Producto interno $\quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

función $\langle \, ; \, \rangle \quad V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \quad \mathbb{R}$

toma dos vectores

Axiomas (4) $\quad \langle v, v \rangle > 0 \quad \wedge \quad \langle v, v \rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0_V$

Norma inducida $\quad \langle v, v \rangle > 0$

Definir $\|v\| = \left(\langle v ; v \rangle \right)^{1/2}$

Ejemplos (otros)

$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad \langle \underset{m \times n}{A} \, \underset{m \times n}{B} \rangle = \text{traza}\,(\underbrace{\underset{n \times m}{B^T} \cdot \underset{m \times n}{A}}_{n \times n})$

$$\text{traza}(\underset{n \times n}{C}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \qquad \text{traza} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 1 + 4 = 5$$

$$\left\langle \underset{\substack{A \\ 3\times 1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{\substack{B \\ 3\times 1}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \right\rangle = 1.2 + 3.1 + (-1).3 = 2$$

$$B^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2+3-3 = \underset{1\times 1}{2}$$

$$tr(B^T A) = 2$$

$$\left\langle \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}} ; \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}} \right\rangle = tr \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= tr \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 20 & 5 \end{pmatrix} = -7 + 5 = -2 =$$

$$= 3.1 + (-1)(-1) + 2.0 + 1.4 + 5(-2) + 0\,3 =$$

$$= 3 + 1 + 4 - 10 = -2$$

pic matrices $\mathbb{R}^{m\times n}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad a_{ij}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad b_{ij}$

$$(B^T A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (B^T)_{ik} A_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} B_{ki} A_{kj} \qquad tr(B^T A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} A_{ki} B_{ki}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= 3.0 + 2(-1) + (-1)2 + 4.1 + 0.3 + 5.5 + 5.4 + 1.2 =$$

$$= 47$$

OTRO ej. con polinomios $\quad \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt$

$\mathbb{R}_n[x]$

Matriz de producto interno

Matriz de Gram

V $\dim V = n$ $\underset{\text{base}}{\mathcal{B}_V} = \{v_1, v_2, v_3 \ldots v_n\}$

$(G_B)_{ij} = \langle v_i ; v_j \rangle$ Simétrica (conmutatividad)

Definida positiva $\left([v]^B\right)^T \cdot G_B \cdot [u]^B = \langle u, v \rangle$

A es definida positiva

Si $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$x^T A x \geq 0 \wedge x^T A x = 0 \iff x = 0_V$

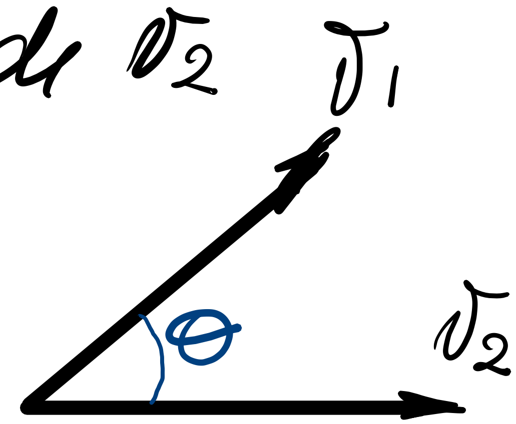
En $\mathbb{R}^2$ $G_B = \begin{pmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 \cos\theta \\ l_1 l_2 \cos\theta & l_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$a_{11} > 0 \wedge \det(A) > 0 \Rightarrow$ es def. $\oplus$

$B_{\mathbb{R}^2} = \{v_1, v_2\}$ $\quad a_{11} = \langle v_1, v_1 \rangle = \|v_1\|^2 = l_1^2$

l_1 es la long de v_1 $\quad l_2$ es la long de v_2

y θ es el ángulo entre v_1 y v_2



longitud del vector

Norma $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Propiedades ① $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$

$\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\alpha| \, \|v\|$

- $\forall v \in V \quad \|v\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|v\| = 0 \iff v = 0_V$

