

Definición

Sean $\mathbb{V}_K$ y $\mathbb{W}_K$ dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo de escalares K .

La función $T : \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K$ es una transformación lineal si y sólo si cumple:

i. $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in \mathbb{V}_K$

ii. $T(\alpha x) = \alpha T(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in \mathbb{V}_K$

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

$$K = \mathbb{R}$$

usamos
esta en
geral -

Ejemplos

La función $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1)^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$ no es una transformación lineal; en efecto:

sean por ejemplo $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$T(x + y) = T \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ pero $T(x) + T(y) = T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, es decir,

$$T(x + y) \neq T(x) + T(y)$$

La función $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = (x \ 2x)^T$ es una transformación lineal porque

i. $T(x + y) = (x + y \ 2(x + y))^T = (x + y \ 2x + 2y)^T = (x \ 2x)^T + (y \ 2y)^T = T(x) + T(y), \forall x, y \in \mathbb{V}_K$

ii. $T(\alpha x) = (\alpha x \ \alpha(2x))^T = \alpha (x \ 2x)^T = \alpha T(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in \mathbb{V}_K$

Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

y también:

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx, \alpha \in \mathbb{R}$$

Sean f y g funciones derivables, y $\alpha \in \mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{d}{dx}(f) + \frac{d}{dx}(g)$$

y también:

$$\frac{d}{dx}(\alpha f) = \alpha \frac{d}{dx}(f)$$

Transformaciones lineales especiales

- Transformación identidad

$$I_{\mathbb{V}_K} : \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{V}_K : I_{\mathbb{V}_K}(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{V}_K$$

$$I_{\mathbb{W}_K} : \mathbb{W}_K \rightarrow \mathbb{W}_K : I_{\mathbb{W}_K}(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{W}_K$$

- Transformación nula

$$O_{\mathcal{L}} : \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K : O_{\mathcal{L}}(x) = 0_{\mathbb{W}_K} \quad \forall x \in \mathbb{V}_K$$

- Transformaciones matriciales

Dada la matriz $A \in K^{m \times n}$ la aplicación $T : K^n \rightarrow K^m : T(x) = Ax$ es una transformación lineal.

Toda T lineal

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$T(x) = Ax$$

Un ejemplo muy importante: la función de coordenadas

Sea V_K un K -espacio vectorial de dimensión finita n y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V_K . Sabemos que todo vector $v \in V_K$ se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de B : $v \doteq x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.

Propiedades de las transformaciones lineales

$$[v]^B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1. $T_{V_K} : V_K \rightarrow W_K$ es una transformación lineal, entonces $T(0_{V_K}) = 0_{W_K}$.

$$[\alpha v + w]^B = \alpha [v]^B + [w]^B$$

Demostración: Podemos escribir $0_{V_K} = 0_{V_K} + 0_{V_K}$

Aplicando la transformación T a ambos miembros: $T(0_{V_K}) = T(0_{V_K} + 0_{V_K})$; como T es lineal resulta:

$$T(0_{V_K}) = T(0_{V_K}) + T(0_{V_K})$$

es decir,

$$T(0_{V_K}) - T(0_{V_K}) = T(0_{V_K})$$

Luego

$$0_{W_K} = T(0_{V_K})$$

También se cumple, en virtud de la linealidad de T ,

$$T(\alpha 0_{V_K}) = \alpha T(0_{V_K}) = \alpha 0_{W_K} = 0_{W_K}, \quad \forall \alpha \in K$$

$$0_v = 0v \quad \forall v \in V_K$$

$$\begin{aligned} T(0_v) &= T(0v) = \\ &= 0 \cdot \underbrace{T(v)}_w = \\ &= 0_{W_K} \end{aligned}$$

Propiedades de las transformaciones lineales

2. Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}_K$. Entonces

$$T\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i T(v_i), \alpha_i \in K$$

$$T\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k\right)$$

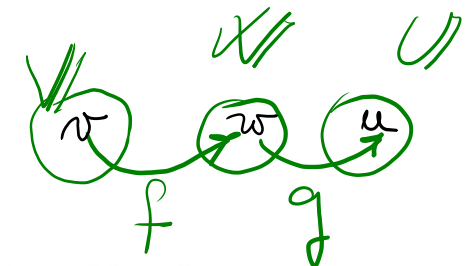
Preservan las combinaciones lineales

3. Sean $f: \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K$ y $g: \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K$ dos transformaciones lineales sobre el mismo cuerpo K . Las funciones $f \pm g: \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K$ son transformaciones lineales.

$$\begin{array}{l} T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \quad T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} \quad (T_1 + T_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$

4. Sea $f: \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K$ y $\alpha \in K$. Entonces la función $\alpha f: \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K$ es una transformación lineal.

