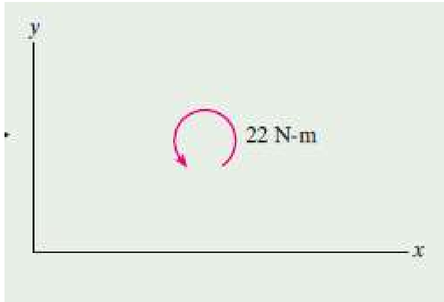
El Momento es siempre la amplitud de la Fuerza por la menor distancia (d) entre las fuerzas. Y signo según la regla de la mano derecha

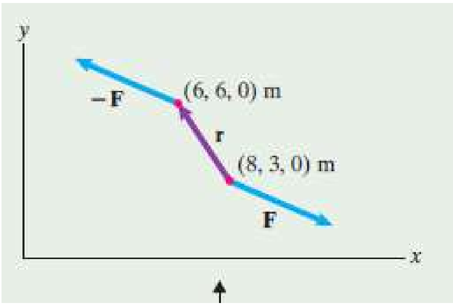
2. Par de Fuerzas o Cupla.

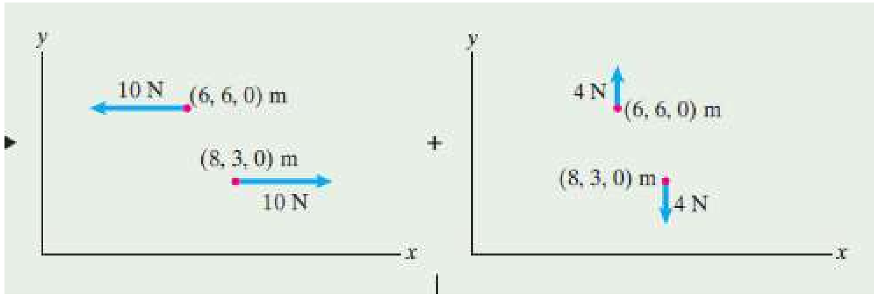
La fuerza F vale 10 i – 4 j (N). Determine el momento del par y represéntelo graficamente



$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{r} \times (-\mathbf{F}) \\ &= (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \times (-10\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \\ &= 22\mathbf{k}\ (\text{N-m}).\end{aligned}$$

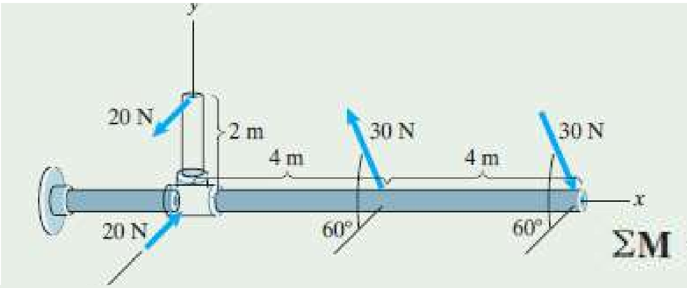






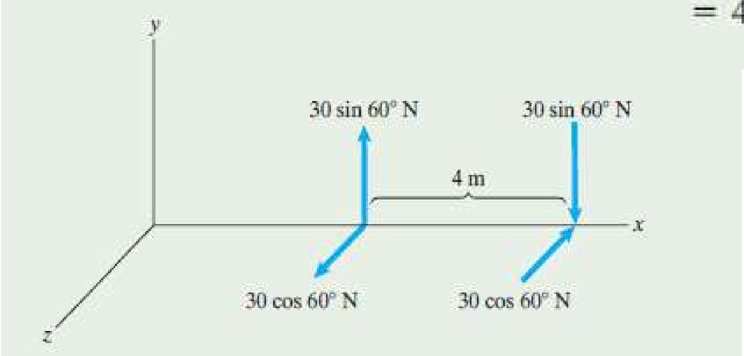
2. Par de fuerzas ó cupla. Ejercicio

Determine la suma de los momentos ejercido por los dos pares sobre el tubo



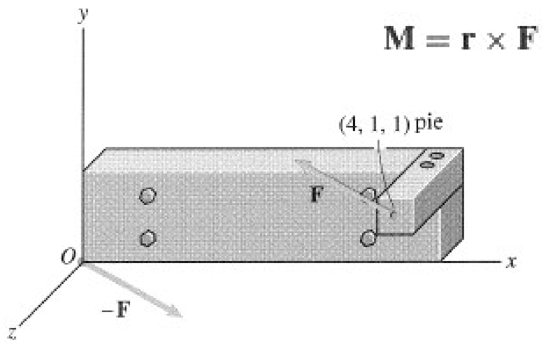
$$\Sigma \mathbf{M} = 40\mathbf{i} + (30\cos 60°)(4)\,\mathbf{j} - (30\sin 60°)(4)\,\mathbf{k}\ (\text{N-m})$$

$$= 40\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 104\mathbf{k}\ (\text{N-m}).$$



