4) $\mathbb{R}^3$, p.i.c., $S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ $B = \left\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}\right\} \to$ BOG (11)

comprobar que $v = (2\ -1\ 2)^T \in S$, y hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$: $P_S(x) = v$, $d(x, S) = 3$

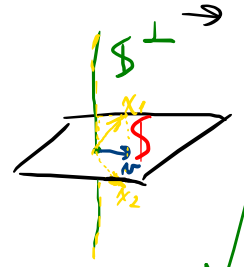
→ pero si tomamos este camino, sería muy largo y complicado

hmmm... → BOG ⇒ $P_S(x) = \dfrac{\langle x; v_1\rangle}{\langle v_1; v_1\rangle} v_1 + \dfrac{\langle x; v_2\rangle}{\langle x; v_2\rangle} v_2$

$B_S = \{v_1; v_2\}$

Iván:

Busco a $S^\perp$ y planteo $x = v + v^\perp$, $(v^\perp \in S^\perp; v \in S)$



→ $\underbrace{P_S(x)}_{v} + \underbrace{P_{S^\perp}(x)}_{\lambda w} = x$ → podemos sacarlo

⇒ $\lambda w = x - v$

⇒ $\|\lambda w\| = \underbrace{\|x - v\|}_{P_S(x)}$ (*)

la tenemos

$\|P_{S^\perp}(x)\| = \|x - P_S(x)\| = d(x; S)$

obtengo $v^\perp$: $B_S = \{v_1; v_2\}$

(1): $v^\perp \parallel v_1 \times v_2$ → (puedo tomar cualquier múltiplo de $v_1 \times v_2$)

(2): $\begin{cases}\langle v^\perp; v_1\rangle = 0\\ \langle v^\perp; v_2\rangle = 0\end{cases}$ → Sol $= \lambda v^\perp$

⇒ $S^\perp = \text{gen}\{v^\perp\}$ ⇒ una base de $\mathbb{R}^3$ es $\{\underbrace{v_1; v_2}_{\text{los de } S}; \underbrace{v^\perp}_{\text{el de } S^\perp}\}$

Recordar que (1) se puede por PIC, con otro PI del estilo $\langle x; y\rangle = y^T G x$, con $G \neq I$ no podría $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

⇒ obtengo $v^\perp$ por (1)(*) o por (2)

(siempre posible) $P_S(x) = v \Rightarrow x = v + v_0^\perp$, $v_0^\perp = \lambda v^\perp$

A partir de acá, tomando (*)

→ $x - v = v_0^\perp$

→ $d(x; S) = \|v_0^\perp\| = \|\lambda v^\perp\| = 3$

→ resolvemos para llegar a $\lambda = \pm\lambda_0$

∴ $x = v \pm \lambda_0 v^\perp$

(Recordar que esto se deduce de que $d(x; S) = \|x - P_S(x)\|$, siendo $x - P_S(x) = P_{S^\perp}(x)$)