Axioma 4

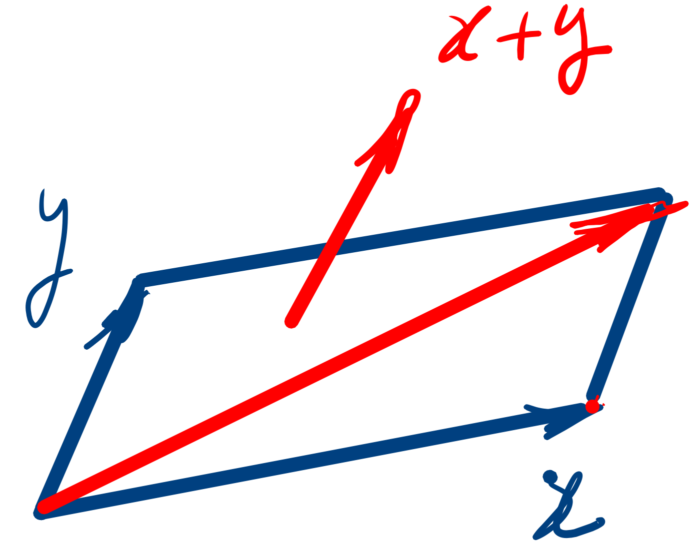
- Desigualdad de Cauchy Schwarz

  - $\forall u, v \in V \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$

Si $\underline{u \neq 0 \quad \wedge \quad v \neq 0}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1$

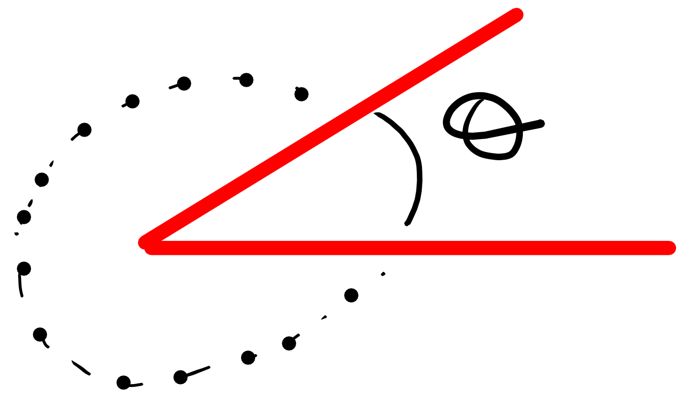
$\Rightarrow$ ① $\cos\theta = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|}$

θ: angulo entre u, v



- Desigualdad triangular

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$



- **Ortogonalidad** $u \perp v$ u es ortogonal a $v \Longleftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$ (Depende del p.i. definido en el espacio)

El 0_V es ortogonal a todo vector del espacio NO IMPORTA QUE PRODUCTO SE DEFINIÓ.

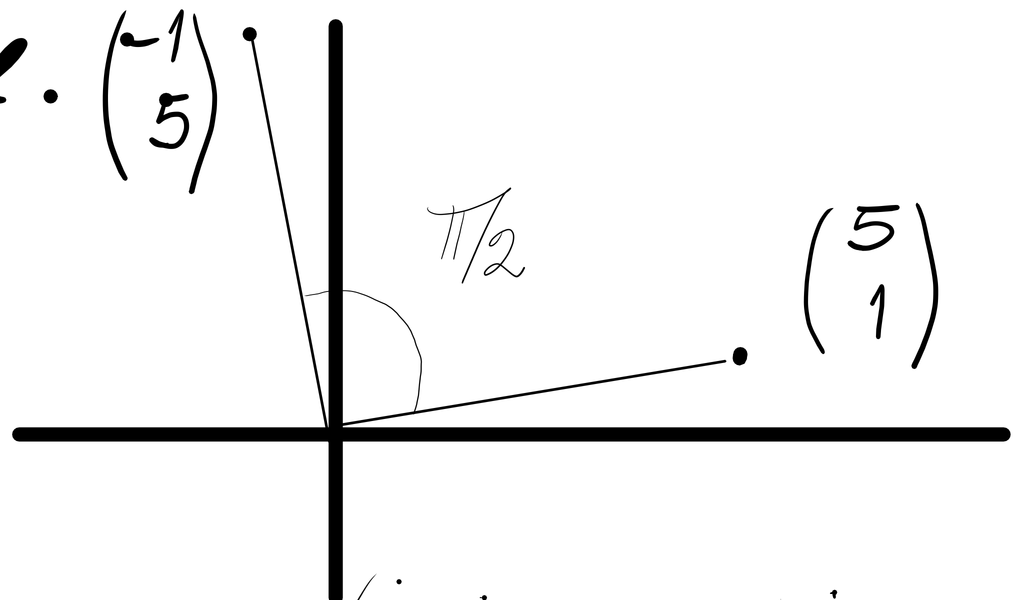
$$\langle 0_V ; u \rangle = \langle \underset{\alpha}{0} . v ; u \rangle = \underset{\alpha}{0} . \langle v, u \rangle = 0$$