Composición de transformaciones lineales



Definición: Sean $f: \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K$ y $g: \mathbb{W}_K \rightarrow \mathbb{U}_K$ dos transformaciones lineales sobre el mismo cuerpo de escalares K . Entonces se define la *composición* de g con f , y se denota $g \circ f$, como

$$(g \circ f): \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{U}_K : (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{V}_K$$

Propiedad: La composición de transformaciones lineales es también una transformación lineal.

$$T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_2 - 3x_1 \end{pmatrix}$$

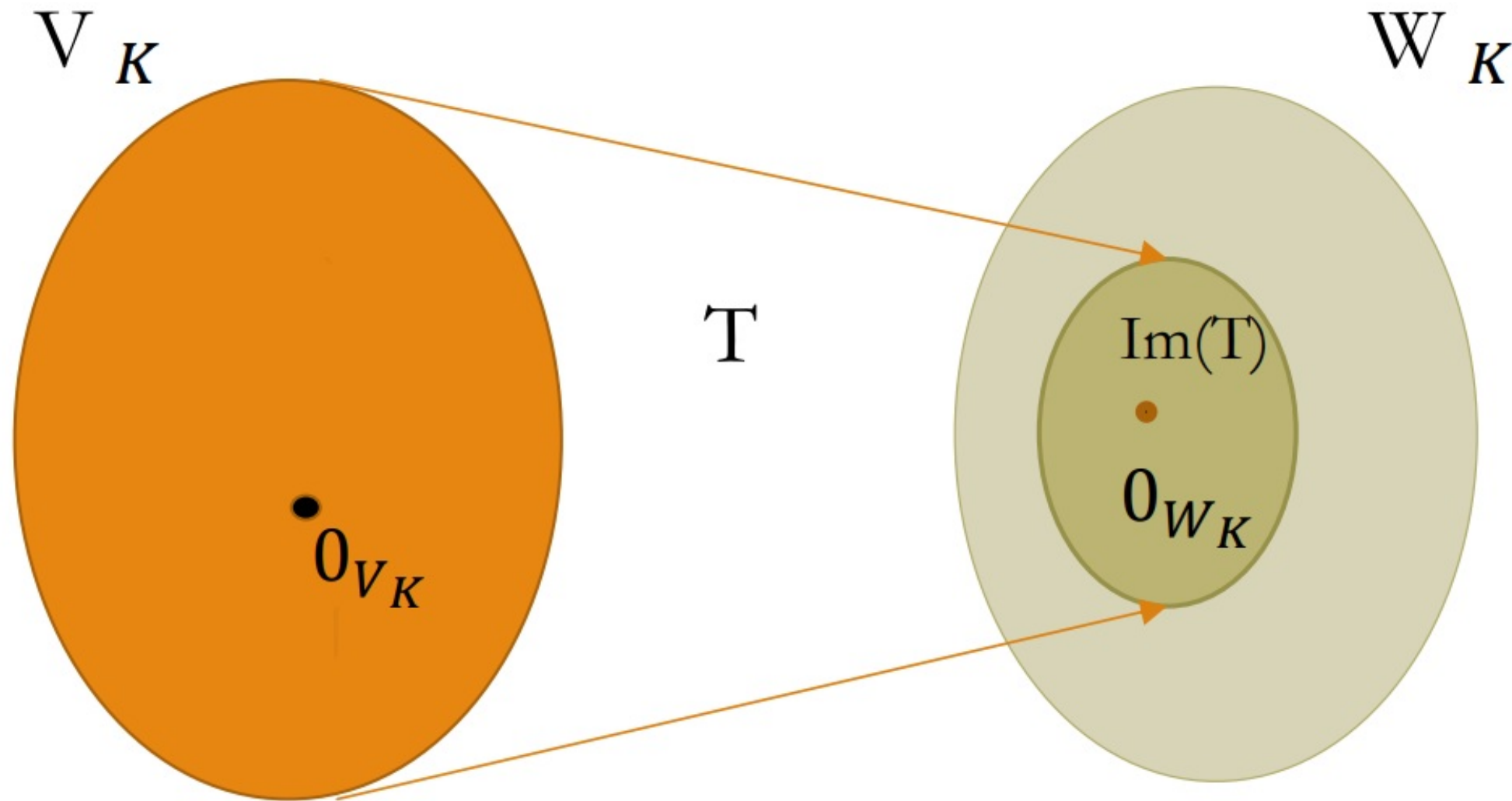
$$T_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_3 \\ x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$$

$$T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T_2 \left(T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = T_2 \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_2 - 3x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_2 & x_2 - 3x_1 \\ x_2 - 3x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

