

GUÍA Nº 8

ECUACIONES DIFERENCIALES

A. Problemas de Valores Iniciales (PVI)

- 1) Discretizar el siguiente problema de valores iniciales por el método de Euler

$$\frac{dy}{dt} = -y + t + 1 \quad t \geq 0 \quad y(0) = 1$$

- a) Utilizando un paso $k = 0.1$ avanzar 10 pasos el cálculo de la solución numérica.
b) Calcular el error global en $t=1$ sabiendo que la solución exacta es

$$y(t) = t + e^{-t}$$

- c) Mejorar los resultados mediante extrapolación de Richardson.

- 2) Discretizar el siguiente problema mediante el método de Euler y analizar la estabilidad numérica.

$$\frac{du}{dt} = u^2 \quad t_0 < t < \frac{1}{u_0} \quad u(t_0) = u_0 > 0$$

Analizar la estabilidad numérica si $u_0 < 0$ y $\frac{1}{u_0} < t_0 < t$.

- 3) Discretizar el siguiente problema mediante el método de Euler y analizar la estabilidad numérica.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2 \cdot u = 0 \quad t > 0 \quad u(0) = u_0 \quad u'(0) = u_0'$$

- 4) Discretizar el siguiente problema mediante el método de Euler y analizar la estabilidad numérica.

$$\frac{du_1}{dt} = u_2 \quad \frac{du_2}{dt} = -u_1 \quad t > 0 \quad u_1(0) = a \quad u_2(0) = b$$

- 5) Aproximar el siguiente problema por el método fuertemente implícito (Euler inverso) y analizar la estabilidad numérica. Analizar qué ocurre si $u(0) = -1$.

$$\frac{du}{dt} = -u^2 \quad t \geq 0 \quad u(0) = 1$$

- 6) Aproximar el siguiente problema por el método de Euler modificado (Runge-Kutta de orden 2):

$$\frac{du}{dt} = u + t \quad t \geq 0 \quad u(0) = 1$$

Analizar la estabilidad numérica. Avanzar 10 pasos de cálculo y comparar con la solución exacta $u(t) = 2 \cdot e^t - t - 1$.

- 7) Analizar la estabilidad del esquema de la rayuela (leap-frog) aplicado al siguiente problema.

$$\frac{du}{dt} = -u^2 \quad t \geq 0 \quad u(0) = a > 0$$

- 8) Aproximar el siguiente problema por el método de Euler. Utilizar un paso $k = 0.01$ y obtener $u(0.1)$. Estimar el tamaño de malla necesario para obtener una precisión de 10^{-4} .

$$\frac{du}{dt} - t - u - u \cdot t = 0 \quad t \geq 0 \quad u(0) = 1$$

- 9) Repetir el problema anterior, utilizando el método de Crank-Nicolson, con un paso $k = 0.025$. Comparar el esfuerzo de cálculo requerido por ambos métodos.
- 10) El problema diferencial $y' = -y + t + 1$, $0 < t < 1$, $y(0) = 1$, ha de ser integrado utilizando el esquema predictor-corrector explícito o del punto medio.
- Demostrar que el esquema es consistente y hallar su orden de precisión.
 - Utilizando un paso $k = 0.1$ avanzar 10 pasos el cálculo de la solución numérica.
 - Calcular el error cometido (ver problema 1 b)

- 11) Calcular $u(0.5)$ utilizando los siguientes métodos:

- Euler.
 - Predictor-corrector explícito (Punto medio).
 - Euler modificado (Runge-Kutta orden 2).
- aplicados al siguiente problema

$$\frac{du}{dt} + (1-t) \cdot u^3 = 0 \quad u(0) = 1$$

Obtener previamente el factor de amplificación y durante el cálculo verificar en cada paso que dicho factor es menor o igual que 1. Elegir un paso $k = 0.1$ por razones de precisión.

- 12) Sea el siguiente problema

$$u' - \frac{a}{u} = 0 \quad u(0) = 1$$

Discretizarlo utilizando los métodos:

- Runge-Kutta de orden 2 (Euler modificado).
- Crank-Nicolson.

Verificar el orden del error de truncamiento. Hallar las condiciones de estabilidad.