$\forall u \in V$

Es el único que tiene esa propiedad

En $\mathbb{R}^n$ con p.i. canónico

$\langle u, v \rangle = v^T \cdot u$ la ortogonalidad coincide con el concepto escolar de perpendicularidad.



$$\left\langle \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix}5 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} =$$

$$= 5(-1) + 1 \cdot 5 = 0$$

Puedo definir un p.i. en $\mathbb{R}^2$ de modo que

$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{v_1}$ y el $\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}_{v_2}$ sean perpendiculares. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x_1 \\ \alpha - \beta = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x_1 \\ \alpha - \beta = x_2 \end{cases}$$

Resto $\quad 3\beta = x_1 - x_2 \quad \Longrightarrow$

$$\beta = \tfrac{1}{3}(x_1 - x_2)$$

$$\alpha = x_1 - \tfrac{2}{3}(x_1 - x_2) = \tfrac{1}{3}(x_1 + 2x_2)$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left(\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right]^B \right)^T G_B \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]^B$$

$$\begin{pmatrix} \tfrac{1}{3}(y_1 + 2y_2) & \tfrac{1}{3}(y_1 - y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tfrac{1}{3}(x_1 + 2x_2) \\ \tfrac{1}{3}(x_1 - x_2) \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = \tfrac{1}{3}(y_1 + 2y_2)\,\tfrac{1}{3}(x_1 + 2x_2) + 2 \cdot \tfrac{1}{3}(y_1 - y_2)\,\tfrac{1}{3}(x_1 - x_2)$$

$$= \tfrac{1}{9}\left(y_1 x_1 + \cancel{2y_1 x_2} + \cancel{2y_2 x_1} + 4x_2 y_2 + 2y_1 x_1 - \cancel{2y_1 x_2} - \cancel{2y_2 x_1} + 2y_2 x_2 \right) =$$

$$= \tfrac{1}{9}\left(3y_1 x_1 + 6x_2 y_2 \right) = \tfrac{1}{3} x_1 y_1 + \tfrac{2}{3} x_2 y_2$$

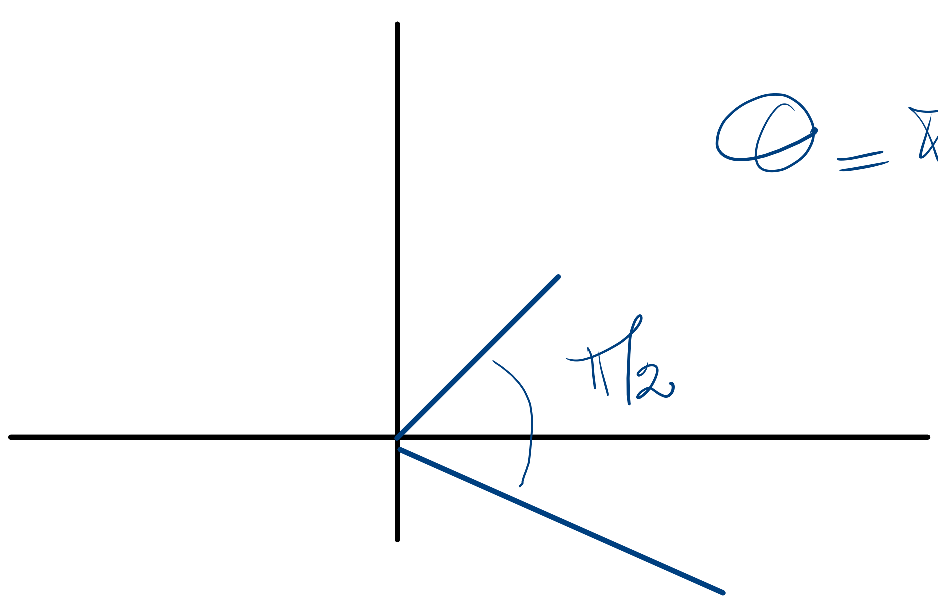
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \tfrac{1}{3} x_1 y_1 + \tfrac{2}{3} x_2 y_2 = \langle x, y \rangle$$

$$\|v_1\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\tfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 + \tfrac{2}{3}\, 1 \cdot 1} = \sqrt{1} = 1 \checkmark$$

long

$$\|v_2\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\tfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 + \tfrac{2}{3} (-1)(-1)} = \sqrt{2} \checkmark$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \tfrac{1}{3}\, 1 \cdot 2 + \tfrac{2}{3}\, 1(-1) = 0$$