Imagen de una transformación lineal

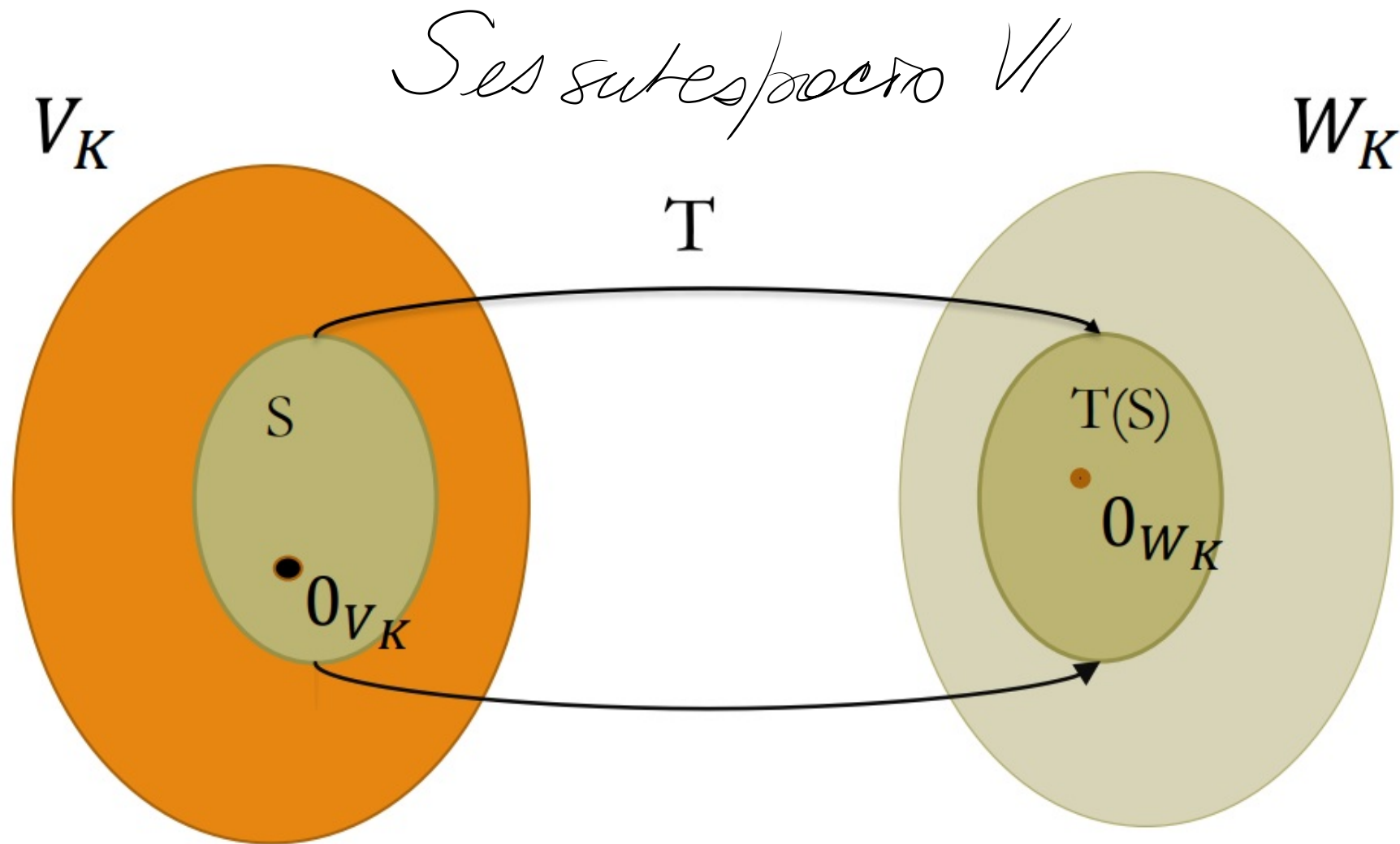


Definición: La *imagen* de una transformación lineal $T : V_K \rightarrow W_K$ es el subconjunto de W_K , denotado $\text{Im}(T)$ tal que $\text{Im}(T) = \{w \in W_K : w = T(x), x \in V_K\}$.

$$\{w \in W : \exists v \in V : T(v) = w\}$$

Subespacio

Imagen de un subespacio de V_K



Definición: La imagen de un subespacio $S \subseteq V_K$ a través de una transformación lineal $T : V_K \rightarrow W_K$ es el subconjunto de W_K , denotado $T(S)$ tal que $T(S) = \{w \in W_K : w = T(x), \underline{x \in S}\}$.

Proposición

Sea $T : V_K \rightarrow W_K$ una transformación lineal. Entonces, si S es un subespacio de V_K , se verifica que $T(S)$, la imagen del subespacio S a través de la transformación T , es un subespacio de W_K .

Ejemplo

Sean $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que: $T \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = (2x_2 - x_1 \quad x_3 - 2x_2)^T$ y $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$.

Los elementos de S son la la forma $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_1 \end{pmatrix}^T = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$;
aplicando la transformación lineal T a ambos miembros:

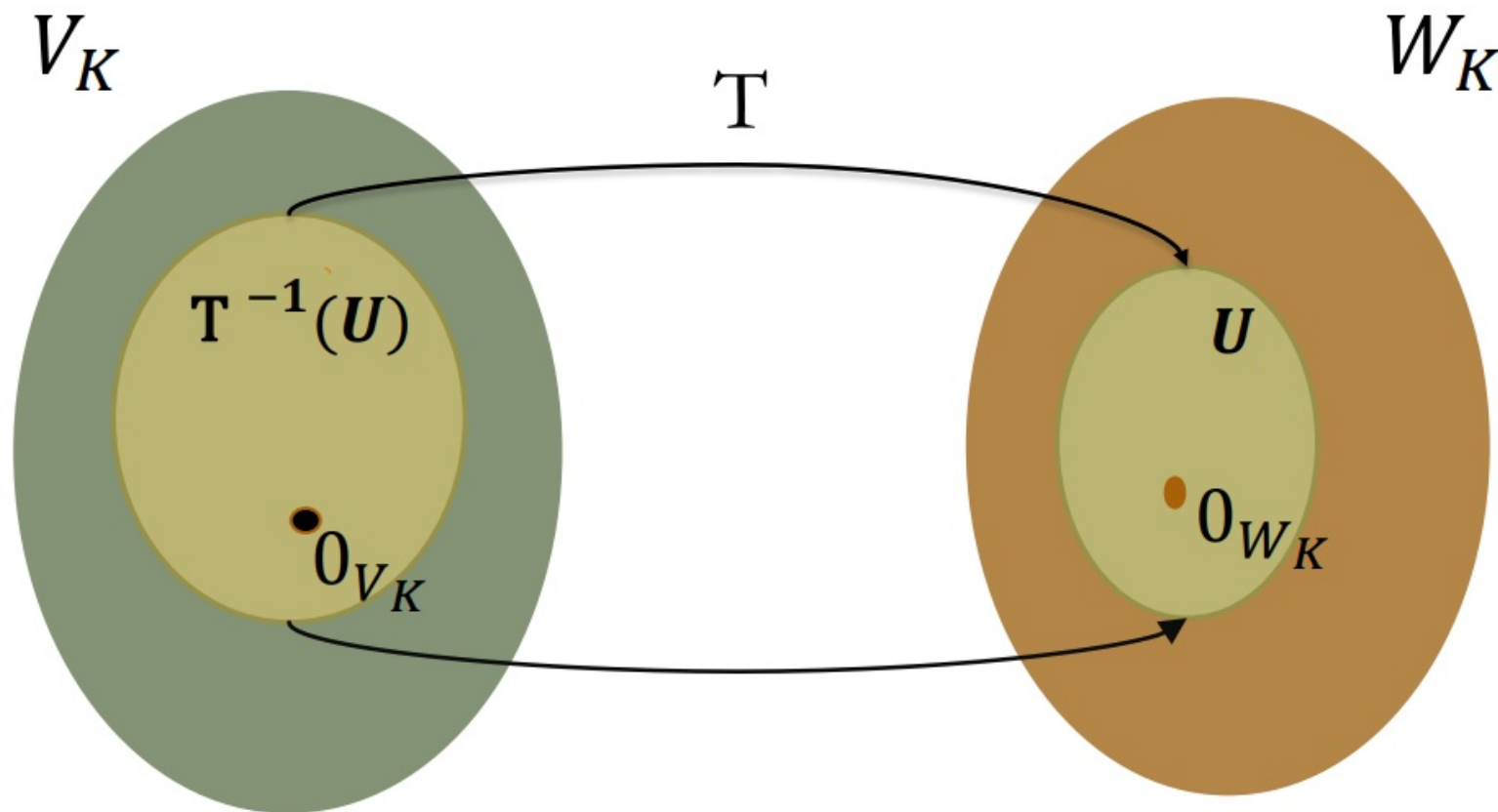
$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} &= T \left[x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = T(x) = x_1 \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}^T}} + x_2 \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}^T}} \\ &= x_1 T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$T(S) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T \right\} = \mathbb{R}^2$$