- 13) Sea el siguiente problema:

$$\frac{du}{dt} + u^2 \cdot t = 0 \quad u(0) = 1$$

Discretizarlo mediante el esquema de Crank-Nicolson y analizar la estabilidad suponiendo que u permanece positiva. Avanzar la solución un paso de cálculo tomando $k = 0.1$.

- 14) Sea el siguiente problema de valores iniciales:

$$y' = \left(\frac{2}{t}\right) \cdot y + t^2 \cdot e^t \quad 1 \leq t \leq 1.5 \quad y(1) = 0$$

cuya solución es $y(t) = t^2 \cdot (e^t - e)$.

- Obtener la solución numérica mediante el método de Euler, utilizando 2 pasos de cálculo distintos, $k = 0.1$ y $k = 0.05$. Mostrar cómo se refleja el orden de precisión del esquema en la reducción del error de truncamiento.
- Utilizar extrapolación de Richardson para obtener un valor más preciso de $y(1.5)$. Utilizar aritmética de punto flotante con 4 dígitos de precisión.

- 15) Dada la ecuación diferencial $\frac{du}{dt} + f(u, t) = 0$, se pide:
- Demostrar la consistencia del esquema de Euler modificado (Runge-Kutta de orden 2).
 - Idem anterior para el método de Adams-Bashforth de orden 2.
- 16) Dada la ecuación diferencial $\frac{du}{dt} + u = 0$, $u(0) = 1$, calcular $u(0.6)$ utilizando:
- Método predictor-corrector de Adams de orden 2, con pasos $k = 0.2$ y $k = 0.1$.
 - Método de Crank-Nicolson con pasos $k = 0.2$ y $k = 0.1$.
 - Obtener una mejor aproximación por extrapolación de Richardson. Indicar de qué orden es esta aproximación.
- 17) Resolver el siguiente sistema utilizando un método numérico apropiado.
- $$\begin{cases} u' + 2000 \cdot u - 1000 \cdot w = 1 \\ w' - u = 0 \end{cases} \quad u(0) = 0 \quad w(0) = 0$$
- 18) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:
- $$\begin{cases} u' + u \cdot v = 0 \\ v' + v^2 = 0 \end{cases}$$
- $$u(0) = a, \quad v(0) = 1, \quad a = \text{constante}$$
- Demostrar que si se discretiza el sistema por el método de Euler, la estabilidad numérica está sujeta a la restricción $k \leq 1/v$.
- 19) Transformar la ecuación diferencial:
- $$\frac{d^2 u}{dt^2} + \mu \cdot \frac{du}{dt} + w^2 \cdot u = 0 \quad \mu > 0$$
- en un sistema de ecuaciones de primer orden y discretizar según:
- Método predictor-corrector de Adams de orden 2.
 - Método fuertemente implícito (Euler inverso).
- Avanzar dos pasos de cálculo tomando $\mu = w = 1$, para las condiciones iniciales:
- $$u(0) = 1 \quad u'(0) = 1$$
- Elegir un paso de cálculo que garantice la estabilidad.
- 20) Sea el siguiente problema diferencial
- $$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0 \quad u(0) = 0 \quad u'(0) = 1$$
- Transformarlo en un problema de valores iniciales de primer orden.
 - Utilizar el método de Euler modificado para avanzar la solución hasta $t=0.4$. Utilizar dos pasos de tiempo: $k = 0.1$ y $k = 0.2$.
 - Sabiendo que la solución es $u(t) = \sin(t)$, determinar los errores cometidos y verificar que el método numérico tiene orden de precisión 2.
- 21) Analizar la estabilidad del problema $\frac{d^3 u}{dt^3} - 1 = 0$, reducido a un sistema de primer orden y resuelto por Euler.

22) Sea el problema rígido

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 1001 \cdot \frac{du}{dt} + 1000 \cdot u = 0 \quad u(0) = 1 \quad u'(0) = -1$$

- Convertir la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones de primer orden y discretizarlo mediante el método de Euler.
- Hallar la condición de estabilidad del problema numérico planteado, es decir, el valor de $k_{\max}$ tal que $k < k_{\max}$.
- Con las condiciones iniciales dadas, la solución del problema es $u(t) = e^{-t}$, es decir que solo está activa la componente lenta. Mostrar que con $k > k_{\max}$ cualquier perturbación dispara la componente rápida que se amplifica tornando inestable el cálculo.

