Ejercicios adicionales de Espacios vectoriales

Patricia Palacios

Ejercicio 1. Analizar si los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial $\mathbb{V}$ indicado. Si son subespacios, demostrarlo. Si no lo son, mostrar con un contraejemplo que no se verifica alguno de los axiomas.

a) $S_1 = \{(x\ y)^T \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 - 9y^2 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

b) $S_2 = \{(x\ y\ z)^T \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

c) $S_3 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] / p(1) - 2p'(1) = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$.

d) $S_4 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / det(A) = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejercicio 2. Dar un conjunto de generadores para cada uno de los siguientes subespacios.

a) $S_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 / \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 8x_2 & - & 13x_3 & + & 11x_4 & = & 0 \end{array} \right\}$

b) $S_2 = \left\{ p \in \mathbb{R}_2[x] / \int_0^1 p(x)dx = 0 \right\}$

c) $S_3 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A^T = -A\}$

d) $S_4 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / tr(A) = 0\}$

Ejercicio 3. Analizar si los siguientes conjuntos generan el espacio vectorial $\mathbb{V}$ indicado. Si no lo generan, dar ecuaciones para el subespacio generado por el conjunto.

a) $\{(1\ -1)^T, (2\ 1)^T\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

b) $\{(1\ -1\ 0)^T, (0\ 1\ 2)^T, (1\ 2\ 2)^T\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

c) $\{(1\ -1\ 1)^T, (2\ 1\ -1)^T, (0\ 1\ -1)^T, (1\ 2\ -2)^T\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

d) $\{x^2 + x, x + 1, x^2 - x + 3\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$.

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejercicio 4. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son linealmente independientes en el espacio vectorial que se indica:

a) $\{(1\ 2)^T, (1\ -1)^T\}$, en $\mathbb{R}^2$,

b) $\{(1\ 1\ 0)^T, (1\ -1\ 1)^T, (1\ -3\ 2)^T\}$, en $\mathbb{R}^3$,

c) $\{(2\ 1\ -1\ 1)^T, (0\ 1\ -1\ 0)^T, (1\ 0\ 2\ -1)^T\}$, en $\mathbb{R}^4$,

d) $\{(3\ 1\ -1\ 0)^T, (1\ 2\ -1\ 2)^T, (1\ -3\ 1\ -4)^T, (4\ 3\ -2\ 2)^T\}$, en $\mathbb{R}^4$,

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^{2\times 2}$

f) $\{2,\, 3+x,\, 2-x^2\}$ en $\mathbb{R}_2[x]$.

g) $\{1,\, 2+2x,\, 1-x+x^2,\, 2-x^2\}$ en $\mathbb{R}_2[x]$.

Ejercicio 5. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{V}$.
Suponiendo que el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto linealmente independiente, probar que el conjunto $\{v_1+v_2-v_3, v_1+2v_2, v_2+3v_3\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ejercicio 6. Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto

$$\{1+x+2x^2, 1+\alpha x+2x^2, 1+2x+\alpha x^2\}$$

es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}_2[x]$.

Ejercicio 7. Halle el wronskiano de las siguientes funciones y determine si los conjuntos son linealmente independientes:

a) $\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}\}$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $\{e^x, xe^x, e^{-x}\}$

c) $\{sen(x), sen(x+\frac{\pi}{4})\}$

d) $\{e^{-3x}sin(2x), e^{-3x}cos(2x)\}$

e) $\{1, sen^2(x), cos(2x)\}$

Ejercicio 8. Encuentre bases para los siguientes subespacios e indique la dimensión de los mismos:

a) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

b) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0,\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$.

c) $S = gen\{(1\ -2\ -1)^T, (2\ 1\ 1)^T, (1\ 3\ 2)^T\}$

d) $S = gen\{(1\ 0\ 0\ 1)^T, (0\ 2\ 1\ 3)^T, (2\ 1\ 0\ 0)^T\}$

e) $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} :\ A = A^T\}$.

f) $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} :\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

g) $\mathcal{S} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] :\ \int_0^1 p(t)dt = 0\}$.

Ejercicio 9. Consideremos $S = \{p \in \mathbb{R}_2[x]/p'(0) = p(0)\}$.

a) Demuestre que S es un subespacio de $\mathbb{R}_2[x]$ y halle una base de S.

b) Halle una base de $\mathbb{R}_2[x]$ que contenga a la base de S dada en el item anterior.

Ejercicio 10. Halle todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto

$$\{(1,\ -1,\ 2)^T, ((k-1),\ k,\ 1)^T, (k,\ (k-1),\ (k+5))^T\}$$

sea una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$, halle bases de sus subespacios fundamentales: Col(A), Nul(A), Fil(A) y Nul(A^T). Compare sus dimensiones y calcule rango(A) y rango(A^T).

Ejercicio 12. a) Sea $S = gen\{(1\ 1\ -1)^T, (0\ 2\ 3)\}$. Halle dos matrices distintas A y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que Col(A) = Col(B) = S.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Halle B (de tamaño adecuado) tal que Nul(B) = Col(A).

c) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Halle B (de tamaño adecuado) tal que Nul(A) = Col(B).