Preimagen de un subespacio de W_K

~~plano~~
elementos.
cualquiera
de S

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}^T}} \\ T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}^T}} \end{aligned}$$



Definición: La *preimagen* de un subconjunto de W_K a través de una transformación lineal $T : V_K \rightarrow W_K$ consta de todos los vectores de V_K que se transforman en vectores de U a través de la transformación lineal T , y se denota $T^{-1}(U)$ (no confundir con inversa, que, de hecho, podría no existir).

La preimagen de un subespacio

Proposición: Sea $T : \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K$ una transformación lineal. Entonces, si U es un subespacio de $\mathbb{W}_K$, se verifica que $T^{-1}(U)$, la preimagen del subespacio U a través de la transformación T , es un subespacio de $\mathbb{V}_K$.

Demostración:

- i. $0_{\mathbb{V}_K} \in T^{-1}(U)$ porque como U es subespacio de $\mathbb{W}_K$, $0_{\mathbb{W}_K} \in U$ y $T(0_{\mathbb{V}_K}) = 0_{\mathbb{W}_K}$, por ser T transformación lineal.
- ii. $\forall u, v \in T^{-1}(U)$: queremos probar que $u + v \in T^{-1}(U)$.

Si $u \in T^{-1}(U)$: $T(u) = x$ para algún $x \in U$ (1)

si $v \in T^{-1}(U)$: $T(v) = y$ para algún $y \in U$ (2) de (1) y (2) resulta: $T(u) + T(v) = x + y$;
como T es lineal entonces

$$T(u + v) = x + y$$

y como $x + y \in U$ ya que U es subespacio de $\mathbb{W}_K$, resulta que $u + v$ es la preimagen de $x + y$.

- iii. $\forall \alpha \in K, \forall u \in T^{-1}(U)$: queremos probar que $\alpha u \in T^{-1}(U)$.

Si $u \in T^{-1}(U)$: $T(u) = x$ para algún $x \in U$; entonces $\alpha T(u) = \alpha x$ y como T es lineal

$$T(\alpha u) = \alpha x$$

y como $\alpha x \in U$ porque U es subespacio, resulta que αu pertenece a $T^{-1}(U)$.

¿Cómo obtener la imagen de una transformación lineal?

Podemos tomar cualquier.

Propiedad: Sea $\mathbb{V}_K$ un espacio vectorial de dimensión finita n y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}_K$. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K$,

$$\text{Im}(T) = \text{gen} \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$$

Demostración: $y \in \text{Im}(T)$ si y sólo si $y = T(x)$ para algún $x \in \mathbb{V}_K$, es decir,

$$y = T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i)$$

Ejemplo: Sean $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3 : T(p) = \begin{pmatrix} p(1) \\ 2p(1) \\ p(0) \end{pmatrix}$ y la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, $E_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, t, t^2\}$.