2. Par de fuerzas ó cupla. Ejercicio

La Fuerza F es -20 i +20j + 10k. a) Que momento ejerce el par sobre la mensula? b) Que Valor tiene la distancia D perpendicular a las líneas de acción de las fuerzas?



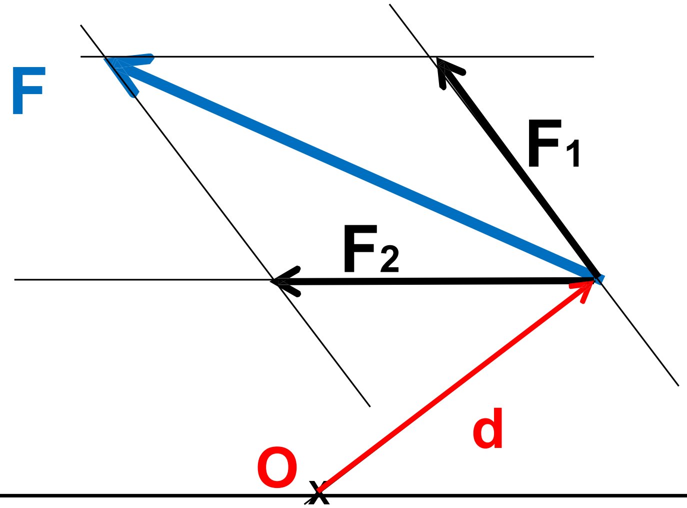
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ -20 & 20 & 10 \end{vmatrix} = -10\,\mathbf{i} - 60\,\mathbf{j} + 100\,\mathbf{k}\ \text{(lb-pie)}.$$

$$D = \frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{F}|} = \frac{\sqrt{(-10)^2 + (-60)^2 + (100)^2}}{\sqrt{(-20)^2 + (20)^2 + (10)^2}} = 3.90\ \text{pie}.$$

3. Teorema de Varignon (o principio de momentos

El momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza respecto al punto.

(Varignon: 1654-1722; ref: Russel C. Hibbeler)