$\theta = \pi/2$ para ESTE $\langle x, y \rangle = \tfrac{1}{3} x_1 y_1 + \tfrac{2}{3} x_2 y_2$

producto

interno

Ejemplo $V = \mathbb{R}_1[x]$

$$\langle p, q \rangle = \int_0^2 p(x)\, q(x)\, dx$$

Calcular $\langle p; q \rangle$ siendo $p(x) = 1$ $q(x) = x - 1$

$$\langle 1; x-1 \rangle = \int_0^2 1\,(x-1)\, dx = \int_0^2 (x - 1)\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x \Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - 2 - 0 + 0 = 0$$

Proposición Sean $\{v_1, v_2 \dots v_k\}$ vectores de V :

$\langle v_i; v_j \rangle = 0$ $i \neq j$, $v_i \neq 0$ $\forall$ $1 \leq i \leq k \Rightarrow$

$\{v_1, v_2 \dots v_k\}$ es LI

Armo la comb. lineal de los vectores e igualo al vector nulo

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$$

Tomo v_j cualquiera

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k ; v_j \rangle \underset{\text{Axiomas}}{=}$$

$$= \alpha_1 \cancel{\langle v_1 ; v_j \rangle}^{0} + \alpha_2 \cancel{\langle v_2 \, v_j \rangle}^{0} \cdots + \alpha_j \langle v_j \, v_j \rangle + \dots$$

$$\dots \alpha_k \cancel{\langle v_k ; v_j \rangle} = \langle 0 ; v_j \rangle$$

$\|v_j\|^2 \neq 0$

$v_j \neq 0_V$

$$\Rightarrow \alpha_j \underbrace{\|v_j\|}_{\neq 0}{}^2 = 0 \qquad \alpha_j = 0$$

Como v_j es cualquiera

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \Longrightarrow \{v_1, v_2, \dots v_k\}$$

es LI

$$\left.\begin{array}{l} \{v_1, v_2\} \quad \langle v_1 , v_2 \rangle = 0 \\ v_1 \neq 0 \qquad v_2 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{v_1, v_2\} \text{ es LI}$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_V$$

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 ; v_1 \rangle = \langle 0_V ; v_1 \rangle$$

$$\alpha_1 \langle v_1 , v_1 \rangle + \alpha_2 \cancel{\langle v_2 , v_1 \rangle} = 0 = \alpha_1 \underbrace{\|v_1\|^2}_{\neq 0} \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 ; v_2 \rangle = \langle 0_V ; v_2 \rangle$$

$$\alpha_1 \underbrace{\cancel{\langle v_1, v_2 \rangle}}_{0} + \alpha_2 \underbrace{\langle v_2, v_2 \rangle}_{\|v_2\|^2 \neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

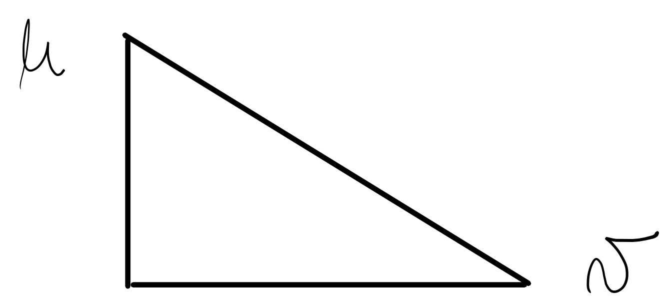
$$v_2 \neq 0$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ es LI

Si $v_1 \neq 0$ $\quad v_2 \neq 0$ $\quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ LI

Teorema de Pitágoras

V $\mathbb{K}$ espacio vectorial



$u \perp v$

long de hip. $\|u+v\|$ $\qquad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

long de catetos $\|u\|$ $\quad \|v\|$

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v ; u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \cancel{\langle u,v\rangle} + \cancel{\langle v,u\rangle} + \langle v,v\rangle =$$