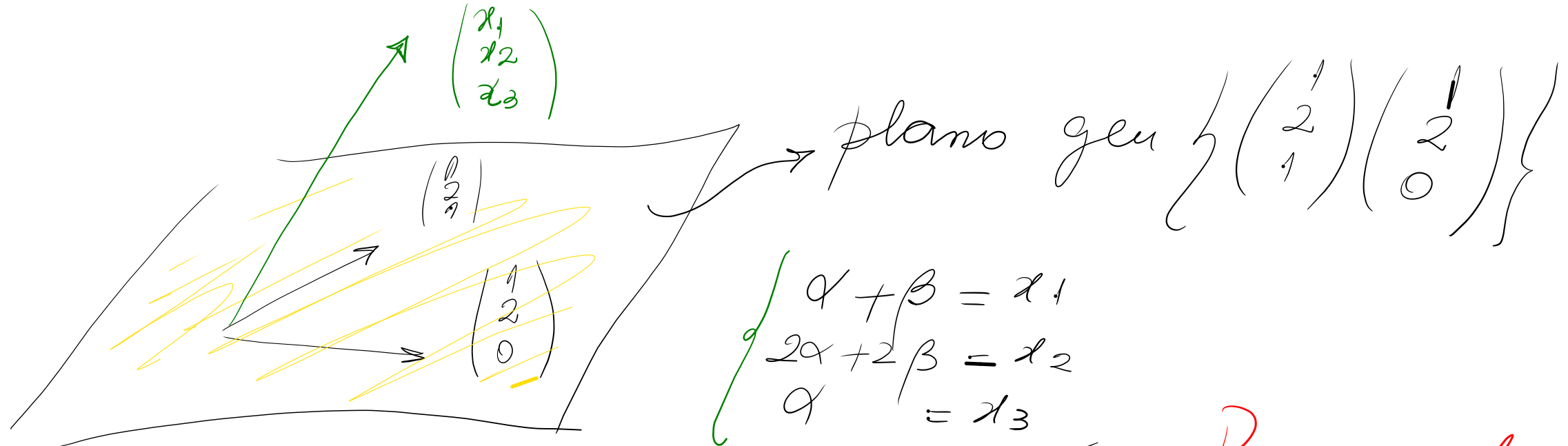
$$\text{Im}(T) = \text{gen} \{T(1), T(t), T(t^2)\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La imagen es un plano

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_1 \\ 2\alpha + 2\beta = x_2 \\ \alpha = x_3 \end{cases}$$

g. LI



$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_1 \\ 2\alpha + 2\beta = x_2 \\ \alpha = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & x_1 \\ 2 & 2 & | & x_2 \\ 1 & 0 & | & x_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 0 & | & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -1 & | & x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

Para ser el sistema sea

Compatible $2x_1 - x_2 = 0$

$$\text{Im}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 = 0 \right\}$$

$$\underline{T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3 : T(p) = \begin{pmatrix} p(1) \\ 2p(1) \\ p(0) \end{pmatrix}}$$

$$\underline{B'} = \{ 1-t, t^2-1, 1+t \} \text{ base de } \mathbb{R}_2[x]$$

$$\text{Im}(T) = \text{gen} \{ T(1-t), T(t^2-1), T(1+t) \} =$$

$$= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Im}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

Ejemplo Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 \\ -x_3 & x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Imagen de un subespacio

$S = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
Subespacio
de $\mathbb{R}^3$
(plano)

$$\forall v \in S \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(v) = T\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \alpha T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \beta T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A_2} \Rightarrow T(S) = \text{gen} \{ A_1, A_2 \}$$

$\dim T(S) = 2$

Si queremos $\text{Im}(T) = T(V) = T(\mathbb{R}^3)$ $\dim \text{Im}(T) = 3$

Tomamos una base de $\mathbb{R}^3$

$$\text{Im}(T) = \text{gen} \left\{ T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right\} =$$
$$B = \text{canon} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$$

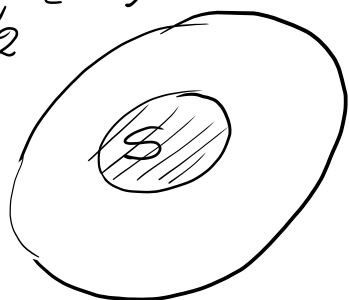
$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_0 + a_1 \\ 2a_0 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}(U) = \{v \in V : T(v) \in U\}$$

↓
Sous-espace
de V

$$U_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \quad \dim U_1 = 3$$

$\mathbb{R}_2[x]$



$$S = T^{-1}(U_1)$$

$$T^{-1}(U) = \{v \in \mathbb{R}_2[x] : T(v) \in U_1\}$$

$$v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad T(v) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_0 + a_1 \\ 2a_0 \end{pmatrix} \in U_1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ \Rightarrow a_0 + a_1 + (a_0 + a_1) &= 0 \Rightarrow a_0 = -a_1 \end{aligned}$$

$$v = a_0 - a_0 x + a_2 x^2 = a_0(1 - x) + a_2 x^2$$

$$\Rightarrow T^{-1}(U_1) = \text{gen } \{1 - x; x^2\}$$

Supongamos $V_2 = \text{ker} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_0 + a_1 \\ 2a_0 \end{pmatrix} \in V_2 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_0 + a_1 \\ 2a_0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0\alpha \\ a_1 = 0\alpha \\ a_0 + a_1 = 0\alpha \\ 2a_0 = 1\alpha \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{Si } \alpha \neq 0 \\ \text{S. Incomp} \end{cases}$
 $\begin{cases} \text{Si } \alpha = 0 \\ \text{S. Comp.} \end{cases}$