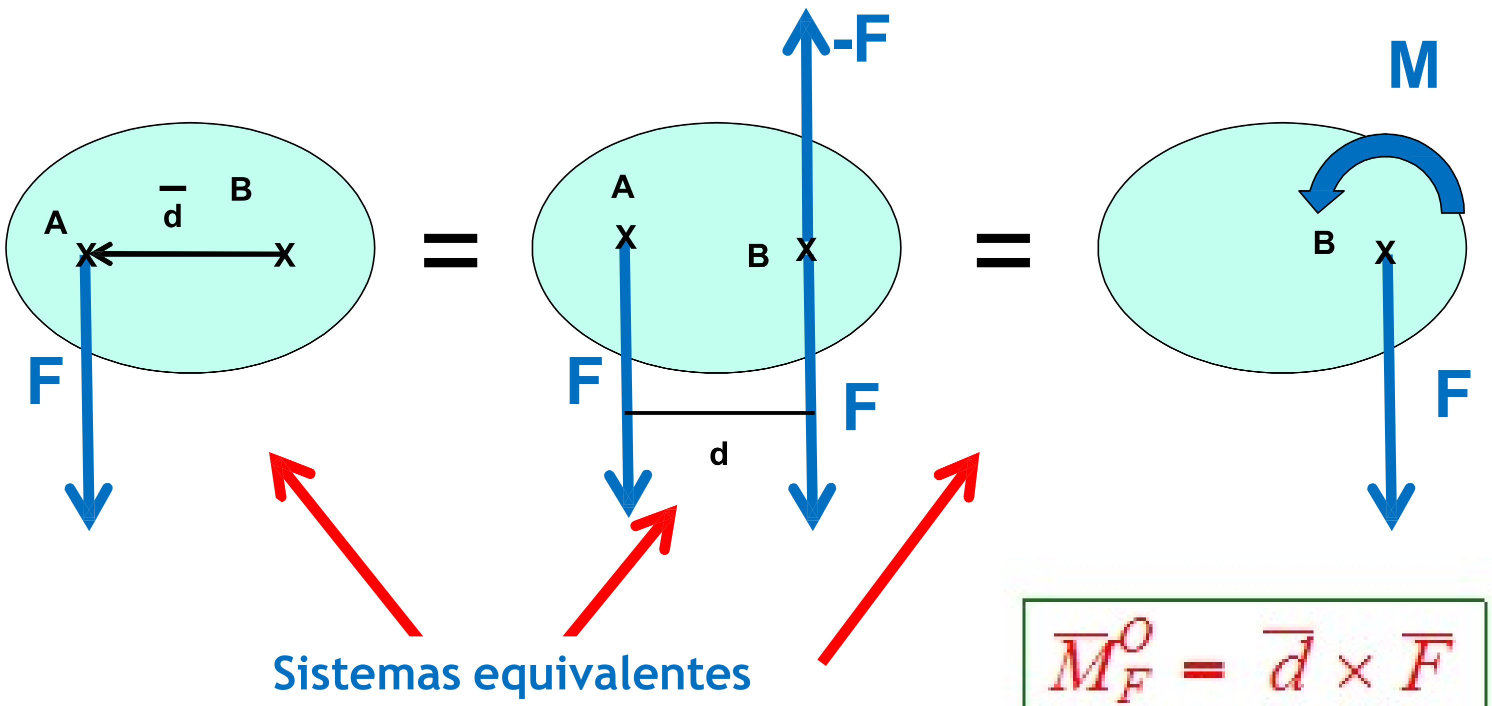
$$\bar{M}_{O,F} = \bar{d} \times \bar{F}_1 + \bar{d} \times \bar{F}_2$$

$$\bar{M}_{O,F} = \bar{d} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2)$$

$$\bar{M}_{O,F} = \bar{d} \times \bar{F}$$

Aplicación, por ejemplo, para obtener resultante de un sistema de fuerzas paralelas

4. Descomposición de una fuerza en una fuerza y un par



$$\overline{M}_F^O = \overline{d} \times \overline{F}$$

4.1 Sistema de Fuerzas Equivalentes

Un sistema de fuerzas y momentos es un conjunto particular de fuerzas y pares. Si solo nos interesa la fuerza total y el momento ejercido sobre un cuerpo, un sistema De fuerzas y momentos se puede reemplazar por uno equivalente.
Dos sistemas 1 y 2 son equivalentes si las de las fuerzas son iguales

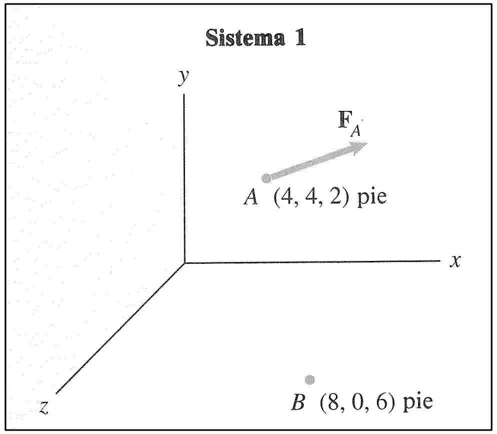
$$(\Sigma \mathbf{F})_1 = (\Sigma \mathbf{F})_2,$$

Y las suma de los momentos respecto a un punto arbitrario elegido también.

$$(\Sigma \mathbf{M}_P)_1 = (\Sigma \mathbf{M}_P)_2.$$

4.1 Sistema de Fuerzas Equivalentes

El sistema 1 de la figura 4.41 consiste en una fuerza $\mathbf{F}_A = 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ (lb) que actúa en A. Represéntelo con una fuerza que actúe en B y un par.