$u \perp v$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2$$

En $\mathbb{R}$ espacio vectorial $(\mathbb{K}=\mathbb{R})$ vale el recíproco Si $\|u\|^2+\|v\|^2 = \|u+v\|^2 \Rightarrow u \perp v$

OJO no es cierto el recíproco

si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Complemento ortogonal de un subespacio $S \subset V$

$$S^{\perp} = \{ v \in V : \langle u,v\rangle = 0 \ \forall u \in S \}$$

Ej. hallar el complemento ortogonal de $S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

siendo el p.i. $\langle x,y\rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

Si se habla de ortogonalidad NECESITO CONOCER el p.i.

$$\langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

$$S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\} \qquad S^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle = 0\right\}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = 3x_1 \cdot 1 + x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/5\, x_2\\x_2\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}-3/5\\1\end{pmatrix}$$

$$5x_1 + 3x_2 = 0$$

$$x_1 = -3/5\, x_2 \quad \Longrightarrow \quad S^{\perp} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle = 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1(-5) + (-5) \cdot 2 = 0 \checkmark$$

OBS: si el producto es otro por ejemplo el pic $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix} \not\perp \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Existen infinitos producto internos que hacen que $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ sea $\perp$ $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Bases ortogonales y ortonormales

$B = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ BOG $\qquad B^* = \{u_1, u_2 \dots u_n\}$ BON.

$$G_B = \begin{pmatrix} l_1^2 & & 0 \\ & l_2^2 & \\ 0 & & \ddots \; l_n^2 \end{pmatrix} \qquad G_{B^*} = I$$

$$\langle v_i ; v_j \rangle \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \|v_i\|^2 > 0 & \text{si } i = j \end{cases} \qquad \langle v_i ; v_j \rangle \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \|v_i\|^2 = 1 & i = j \end{cases}$$

Coordenadas de un vector en una BON.

Sea $B = \{u_1, u_2 \dots u_n\}$ una BON de V

$\Rightarrow$ Todo vector $v \in V$ se escribe de manera única

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

Supongamos que quiero determinar α_j cualquiera $1 \leq j \leq n$

$$\langle v ; u_j \rangle = \alpha_j$$

$$\langle v; u_j \rangle = \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_j u_j + \dots \alpha_n u_n ; u_j \rangle$$

$$= \alpha_1 \cancel{\langle u_1 ; u_j \rangle} + \alpha_2 \cancel{\langle u_2 ; u_j \rangle} \dots + \alpha_j \langle u_j \, u_j \rangle + \dots + \alpha_n \cancel{\langle u_n \, u_j \rangle}$$

1

Como $\langle u_i ; u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = 1 \end{cases}$

$$= \boxed{\alpha_j}$$

$\mathbb{R}^2$ 1°) Quiero encontrar un producto interno para que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sea una BON.

Quiero $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1 \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 \quad \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Rightarrow G_B = I.$

FORMULA DEL PRODUCTO INTERNO

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left(\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right]^B \right)^T \underbrace{G_B}_{I} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]^B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x_1 \\ 2\alpha + \beta = x_2 \end{cases} \quad E_2 - 2E_1 \quad -3\beta = x_2 - 2x_1 \quad \beta = \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2$$

$$\alpha = x_1 - 2\beta = x_1 - \tfrac{4}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 = -\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{3}y_1 + \tfrac{2}{3}y_2 & \tfrac{2}{3}y_1 - \tfrac{1}{3}y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 \\ \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{9}x_1y_1 - \tfrac{2}{9}y_1x_2 - \tfrac{2}{9}x_1y_2 + \tfrac{4}{9}x_2y_2 + \tfrac{4}{9}x_1y_1 - \tfrac{2}{9}y_1x_2 -$$

$$- \tfrac{2}{9}y_2x_1 + \tfrac{1}{9}x_2y_2 = \tfrac{5}{9}x_1y_1 - \tfrac{4}{9}x_1y_2 - \tfrac{4}{9}y_1x_2 + \tfrac{5}{9}x_2y_2$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 5/9 (x_1 y_1 + x_2 y_2) - 4/9 (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = 5/9 (1+4) - 4/9 \; 4 = 25/9 - 16/9 = 9/9 = 1$$