 **Resuelto en el Campus**

B. Problemas de Valores Iniciales Conservativos (PVIC)

23) Sea el siguiente problema diferencial :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + f(u) = 0 \quad ; \quad f(u) = (1 + u^2) \cdot u \quad ; \quad u(0) = 1 \quad ; \quad u'(0) = 0$$

- Resolverlo utilizando el siguiente esquema:

$$u_{n+1} = u_n + h \cdot u'_n - \frac{k^2}{2} \cdot f(u_n)$$

$$u'_{n+1} = u'_n - \frac{k}{2} \cdot [f(u_n) + f(u_{n+1})]$$

Avanzar la solución 4 pasos de tiempo utilizando $k = \pi/20$ y 5 dígitos de precisión.

- La siguiente expresión debe permanecer constante para todo valor del tiempo :

$$E = \frac{1}{2} \cdot u'^2 + \frac{1}{2} \cdot u^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot u^2\right)$$

Verificar si esto sucede con los valores calculados. ¿Cuál es la fuente de variación?

24) Sea la siguiente ecuación diferencial :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \mu \cdot \frac{du}{dt} + w^2 \cdot u = 0$$

Discretizarla utilizando los métodos:

- Método de Newmark.
 - Método del salto de rana (rayuela).
- Analizar la estabilidad numérica.

Avanzar dos pasos de cálculo tomando $\mu = w = 1$, para las condiciones iniciales $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. Elegir un paso de cálculo que garantice la estabilidad.

25) Dada la ecuación diferencial :

$$u'' - e^u = 0 \quad ; \quad t \geq 0 \quad ; \quad u(0) = 0 \quad ; \quad u'(0) = \sqrt{2}$$

- Discretizar la ecuación por el método de Newmark y avanzar la solución dos pasos de cálculo, tomando $k = 0.1$. Trabajar con 4 dígitos de precisión y plantear una técnica iterativa para efectuar el cálculo.
- Hallar la matriz de amplificación

- 26) Dada la ecuación del oscilador armónico $u'' + \omega^2 u = 0$, mostrar que el método de Punto Medio produce soluciones oscilatorias, pero que no es conservativo. Determinar el tipo de oscilación que produce.
- 27) Dada la ecuación del oscilador armónico $u'' + \omega^2 u = 0$, discretizarlo por el método de la Rayuela (Salto de Rana). Explicar cómo arrancar el cálculo para asegurar orden de precisión 2. Hallar las raíces de la ecuación característica y mostrar que si se impone una solución oscilatoria, resulta un esquema conservativo.
- 28) Se tiene el siguiente problema diferencial:
- $$u'' + 40u = 10; u(0) = 0; u'(0) = 0$$
- a) Plantear su resolución numérica por el método más conveniente. Indicar el algoritmo de cálculo. Explicar el por qué de la elección.
- b) Elegir un paso de cálculo apropiado y calcular la solución numérica entre $t = 0$ y $t = 2$. Explicar el por qué de la elección.
- c) Explicar qué diferencias cualitativas se esperan entre la solución numérica y la del problema diferencial. Ilustrar gráficamente.

C. Problemas de Valores de Contorno (PVC)

- 29) El análisis en régimen estacionario de la conducción del calor a través de un sólido con generación interna de calor, está dado por el siguiente problema :

$$u'' + \left(\frac{p}{x}\right) \cdot u' + f(u) = 0; \quad 0 \leq x_0 \leq x \leq x_1; \quad u'(x_0) = 0; \quad u(x_1) = 1$$

Si el sólido es una placa plana y la generación de calor es constante, o sea :

$$p = 0; \quad f(u) = \frac{q}{k}$$

resulta para $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, el problema :

$$u'' + \frac{q}{k} = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u'(0) = 0; \quad u(1) = 1$$

La solución exacta de esta ecuación es : $u(x) = 1 + \left(\frac{q}{2 \cdot k}\right) \cdot (1 - x^2)$

Se pide encontrar el perfil de temperaturas $u(x)$ cuando $\frac{q}{k} = 2$.