Las sumas de las fuerzas deben ser iguales

$$(\Sigma \mathbf{F})_2 = (\Sigma \mathbf{F})_1 :$$

$$\mathbf{F} \;=\; \mathbf{F}_A = 10\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k} \;\; \text{(lb)}$$

Las sumas de los momentos respecto a un punto arbitrario deben ser iguales El vector de B a A es

$$\mathbf{r}_{BA} = (4-8)\,\mathbf{i} + (4-0)\,\mathbf{j} + (2-6)\,\mathbf{k} = -4\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k} \;\; \text{(pie)},$$

por lo que el momento respecto a B en el sistema 1 es

$$\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 4 & -4 \\ 10 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 4\,\mathbf{i} - 52\,\mathbf{j} - 56\,\mathbf{k} \;\; \text{(lb-pie)}.$$

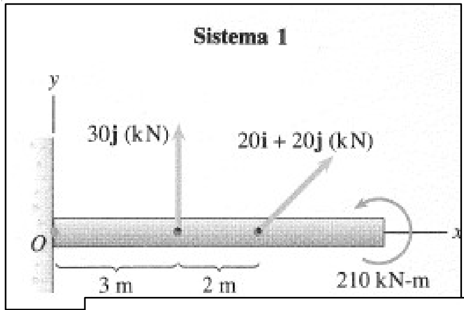
Las sumas de los momentos respecto a B deben ser iguales:

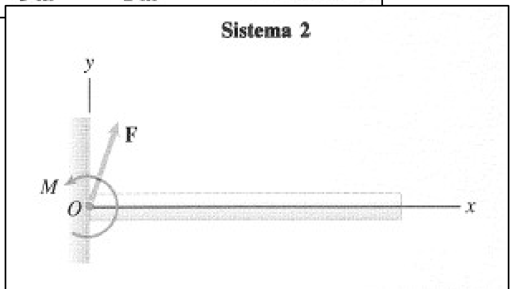
$$(\mathbf{M}_B)_2 = (\mathbf{M}_B)_1 :$$

$$\mathbf{M} \;= 4\,\mathbf{i} - 52\,\mathbf{j} - 56\,\mathbf{k} \;\; \text{(lb-pie)}.$$

4.1 Sistema de Fuerzas Equivalentes

El sistema 1 de la figura 4.42 consiste en dos fuerzas y un par que actúan sobre un tubo. Se trata de representar el sistema 1 mediante (a) una sola fuerza que actúe en el origen O del sistema coordenado y un solo par, y (b) una sola fuerza.





(a) Fuerza $\mathbf{F}$ que actúe en O y un par M.

(a) Las condiciones de equivalencia son

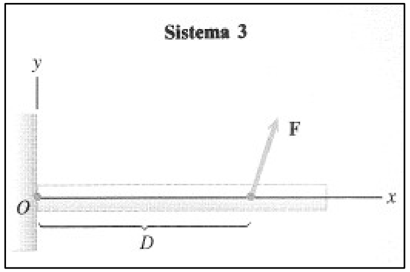
$$(\Sigma \mathbf{F})_2 = (\Sigma \mathbf{F})_1 :$$

$$\mathbf{F} = 30\mathbf{j} + (20\mathbf{i} + 20\mathbf{j}) = 20\mathbf{i} + 50\mathbf{j} \ \ (\text{kN}),$$

$$(\Sigma M_0)_2 = (\Sigma M_0)_1 :$$

$$M = (30 \text{ kN})(3 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(5 \text{ m}) + 210 \text{ kN-m}$$

$$= 400 \text{ kN-m}.$$



(b) Las sumas de las fuerzas de los sistemas 2 y 3 son iguales. Igualando las sumas de los momentos respecto a O,

$$(\Sigma M_0)_3 = (\Sigma M_0)_2 :$$

$$(50 \text{ kN}) D = 400 \text{ kN-m},$$

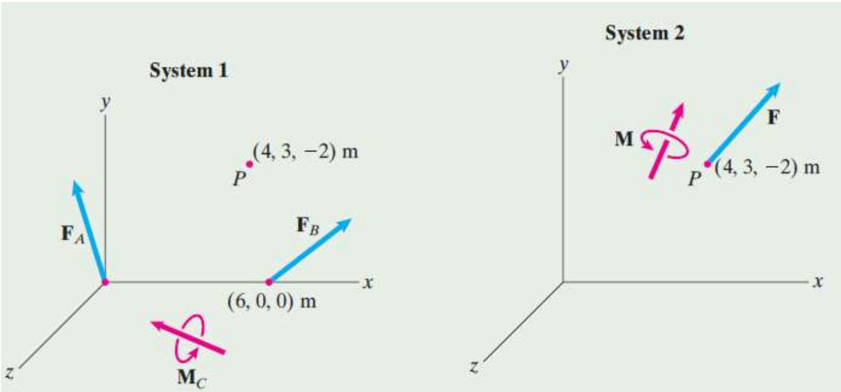
encontramos que el sistema 3 equivale al sistema 2 si $D = 8$ m.