$x_1 = y_1 = 1 \quad x_2 = y_2 = 2$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \quad x_1 = y_1 = 2 \quad x_2 = y_2 = 1$$

$$\to 5/9 (4+1) - 4/9 \cdot 4 = 1$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5/9 \cdot 4 - 4/9 (1+4) = 0$$

$x_1 = 1 \quad y_1 = 2$

$x_2 = 2 \quad y_2 = 1$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es BON con pi

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \overset{3}{\alpha_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \overset{1}{\alpha_2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 5 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 7 \quad E_2 - 2E_1 \star \end{cases}$$

$\star \quad -3\alpha_2 = -3 \quad \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 3$

$\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\}$ BON di $\mathbb{R}^2$

$$\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \right\rangle = 5/9\,(x_1y_1 + x_2y_2) - 4/9\,(x_1y_2 + x_2y_1).$$

$$\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle = 5/9\,(5.1 + 7.2) - 4/9\,(5.2 + 7.1)$$

$$= 95/9 - 68/9 = 27/9 = 3$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 5/9\,(5.2 + 7.1) - 4/9\,(5.1 + 7.2) =$$

$$= 5/9 \cdot 17 - 4/9\; 19 = 85/9 - 76/9 = 9/9 = 1$$

Proyección ortogonal

Sea $S \subset V$ un subespacio de V y $v \in V$. Decimos que v' es la proyección ortogonal de v sobre S si

1) $v' \in S$ 2) $v - v' \in S^{\perp}$ $P_S(v) = v'$

Recordar que $\dim V = n$

$S \oplus S^{\perp} = V$ $\forall v \in V$ $v = v_S + v_{S^{\perp}}$

$\Rightarrow P_S(v) = v_S = v'$ $P_{S^{\perp}}(v) = v_{S^{\perp}}$ (proyección de v sobre $S^{\perp}$)

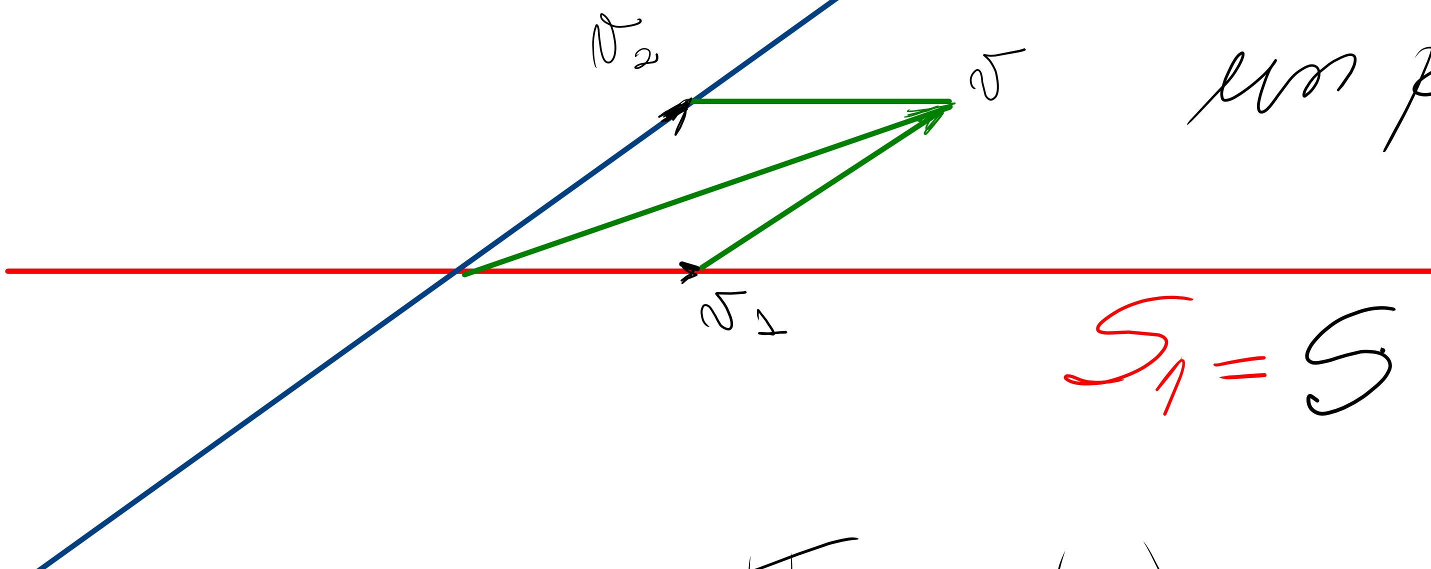
Pensando en lo que vimos de transformaciones lineales

