GUÍA Nº 5

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

A. Ajuste

1) Se tiene la siguiente tabla de datos:

x	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
y	3.8	3.7	4.0	3.9	4.3	4.2	4.2	4.4	4.5	4.5

a) Encontrar una función lineal que aproxime estos datos por cuadrados mínimos. Utilizar esta curva para suavizar los datos.
b) Repetir el punto anterior con una función cuadrática.
c) Comparar los resultados.

2) El nivel de agua en el Mar del Norte está determinado principalmente por la marea llamada M2, cuyo período es de aproximadamente 12 horas. Se han realizado las siguientes mediciones:

t(horas)	0	2	4	6	8	10
H(t)(m)	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

a) Ajustar la serie de mediciones usando el método de los cuadrados mínimos y la función

$$H_1^*(t) = h_0 + a_1 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12}\right)$$

b) Calcular errores que permitan estimar la precisión de la aproximación realizada en a)
c) Utilizar ahora la función

$$H_2^*(t) = h_0 + a_1 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12}\right) + a_2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12}\right)$$

d) Repetir b) para la nueva función aproximante. Comparar. Obtener conclusiones.

3) Dada la siguiente colección de datos, elegir la curva de aproximación y analizar los errores respecto de los valores dados.

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

4) Construir las aproximaciones indicadas, calcular los errores y obtener conclusiones para las dos series de datos que se presentan.

a) Aproximación polinómica de grado 1.
b) Aproximación polinómica de grado 2.
c) Aproximación polinómica de grado 3.
d) Aproximación de la forma $b \cdot e^{a \cdot x}$.
e) Aproximación de la forma $b \cdot x^a$.

x	y
4.0	102.56
4.2	113.18
4.5	130.11
4.7	142.05
5.1	167.53
5.5	195.14
5.9	224.87
6.3	256.73
6.8	299.50
7.1	326.72

x	y
0.2	0.050446
0.3	0.098426
0.6	0.332770
0.9	0.726600
1.1	1.097200
1.3	1.569700
1.4	1.848700
1.6	2.501500

5) Para 5 instantes de tiempo se observaron los siguientes valores de un parámetro físico

t	-2	-1	0	1	2
u	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2

Mostrar que, si los datos se ajustan con una parábola $\psi(t)$, la aproximación en t=0 es:

$$\psi(0) = \frac{1}{35}\left\{-3u_{-2} + 12u_{-1} + 17u_0 + 12u_1 + -3u_2\right\}$$

6) Encontrar la aproximación polinómica de grado 1 y 2 de $f(x)$ en el intervalo indicado.

a) $f(x) = x^2 - 2\cdot x + 3$ $\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$ d) $f(x) = x^3 - 1$ $\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}$
b) $f(x) = 1/x$ $\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}$ e) $f(x) = e^x$ $\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$
c) $f(x) = \cos(\pi\cdot x)$ $\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$ f) $f(x) = \ln(x)$ $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$

B. Interpolación

7) Calcular f(3) utilizando la fórmula de Newton, dada la siguiente tabla:

x	1	2	4	5
f(x)	0	2	12	21

a) Tomar los puntos 1, 2 y 4 y luego los puntos 2, 4 y 5.
b) Calcular f(3) por interpolación cúbica.
c) Comparar los resultados de (a) y (b). Obtener conclusiones.

8) Calcular f(0) utilizando la fórmula de Newton, dada la siguiente tabla:

x	0.1	0.2	0.4	0.8
f(x)	64987	62055	56074	43609

Notar que la fórmula de interpolación se utiliza para extrapolar.

Analizar si la extrapolación es admisible.

9) Encontrar el polinomio de grado 3 que pasa por los siguientes puntos utilizando la fórmula de Lagrange:

x	0	1	2	4
y	1	1	2	5

10) Hallar los valores de $(1.01)^{1/2}$ y $(1.28)^{1/2}$, a partir de la siguiente tabla, por interpolación de Newton con 3 dígitos significativos:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$(x)^{1/2}$	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1 14017

11) Hallar un polinomio Q de grado 3 tal que Q(0)=0, Q'(0)=1, Q(1)=3 y Q'(1)=6.

12) Aproximar los datos con un polinomio de grado 2, por cuadrados mínimos y graficar la solución.

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

a) Calcular los errores para cada dato de la tabla. Calcular el error mínimo que puede ser obtenido con un polinomio cuadrático.
b) Calcular el polinomio interpolante de Lagrange de grado 2, en los nodos 0, 0.5 y 1. Graficar la solución y calcular los errores para cada dato de la tabla.
c) Comparar los resultados obtenidos y determinar cuál solución aproxima mejor a la curva en [0,1].
d) Comparar los resultados obtenidos con la función $f(x) = e^x$ en los puntos 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 ; calcular los errores y obtener conclusiones.

13) Cada 10 años se realiza un censo de población en los Estados Unidos. La siguiente tabla presenta los resultados entre 1930 y 1980.

Año	1930	1940	1950	1960	1970	1980
Población en miles	123203	131669	150697	179323	203212	226505

a) Hallar el polinomio de Lagrange de grado 5 que aproxime estos datos.
b) Hallar el polinomio de Newton de grado 5.
c) Utilizar las aproximaciones anteriores para estimar la población en 1920, 1965 y 2000. Comparar los resultados.
d) La población en 1920 fue de 105.711 millones de habitantes. En base a este dato, indicar qué tan exactos cree usted que son sus resultados de 1965 y 2000.

14) Hallar el polinomio interpolante de Hermite de grado 5 y estimar el valor para x = 0.34 de la función f(x) = sen x.

x	0.30	0.32	0.35
sen x	0.29552	0.31457	0.34290

Determinar una cota de error para la aproximación anterior y comparar con el error real.

Agregar sen(0.33) = 0.32404 a los datos y rehacer los cálculos.

En ambos casos completar la tabla con los valores de la derivada.

15) Un coche que viaja en una carretera recta es cronometrado en algunos puntos. Los datos obtenidos se dan en la siguiente tabla. Utilice un polinomio de Hermite para predecir la posición del coche y su velocidad cuando t = 10 segundos.

Tiempo (seg)	0.00	3.00	5.00	8.00	13.00
Distancia (m)	0.00	67.50	114.90	186.90	297.90
Velocidad (m/s)	22.50	23.10	24.00	22.20	21.60

16) Se tiene la función f(x) = e^x, de la cual se proveen los siguientes valores:

x	0.0	0.5	1.0	2.0
f(x)	1.00000	1.64872	2.71828	7.38906

a) Estimar f(0.25) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0$ y $x_1 = 0.5$.
b) Estimar f(0.75) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0.5$ y $x_1 = 1.0$.
c) Estimar f(0.25) y f(0.75) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0$, $x_1 = 1.0$ y $x_2 = 2.0$.
d) Estimar los errores de truncamiento de los cálculos realizados en los puntos a, b y c en base a la fórmula:

$$f(x) = f^*(x) + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

Compararlos con los valores "exactos" calculados a partir de los valores reales de la función f(0.25) = 1.28403 y f(0.75) =2.11700.
e) Indicar qué aproximaciones resultaron más precisas y por qué.