4.1 Sistema de Fuerzas Equivalentes

System 1 consists of the following forces and couples:

$$\mathbf{F}_A = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 15\mathbf{k}\ (\text{kN}),$$
$$\mathbf{F}_B = 30\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\ (\text{kN}),$$
$$\mathbf{M}_C = -90\mathbf{i} + 150\mathbf{j} + 60\mathbf{k}\ (\text{kN-m}).$$

Suppose that you want to represent system 1 by an equivalent system consisting of a force **F** acting at the point *P* with coordinates (4, 3, −2) m and a couple **M** (system 2). Determine **F** and **M**.



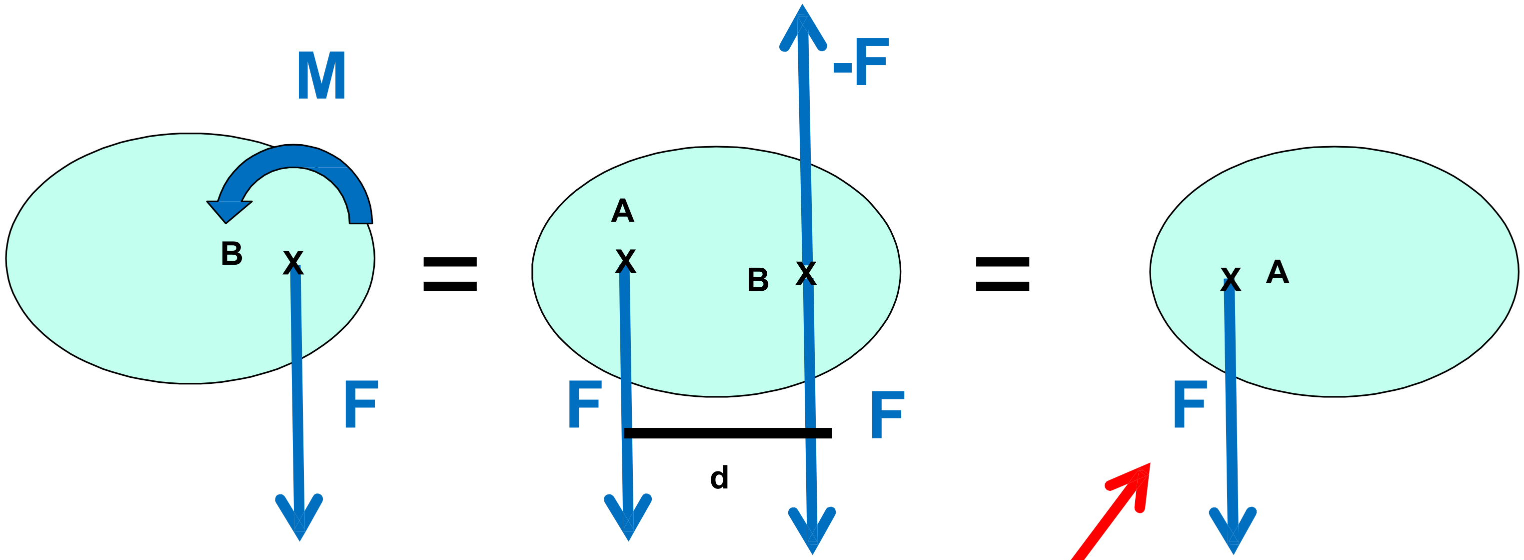
$$\left.\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B \\ &= 20\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\ (\text{kN}).\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{M} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -3 & 2 \\ -10 & 10 & -15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 30 & 5 & 10 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-90\mathbf{i} + 150\mathbf{j} + 60\mathbf{k}) \\ &= -105\mathbf{i} + 110\mathbf{j} + 90\mathbf{k}\ (\text{kN-m}).\end{aligned}\right\}$$

5.Composición de una fuerza y un par, sistemas planos.