$\Pi_{S, S^{\perp}}(v) = v_S \in S$

$S_1 \quad S_2$

$v - v_S = v_{S^{\perp}} \in S^{\perp}$

$S_2 = S^{\perp}$



$S_1 = S$

Siempre existe un pi para el cual $S_1 = S_2^{\perp}$

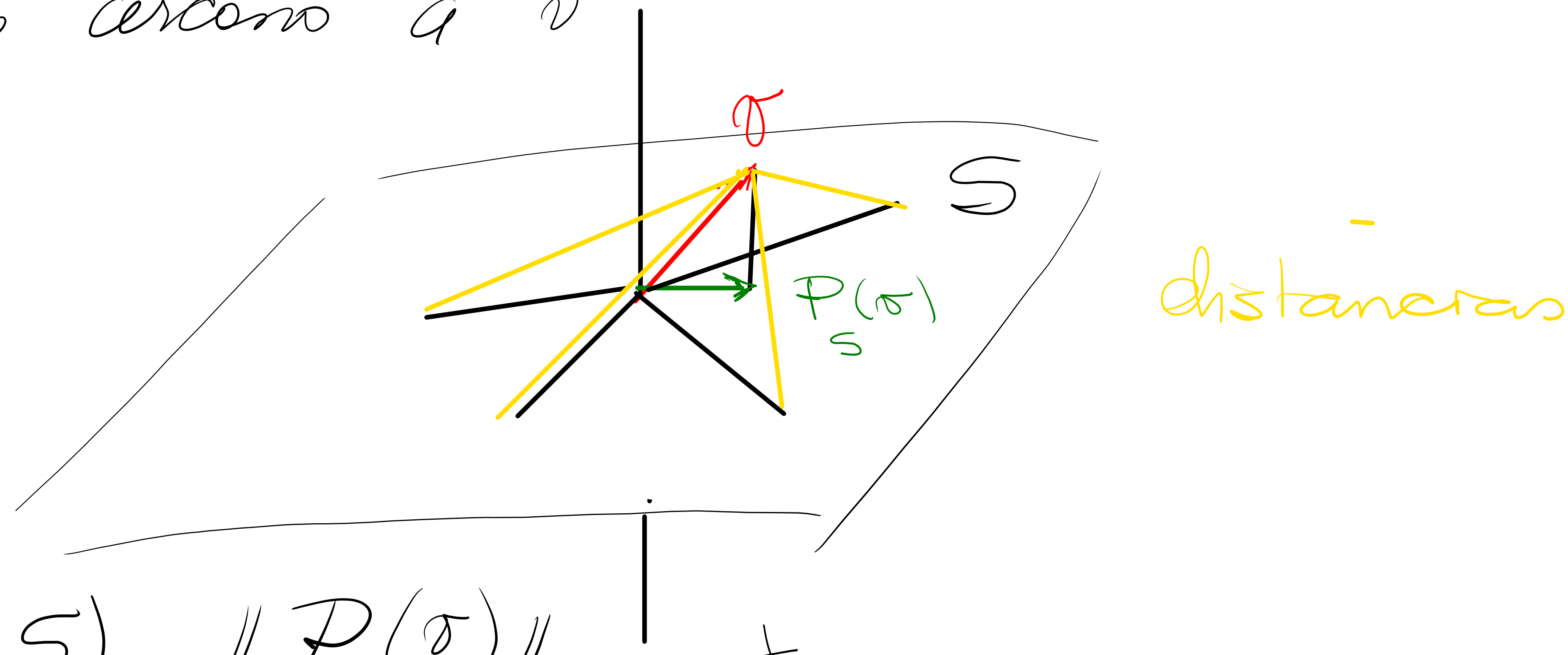
$$\Pi_{S_1 S_2}(v) = v_1$$

$$v = \underset{\in S_1}{v_1} + \underset{\in S_2}{v_2}$$

OBSERVACIONES

- Sea $v \in V$ si existe $P_S(v) = v'$ esta es única (si dim S es finita la $P_S(v)$ existe siempre)