Utilizar un paso de cálculo $k = 0.1$.

- 30) Resolver el siguiente problema por un método directo con un paso de cálculo $h = 0.1$.

$$u'' + \frac{u'}{x} + u = 0; \quad 1 \leq x \leq 2; \quad u'(1) = 0; \quad u(2) = 1$$

- 31) Resolver el siguiente problema por el método del tiro :

$$u'' + 2 \cdot (1 - x^2) \cdot u' + u^2 = 1; \quad -1 \leq x \leq 1; \quad u'(1) = 0; \quad u(2) = 1$$

32) Sea el siguiente problema :

$$u'' + x = 0 ; 0 \leq x \leq 1 ; u(0) = 1 ; u'(1) = 0$$

- Construir una aproximación en diferencias de orden de precisión 2, incluidas las condiciones de borde. Expresar el sistema de ecuaciones resultante en forma matricial.
- Resolver el problema para un paso de cálculo $h = 1/2$ y $h = 1/3$, utilizando eliminación de Gauss sin pivoteo y redondear los resultados a 4 dígitos.
- Aplicar extrapolación de Richardson para obtener una mejor aproximación de $u(x=1)$.

33) Dado el siguiente problema de valores de contorno :

$$u^{IV} = 0 ; u(0) = u_0 ; u'(0) = 0 ; u'(1) = 0 ; u''(1) = 0 ; 0 \leq x \leq 1$$

- Discretizarlo con un esquema de orden de precisión 2.
- Dividir el intervalo de cálculo en cinco subintervalos y plantear el sistema de ecuaciones en forma matricial, incluyendo las condiciones de borde con igual orden de precisión.

34) Dado el siguiente problema diferencial :

$$u'' + 11 \cdot u' + 10 \cdot u = 0 ; 0 \leq x \leq 1 ; u(0) = 0 ; u(1) = 1$$

- Plantear su resolución por el método del tiro. Para ello reducir la ecuación diferencial a dos ecuaciones de primer orden, aplicar el esquema de Crank-Nicolson e indicar el algoritmo que se utilizará. Tomar $h = 0.2$.
- Sea $v = u'$. Se sabe que los resultados obtenidos con dos tiros sucesivos fueron:

$$v(0) = 20 \rightarrow u(1) = 0.815$$

$$v(0) = 30 \rightarrow u(1) = 1.222$$

Utilizar estos resultados para realizar un tercer tiro. Indicar si son necesarios nuevos tiros. Trabajar con 4 dígitos de precisión.

- Graficar la solución obtenida en b) y extraer conclusiones, en relación al tipo de problema diferencial de que se trata y al error de truncamiento cometido.

35) Sea el problema $\frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0 ; u(0) = 0 ; u(1) = 1$

cuya solución es $u(x) = 1.18840 \cdot \sin(x)$

- Resolverlo utilizando un método directo de precisión 2, con un paso $h = 0.25$. Trabajar con una precisión de 5 decimales. Comparar los resultados con la solución exacta.
- Repetir el cálculo con la condición de borde. Verificar que la solución analítica satisface esta condición de borde.

36) Sea el problema $u \cdot \frac{du}{dx} - \alpha \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 ; 0 \leq x \leq L ; u(0) = U ; \frac{du}{dx}(L) = q$

- Discretizarlo con un método directo de orden 2. Plantear el sistema total de ecuaciones algebraicas para paso $h = L/2$.
- El sistema de ecuaciones es no lineal. Plantear el sistema a resolver en cada iteración según el método de Newton Raphson.

37) Sea el problema : $0.1 u'' + u' + u = 0 ; 0 \leq x \leq 1 ; u(0) = 0 ; u(1) = 1$

- Hallar la solución numérica por un método directo centrado con paso $h = 0.25$. Resolver el sistema resultante y graficar la solución obtenida.
- Resolver nuevamente por el método de "upwinding" con igual paso. Graficar la solución obtenida.
- Siendo la solución analítica $u(x) = 3.08777 (e^{-1.12702 x} - e^{-8.87298 x})$, comparar y comentar sobre los resultados obtenidos.