Ejercicio 13. Encuentre las coordenadas de v en la base B en cada uno de los siguientes casos:

a) $v = (1\ 2\ 3)^T$ y $B = \{(1\ 1\ 0)^T,\ (1\ 0\ 1)^T,\ (0\ 1\ 1)^T\}$.

b) $v = 5 + 3x - 2x^2$ y $B = \{1 + x + x^2;\ 1 + x;\ 1\}$.

c) $v = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 14. Sean $B = \{x - 3x^2, 1 - x^2, -2 + x\}$ y $B' = \{-1 + x, -1 - x + x^2, -5 + 2x^2\}$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}_2[x]$.

a) Probar que B y B' son bases de $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Si las coordenadas de p en la base B son $(-1\ 2\ 1)^T$, calcular las coordenadas de p en la base B'.

Ejercicio 15. a) Construir polinomios p_1, p_2, $p_3 \in \mathbb{R}_2[x]$ tales que

$$p_1(-1) = 1, \quad p_1(1) = 0, \quad p_1(2) = 0$$

$$p_2(-1) = 0, \quad p_2(1) = 1, \quad p_2(2) = 0$$

$$p_3(-1) = 0, \quad p_3(1) = 0, \quad p_3(2) = 1$$

b) Verificar que $\{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

c) Comprobar que todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$ se puede escribir en la forma

$$p(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x)$$

donde

$$\alpha_1 = p(-1), \quad \alpha_2 = p(1), \quad \alpha_3 = p(2)$$

Deducir que

$$[p]^B = (p(-1)\ p(1)\ p(2))^T$$

Ejercicio 16. Halle la matriz de cambio de bases $M_B^{B'}$ en los siguientes casos:

a) $B = \{(1\ 2\ 3)^T,\ (1\ 0\ 1)^T,\ (3\ 4\ 6)^T\}$ y $B' = \{(1\ -1\ 0)^T,\ (1\ -2\ 3),\ (1\ 1\ 0)^T\}$.

b) $B = \{1,\ x-1,\ (x-1)^2\}$ y $B' = \{1,\ x-2,\ (x-2)^2\}$.

Ejercicio 17. Sean B y B' dos bases de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Si $[v]^B = (3\ 1\ 2)^T$, calcular $[v]^{B'}$.

b) Si $[v]^{B'} = (1\ 2\ 6)^T$, calcular $[v]^B$.

Ejercicio 18. Sea $B_1 = \{1+x, p, x-x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Hallar $p \in \mathbb{R}_2[x]$ de modo que

$$[1+2x-3x^2]^{B_1} = (2\ -1\ 3)^T$$

y, para este p, encontrar una base B_2 de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$M_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 19. Determine todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S = T$ siendo

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

y

$$T = gen\{(3,\ 0,\ k,\ 1), (3,\ k,\ -3,\ -\frac{4}{3}k), (1,\ 2,\ -3,\ -k)\}.$$

Ejercicio 20. Halle bases de $S \cap T$ en los siguientes casos:

a) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0,\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$

b) $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} :\ A^T = -A\}$ y $T = gen\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

c) $S = \{p \in \mathbb{R}_2[x] :\ p(0) = p(1)\}$ y $T = gen\{x^2+1,\ 3x+2\}$.

Ejercicio 21. Halle una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga una base de S y una base de T si

$$S = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} A \right\} \text{ y } T = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 22. Sean $S = gen\{(1\ 1\ 0\ 0)^T, (1\ 0\ 1\ 1)^T\}$, $T_1 = gen\{(2\ 0\ 0\ -1)^T, (0\ 1\ 1\ -1)^T\}$ y

$$T_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

a) Halle bases de $S + T_1$ y $S + T_2$. Indicar en qué caso la suma es directa.

b) Analice si $[1\ 1\ 0\ 3]^T$ pertenece a $S + T_i$, con $i = 1, 2$. En caso afirmativo, halle $v_1 \in S$ y $v_2 \in T_i$ tales que $[1\ 1\ 0\ 3]^T = v_1 + v_2$. ¿$v_1$ y v_2 son únicos? Compare ambos casos.

Ejercicio 23. Dados los subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$ definidos por

$$S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] /\ p(-1) = p(1) = 0\} \quad y \quad S_2 = gen\{2x^2 - x, x^3 - 2\},$$

hallar una base de $\mathbb{R}_3[x]$ que contenga una base de $S_1 \cap S_2$ y una base de $S_1 + S_2$.

Ejercicio 24. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 /\ x_2 + x_4 = 0\} \quad y \quad S_2 = gen\{(1\ 0\ 1\ 0)^T, (0\ 0\ 2\ 1)^T, (2\ 0\ 0\ 3)^T\}$$

Hallar un subespacio $T \subset \mathbb{R}^4$ tal que $(S_1 \cap S_2) \oplus T = \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 25. Sean $S = gen\{(1\ 0\ 0\ 0)^T, (1\ 1\ -1\ 0)^T\}$ y $H = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$. Decida si existe un subespacio $T \subset \mathbb{R}^4$ tal que $S \oplus T = H$. En caso afirmativo, indique la dimensión del subespacio T y exhiba una base.

Ejercicio 26. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & -5 \end{pmatrix},$$

donde $rg(A) = 3$.

a) Hallar una base de $Nul(B)$.

b) Hallar un subespacio T de $\mathbb{R}^3$ tal que $Nul(B) \oplus T = \mathbb{R}^4$.