• $\forall v \in S$ $P_S(v)$ es el punto del subespacio S más cercano a v



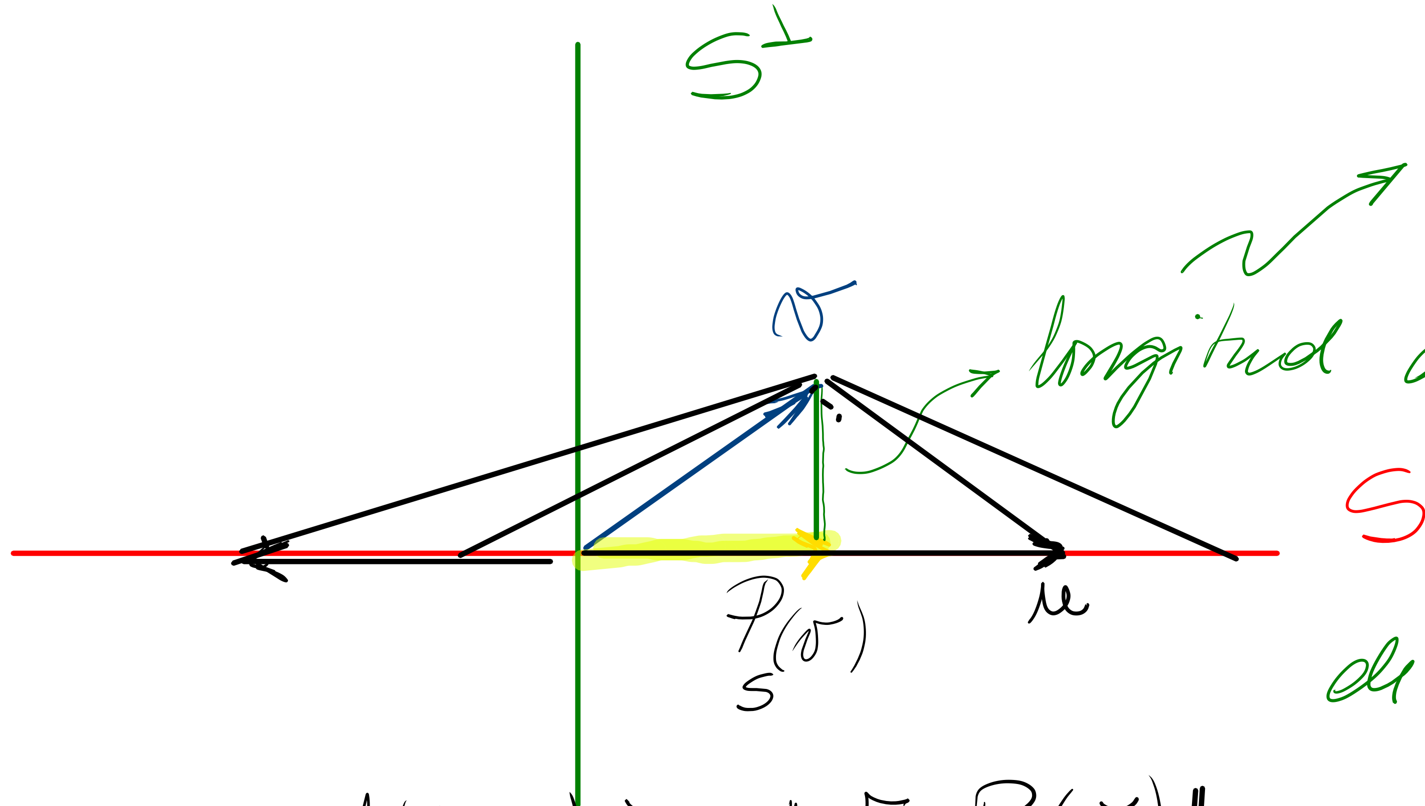
$d(v, S) = \| P_{S^\perp}(v) \|$

distancia de v al subespacio S

$\forall v \in V$ se cumple $d(v, P_S(v)) \leq d(v, u)$ $\forall u \in S$

$\| v - P_S(v) \|^2 \leq \| v - u \|^2$ $\forall u \in S$

$$\| v - P_S(v) \| = \| P_{S^\perp}(v) \|$$



longitud del segmento mide la distancia de v a S

$$d(v,u) > \| v - P_S(v) \|$$