GUÍA Nº 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

A. Métodos Directos

1) Resolver el sistema lineal $A \cdot x = b$ utilizando eliminación de Gauss sin pivoteo, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{Bmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{Bmatrix}$$

2) Calcular la inversa de la matriz *A* resolviendo el sistema $A \cdot X = I$, utilizando eliminación de Gauss, siendo *I* la matriz identidad y *X* la matriz inversa de *A*. ¿Qué es lo que se obtiene si se utiliza pivoteo?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Dada la siguiente descomposición *LU* de Doolittle de la matriz *A* efectuada utilizando pivoteo parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \quad p = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

   a) resolver el sistema de ecuaciones *Ax = b* siendo

$$b = \{1 \quad -2 \quad 7\}^T$$

   b) obtener la matriz A y verificar la solución obtenida en a)

4) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 3.241 & 160 \\ 10200 & 1540 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 163.2 \\ 11740 \end{Bmatrix}$$

   a) Utilizar el método de eliminación de Gauss sin pivoteo y aritmética de punto flotante con t=4 y redondeo simétrico.
   b) Ídem a) pero con pivoteo parcial.
   c) Ídem a), sin pivoteo y con refinamiento de la solución.
   d) Obtener conclusiones.

5) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ -4.12 & 2.29 & 0.294 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.22 \\ -3.56 \\ -0.972 \end{Bmatrix}$$

Utilizar eliminación de Gauss con pivoteo parcial. Hallar la descomposición LU de la matriz de coeficientes y utilizarla para hallar una estimación del error de redondeo, refinando la solución. Utilizar aritmética de punto flotante con 3 dígitos.

6) Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0.721 \cdot x - 0.352 \cdot y = 1.62$$
$$0.836 \cdot x - 0.410 \cdot y = 1.89$$

a) Resolverlo utilizando eliminación de Gauss con pivoteo parcial. Hallar la descomposición LU de la matriz de coeficientes. Trabajar con una precisión de 3 dígitos.
b) Hallar dos refinamientos de la solución obtenida en el punto a) utilizando la descomposición LU.

7) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$0.001325 \cdot x_1 - 5.843 \cdot x_2 = 5.844$$
$$3.128 \cdot x_1 - 2.745 \cdot x_2 = 0.3831$$

a) Obtener las soluciones numéricas utilizando eliminación de Gauss sin y con pivoteo parcial.
b) Hallar estimaciones de los errores de redondeo en los resultados obtenidos en a). No considerar errores en los coeficientes ni en los términos independientes. Obtener conclusiones.

8) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0.003152 & -15.28 \\ -0.009413 & 45.60 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.98 \\ -44.75 \end{Bmatrix}$$

a) Obtenerla solución numérica utilizando dos algoritmos: eliminación de Gauss con pivoteo parcial y eliminación de Gauss con pivoteo total.
b) Estimar el número de condición de la matriz de coeficientes.
c) En base a los resultados obtenidos en los puntos a) y b), indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y por qué:
   - El primer algoritmo está mal condicionado.
   - El segundo algoritmo está mal condicionado.
   - El problema está mal condicionado.

9) Sea el sistema de ecuaciones lineales Ax=b , donde:

$$A = \begin{bmatrix} 3.142 & -2.458 & 0.7542 \\ -1.154 & 5.258 & -0.4385 \\ 2.374 & -7.518 & -3.246 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{Bmatrix} 7.177 \\ -6.879 \\ 2.886 \end{Bmatrix}$$

a) Obtener la solución utilizando eliminación de Gauss con pivoteo parcial. Hallar la descomposición LU de la matriz de coeficientes. Trabajar con 4 dígitos de precisión.
b) Hallar el factor de amplificación FB de los errores de entrada en b mediante perturbaciones experimentales. Tomar:

$$\delta b = \{0.1 \quad 0.1 \quad 0.1\}^T$$

utilizar la descomposición LU y el estimador

$$F_B = \frac{\|dx\| / \|x\|}{\|db\| / \|b\|}$$

c) Efectuar un refinamiento utilizando la descomposición LU y, en base a los resultados, estimar el número de condición de la matriz KA.
d) Comparar log (FB) y log (KA) y obtener conclusiones.
e) Estimar el orden de magnitud de la perturbación que se produciría en x si la matriz A se perturbara en un 5%.

10) Describir como se simplifica el algoritmo del método de eliminación de Gauss para el caso particular en que la matriz de coeficientes es simétrica definida positiva.

B. Métodos Iterativos

11) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales con los Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y Sobrerrelajaciones. Obtener el factor óptimo en este último método.:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{Bmatrix}$$

12) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0.01235 & -2.387 \\ 5.462 & 0.008406 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.370 \\ 10.85 \end{Bmatrix}$$

a) Resolverlo por el método de Jacobi. Trabajar con punto flotante con 5 dígitos de precisión.
b) Efectuar las modificaciones necesarias para garantizar la convergencia y volver a resolver con el mismo tipo de representación.
c) Explicar la convergencia o no de los algoritmos de los puntos a y b en términos de la norma de la matriz de iteración.

13) Resolver el siguiente sistema utilizando el método de Gauss-Seidel, iterando hasta que la máxima diferencia entre dos valores sucesivos de x, y ó z sea menor que 0.02. Indicar si esto último significa que la solución obtenida está en un intervalo de radio 0.02 alrededor de la solución exacta.

$$\begin{aligned} 10x + 2y + 6z &= 28 \\ x + 10y + 4z &= 7 \\ 2x - 7y - 10z &= -17 \end{aligned}$$

14) Resolver el siguiente sistema utilizando el método SOR para distintos valores del coeficiente de sobrerrelajación

$$\begin{aligned} a \qquad\qquad + d &= 2 \\ a + 4b \qquad - d &= 4 \\ a + \qquad c \qquad &= 2 \\ c + d &= 2 \end{aligned}$$

15) Considerar el sistema poco denso de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2a - b \qquad\qquad &= 1 \\ -a + 2b - c \qquad &= 1 \\ -b + 2c - d &= 1 \\ -c + 2d &= 1 \end{aligned}$$

Mostrar que el sistema permanece poco denso cuando se lleva a la forma triangular utilizando el método de eliminación de Gauss. Hallar la solución por Gauss y luego por Gauss-Seidel.

16) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3.210\, x_1 + 0.943\, x_2 + 1.020\, x_3 &= 2.300 \\ 0.745\, x_1 \qquad\qquad - 1.290\, x_3 &= 0.740 \\ 0.875\, x_1 - 2.540\, x_2 + 0.247\, x_3 &= 3.390 \end{aligned}$$

a) Efectuar las modificaciones necesarias para poder garantizar la convergencia utilizando el método de Gauss-Seidel.
b) Resolverlo iterando hasta alcanzar una precisión de 3 dígitos significativos, sin exceder un máximo de 5 iteraciones. Trabajar con una precisión que garantice un error de redondeo despreciable.
c) Establecer la cantidad de dígitos significativos efectivamente obtenidos en el punto a), para cada una de las 3 componentes del vector solución. Indicar si se verifica el criterio para acotar el error de truncamiento por medio de la norma de la diferencia entre dos vectores solución consecutivos.
d) Determinar cómo influye un error absoluto de 0.01 en el primer coeficiente de la primera ecuación sobre los valores calculados de x_1, x_2 y x_3.