De la misma manera, si los vectores M y F son perpendiculares,

puedo componer fuerza y par (resulta una traslación de la fuerza en d=M/F).



Sistemas equivalentes

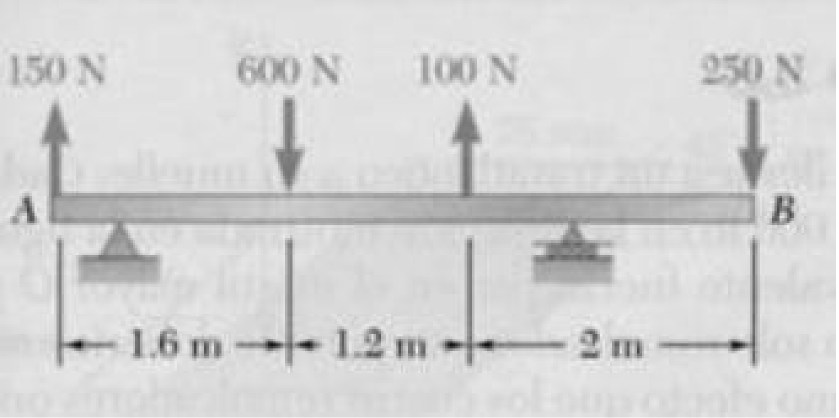
$$\overline{M_F^O} = \overline{d} \times \overline{F}$$

5. Ejercicio

PROBLEMA RESUELTO 3.8

Una viga de 4.80 m de longitud está sujeta a las fuerzas mostradas en la figura. Redúzcase el sistema de fuerzas dado a: *a*) un sistema equivalente fuerza-par en *A*, *b*) un sistema equivalente fuerza-par en *B* y *c*) una sola fuerza o resultante.

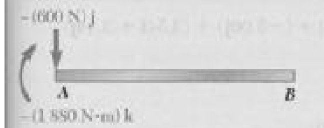
Nota: Como las reacciones en los apoyos no están incluidas en el sistema de fuerzas dado, el sistema no mantendrá la viga en equilibrio.



(ref: Beer, Johnston, Eisenbeg)

Ejercicio

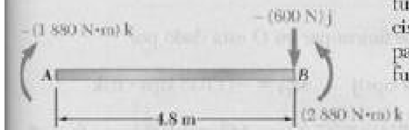
$$= (150\text{ N})\mathbf{j} - (600\text{ N})\mathbf{j} + (100\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{j} = -(600\text{ N})\mathbf{j}$$



$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$
$$= (1.6\mathbf{i}) \times (-600\mathbf{j}) + (2.8\mathbf{i}) \times (100\mathbf{j}) + (4.8\mathbf{i}) \times (-250\mathbf{j})$$
$$= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

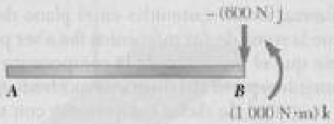
Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en A está dado por

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_A^R = 1\,880\text{ N}\cdot\text{m}\circlearrowright \quad ◀$$



b) **Sistema fuerza-par en** *B*. Se pretende encontrar un sistema fuerza par en B equivalente al sistema fuerza-par en A determinado en el inciso a). La fuerza $\mathbf{R}$ permanece inalterada, pero se debe determinar un nuevo par $\mathbf{M}_B^R$ cuyo momento sea igual al momento con respecto a B del sistema fuerza-par encontrado en el inciso a). Por tanto, se tiene que

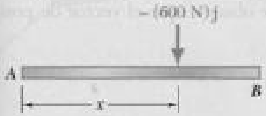
$$\mathbf{M}_B^R = \mathbf{M}_A^R + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{R}$$
$$= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (-4.8\text{ m})\mathbf{i} \times (-600\text{ N})\mathbf{j}$$
$$= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (2\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} = +(1\,000\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$



De esta forma, el sistema fuerza-par en B está dado por

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_B^R = 1\,000\text{ N}\cdot\text{m}\circlearrowleft \quad ◀$$

c) **Fuerza única o resultante.** La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a $\mathbf{R}$ y su punto de aplicación debe ser tal que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a A sea igual a $\mathbf{M}_A^R$. El cual se escribe