$a_0 = a_1 = 0$

$$\Rightarrow T^{-1}(V_2) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}_2[x] : \sigma = 0 + 0x + a_2x^2 \right\}$$

$$T^{-1}(V_2) = \text{ker} \{ x^2 \}$$

Otto Esercizio $T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} \end{pmatrix} = (a_{11} + a_{12}) + a_{21}x + a_{22}x^2 + a_{21}x^3$$

$$U \subseteq \mathbb{R}_3[x] \quad U = \text{gen} \{ 1, 1+x \} \quad T^{-1}(U)$$

$$T^{-1}(U) = \{ \textcircled{\sigma} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : T(\sigma) \in U \}$$

$$\underline{T(\sigma) = (a_{11} + a_{12}) + a_{21}x + a_{22}x^2 + a_{21}x^3 = \alpha + \beta(1+x)} \\ \in U$$

$$\alpha + \beta = a_{11} + a_{12}$$

$$\beta = a_{21}$$

$$0 = a_{22}$$

$$0 = a_{21}$$

$$\beta = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha = a_{11} + a_{12}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

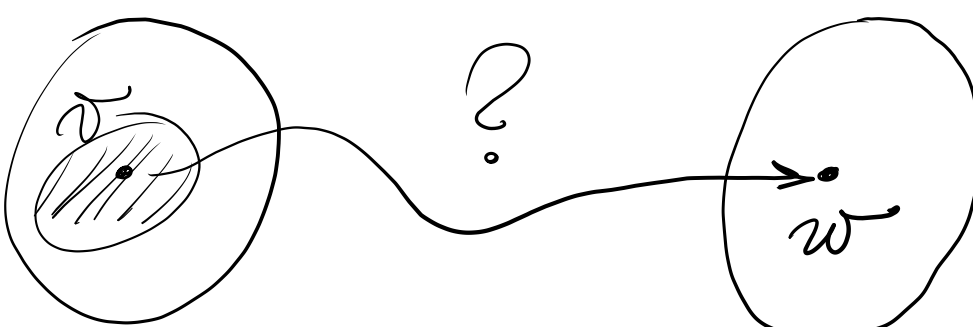
$$T(\sigma) = a_{11} + a_{12} \in U$$

$$\Rightarrow T^{-1}(U) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

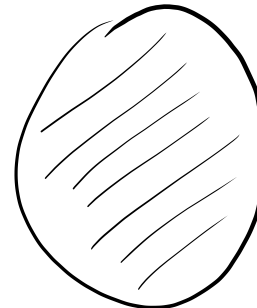
Hallar todos $v \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: $T(v) = 1 + x$

$$T(v) = (a_{11} + a_{12}) + a_{21}x + a_{22}x^2 + a_{21}x^3 = 1 + x$$

~~W~~ . $\left\{ \begin{array}{l} a_{11} + a_{12} = 1 \\ a_{21} = 1 \\ \hline a_{22} = 0 \\ \hline a_{21} = 0 \end{array} \right.$ ABS



No existe $v \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: $T(v) = 1 + x$

$T^{-1}(w) = \emptyset$   $\Rightarrow w \notin \text{Im}(T)$

si $w \notin \text{Im}(T)$

¿En qué caso una transformación lineal está bien definida?

Teorema fundamental de las transformaciones lineales

Sean $\mathbb{V}_K$ y $\mathbb{W}_K$ dos espacios vectoriales, siendo $\mathbb{V}_K$ de dimensión finita n , y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}_K$ y $w_1, \dots, w_n$ vectores cualesquiera de $\mathbb{W}_K$.

Entonces existe una única transformación lineal $T : \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K$ tal que $T(v_i) = w_i$, $1 \leq i \leq n$.

Ejemplo

→ fórmula

Hallar la expresión analítica de la transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(t^2 - t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad T(t - 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad T(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

w_1 w_2 w_3

$B = \left\{ \underset{v_1}{t^2 - t}, \underset{v_2}{t - 1}, \underset{v_3}{1} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

como $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ y $\{t^2 - t, t - 1, 1\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}_2[x]$, este conjunto constituye una base de $\mathbb{R}_2[x]$. De este modo T está bien definida. En efecto, expresemos un elemento cualquiera de $\mathbb{R}_2[x]$ como combinación lineal de esta base:

$$\underline{a_0} + \underline{a_1}t + \underline{a_2}t^2 = \underline{\alpha}(\underline{t^2} - \underline{t}) + \underline{\beta}(\underline{t} - \underline{1}) + \underline{\gamma}(\underline{1})$$

obtenemos así los escalares de esta combinación lineal:

$$\underline{\alpha} = \underline{a_2}; \quad \underline{\beta} = a_1 + a_2; \quad \underline{\gamma} = a_0 + a_1 + a_2$$

reemplazando en la expresión de $a_0 + a_1t + a_2t^2$ y aplicando a ambos miembros la transformación T , resulta:

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_2T(t^2 - t) + (a_1 + a_2)T(t - 1) + (a_0 + a_1 + a_2)T(1)$$

reemplazando las imágenes de $t^2 - t$, $t - 1$, 1 :

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (a_1 + a_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a_0 + a_1 + a_2) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

finalmente:

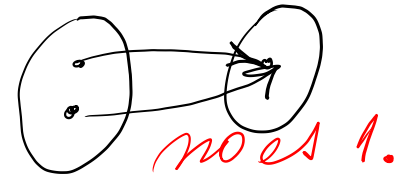
$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = \begin{pmatrix} a_2 - a_0 \\ -a_0 - 2a_1 - a_2 \end{pmatrix}$$

fórmula

Clasificación de transformaciones lineales

Definición: Sean $\mathbb{V}_K$ y $\mathbb{W}_K$ dos espacios vectoriales y $T : \mathbb{V}_K \rightarrow \mathbb{W}_K$ una transformación lineal.
Entonces:

$$\text{Si } x \neq y \Rightarrow T(x) \neq T(y)$$



1. T es *inyectiva* (o monomorfismo) si $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in \mathbb{V}_K$

2. T es *sobreyectiva* (o epimorfismo) si $\forall y \in \mathbb{W}_K \quad \exists x \in \mathbb{V}_K : y = T(x)$

$$\mathbb{W} = \text{Im}(T)$$

3. T es *biyectiva* (o isomorfismo) si es inyectiva y sobreyectiva.

Transformaciones inyectivas y no inyectivas

$$T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$$

1. $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : T(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ es inyectiva, ya que si $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$, resulta $x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

2. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : T \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix}$ no es inyectiva, ya que, por ejemplo

$$T \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = T \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pero } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dos elementos

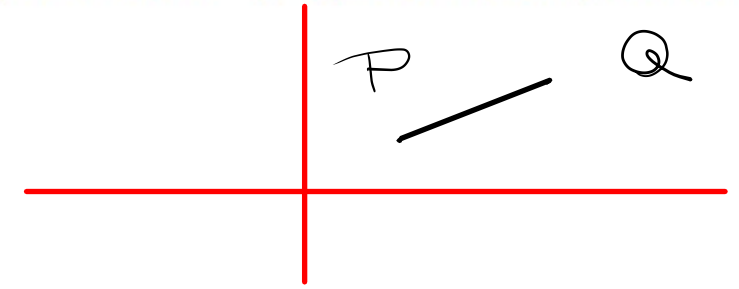
distintos tiene la misma imagen

No es inyectiva

Una aplicación geométrica

$$\begin{array}{lcl} t=0 & \longrightarrow & P \\ t=1 & \longrightarrow & Q \end{array}$$

¿Cuál es la imagen del segmento $[P, Q] = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = P + t(Q - P), 0 \leq t \leq 1\}$ a través de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : T \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, donde P y Q son dos puntos distintos de $\mathbb{R}^2$?



En primer lugar, dado que T es lineal,

$$\forall x \in [P, Q] : T(x) = T(P + t(Q - P)) = T(P) + tT(Q - P), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Consideremos por ejemplo, $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces $Q - P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, y así

$$\forall x \in [P, Q] : T(x) = T \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + tT \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right], \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Se observa que la imagen de $[P, Q]$ es otro segmento en $\mathbb{R}^2$ y que T es inyectiva (verificarlo).

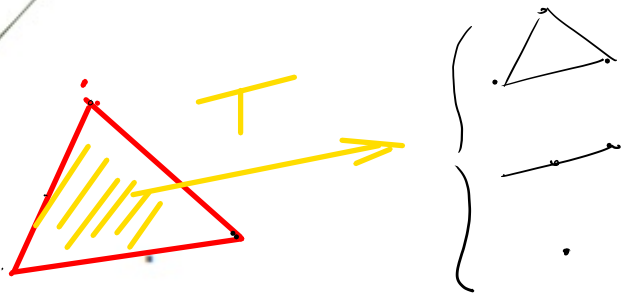
TPH

¿Cuál es la imagen del mismo segmento si la transformación lineal no es inyectiva?

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : T \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix}$ que ya hemos visto que no es inyectiva.

$$\forall x \in [P, Q] : T(x) = T \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + t T \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right], \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$T(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$



La imagen del segmento $[P, Q]$ es ahora el punto $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

OBS
 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Segmento $\xrightarrow{T}$ Segm
 Punto

Transformaciones sobreyectivas y no sobreyectivas

$$\text{Im}(T) = \text{gen} \{ T(1), T(t), T(t^2) \} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$$

1. La transformación $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2 : T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = \begin{pmatrix} a_0 - a_2 \\ a_0 + a_1 \end{pmatrix}$ es sobreyectiva, ya

que $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \exists p \in \mathbb{R}_2[x] : T(p) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. En efecto, $p(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t$ verifica

$$T(p) = T(x_1 + (x_2 - x_1)t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

es una

$$T(1+t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = a_0 - a_2 = 1 \\ x_2 = a_0 + a_1 = 2 \\ T(2t - t^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

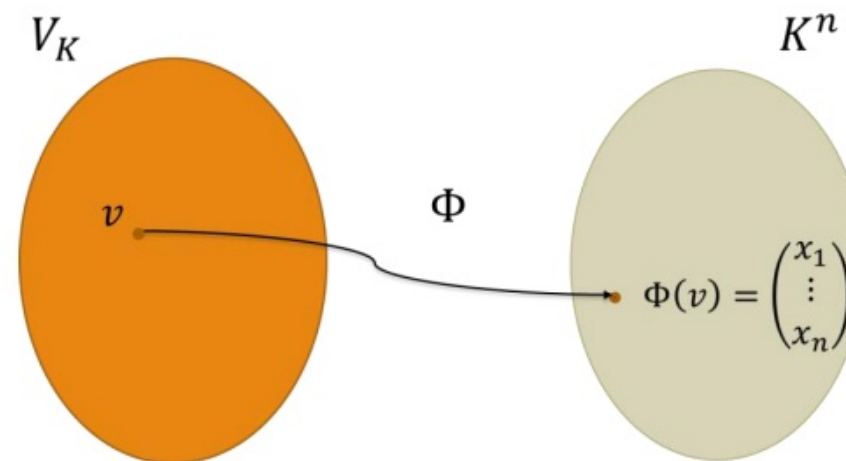
2. Por otra parte, $T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} : T(a_0 + a_1 t) = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 - a_1 \\ a_1 & a_1 - a_0 \end{pmatrix}$ no es sobreyectiva, ya que por ejemplo, no existe $p \in \mathbb{R}_1[x]$ tal que $\begin{pmatrix} a_0 & a_0 - a_1 \\ a_1 & a_1 - a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Observemos que el sistema $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 - a_1 = -2 \\ a_1 = -1 \\ a_1 - a_0 = 1 \end{cases}$ es incompatible.

OBS Si $\dim V < \dim W$
 T no es sobreyectiva

Transformaciones biyectivas

Como ejemplo de transformación biyectiva recordemos la función de coordenadas. Sea V_K un K -espacio vectorial de dimensión finita n y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V_K . $\Phi : V_K \rightarrow K^n$ es la transformación lineal que asigna a cada vector de V_K su vector de coordenadas en la base B . Φ es biyectiva.



$$[v]^B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Efectivamente, como cada vector $v \in V_K$ se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de la base B , Φ es inyectiva. Por otra parte, para cualquier vector de K^n es posible formar una combinación lineal de vectores de la base B , empleando sus componentes como los escalares de esta combinación lineal. Por lo tanto, Φ es sobreyectiva.

Seguimos con transformaciones lineales....

Definición:

Dada $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Se llama Núcleo de la transformación lineal al conjunto

$$Nu(f) = \{x \in V : f(x) = 0_W\}$$

*f pertenece al conj. de transf. lineales de $V \rightarrow W$.
 $\mathcal{L}(V; W)$*

Propiedades

Propiedad (1):

El $Nu(f)$ es subespacio de V

Esto se demuestra de inmediato, teniendo en cuenta que:

- $0_V \in Nu(f)$ porque para cualquier transformación lineal se cumple que $f(0_V) = 0_W$.
- Tomando x e $y \in Nu(f)$ entonces la suma $x + y \in Nu(f)$ ya que $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0_W$.
- Por último, tomando un escalar $\alpha \in K$ y un vector $x \in Nu(f)$ se verifica $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0_W = 0_W$.

Propiedad (2)

Sea $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

f es un monomorfismo $\Leftrightarrow Nu(f) = \{0_V\}$.

Demostración:

- f es un monomorfismo $\Rightarrow Nu(f) = \{0_V\}$

1) $\{0_V\} \subseteq Nu(f)$ es inmediato ya $Nu(f)$ que es un subespacio de V

2) Para probar que $Nu(f) \subseteq \{0_V\}$ tomemos un $x \in Nu(f)$ queremos probar que $x = 0_V$

Como $x \in Nu(f)$ entonces $f(x) = 0_W$ pero también $f(0_V) = 0_W$ y siendo f un monomorfismo debe ser $x = 0_V$.

- $Nu(f) = \{0_V\} \Rightarrow f$ es un monomorfismo.

Partimos de $f(x) = f(y)$. Como f es una transformación lineal podemos escribir $f(x) - f(y) = 0_W$ y $f(x - y) = 0_W$, de modo que $x - y \in Nu(f)$.

Siendo $Nu(f) = \{0_V\}$ y $x - y \in Nu(f)$ entonces $x = y$.

Hemos probado que:

Si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ de modo que es f inyectiva (monomorfismo).

Propiedad (3)

Sea $f \in L(V, W)$.

f monomorfismo $\Rightarrow$

$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente $\Rightarrow$

$\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$ es linealmente independiente)

Si f es inyectiva

Demostración:

Queremos probar que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente $\Rightarrow$
 $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$ es linealmente independiente.

Partimos entonces de $a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_k f(v_k) = 0_W$, usando propiedades de las transformaciones lineales podemos escribir: $f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k) = 0_W$ de modo que el vector $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k \in \text{Nu}(f)$.

Como f es monomorfismo ($\text{Nu}(f) = \{0_V\}$)(propiedad (2)) se deduce que, $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0_V$ y siendo el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ linealmente independiente (por hipótesis), resulta que $a_i = 0$ con $1 \leq i \leq k$.

Observación:

$\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$ es linealmente independiente $\Rightarrow$

$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente y se cumple para cualquier transformación lineal.

Ejemplos:

- Dada $f: \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(a + bx) = (a \ a + b \ 0)^T$.

En este caso el $Nu(f) = \{a + bx \in \mathbb{R}_1[x] / f(a + bx) = (0 \ 0 \ 0)^T\}$, esto nos lleva a pedir que $a = 0$ y $b = 0$. De modo que $Nu(f) = \{0_{\mathbb{R}_1[x]}\}$

y f es monomorfismo.

- $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2 / f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + b \ c - d)^T$.

En este caso el $Nu(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (0 \ 0)^T \right\}$.

Se deduce que $a + b = 0$ y $c - d = 0$ y toda matriz que pertenezca al $Nu(f)$ será de la forma $\begin{pmatrix} a & -a \\ c & c \end{pmatrix}$, $a, c \in \mathbb{R}$

$Nu(f) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base del $Nu(f)$.

Y f no es monomorfismo.

Presentamos otro teorema clave

Teorema de la dimensión

Sea V de dimensión finita n y $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

Entonces $\dim Nu(f) + \dim Im(f) = \dim(V)$.

QDS Si $\dim V > \dim W$

$\Rightarrow T: V \rightarrow W$

No es inyectiva

$\dim Nu(A) + \text{rg}(A) =$

$= \# \text{columnas de } A$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$f(x) = A \cdot x$

$Nu(A) =$

$Nu(f)$

$\text{rg}(A) = \dim \text{Im}(f)$

$\# \text{columnas} = \dim V$