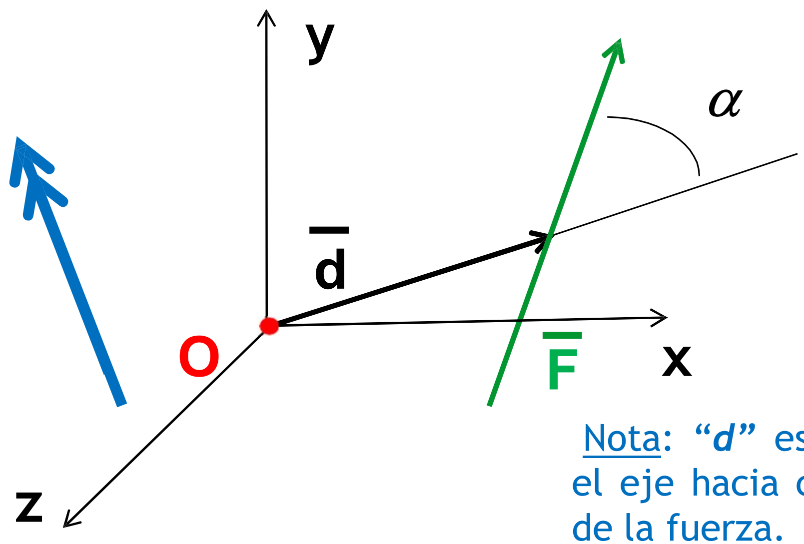
$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$
$$x\mathbf{i} \times (-600\text{ N})\mathbf{j} = -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$
$$-x(600\text{ N})\mathbf{k} = -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

y se concluye que $x = 3.13$ m. Por tanto, la fuerza única equivalente al sistema dado está definida como

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad x = 3.13\text{ m} \quad ◀$$

6. Momento de una fuerza respecto de un eje

El momento de una fuerza respecto de un eje es igual a la proyección sobre dicho eje del momento de la misma fuerza respecto de un punto cualquiera del eje.



$$\overline{M}_F^O = \overline{d} \times \overline{F}$$

$$M_F^e = (\overline{d} \times \overline{F}) \cdot \overline{e}$$

Nota: "*d*" está dirigido desde cualquier punto sobre el eje hacia cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza.

6. Momento de una fuerza respecto de un eje

$$M_F^e = (\overline{d} \times \overline{F}) \cdot \overline{e}$$

$$\overline{M}_F^O = \overline{d} \times \overline{F} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ dx & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = (F_z d_y - F_y d_z)\,\hat{i} + (F_x d_z - F_z d_x)\,\hat{j} + (F_y d_x - F_x d_y)\,\hat{k}$$

$$M_{F,x}^O = F_z d_y - F_y d_z$$

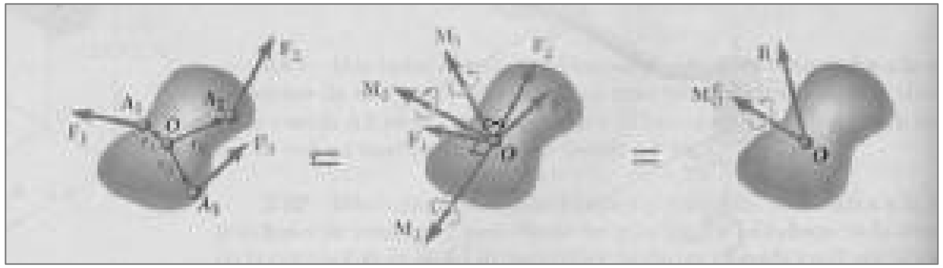
$$M_{F,y}^O = F_x d_z - F_z d_x$$

$$M_{F,z}^O = F_y d_x - F_x d_y$$

7. Reducción de un sistema de fuerzas generalizadas.

Dado un sistema de fuerzas generalizadas, reducirlo a una fuerza y un par.

Es necesario elegir un centro de momentos y una terna asociada.



7. Reducción de un sistema de fuerzas generalizadas.

Dado un sistema de fuerzas $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots$

que <u>actúan sobre un cuerpo rígido</u> en los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$

definidos por los vectores posición $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3, \ldots$

el sistema equivalente fuerza-par queda definido por las ecuaciones:

$$\overline{R} = \sum_i \overline{F}_i$$

$$\overline{M}_O^R = \sum_i \overline{M}_{O,i} = \sum_i (\overline{r}_i \times \overline{F}_i)$$

(ref: Beer, Johnston, Eisenbeg, 3.17)

Fin