GUÍA Nº 4

ECUACIONES NO LINEALES

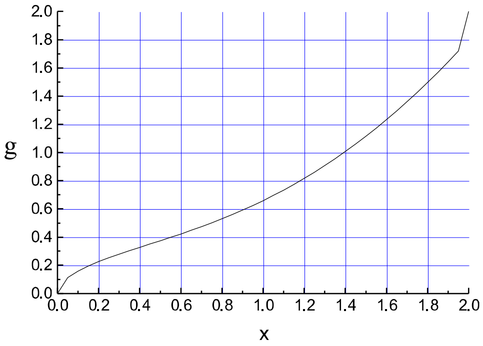
1) Sea $F(x) = \dfrac{x^2}{4} - \mathrm{sen}(x)$. Se desea encontrar la primer raíz positiva de F(x).

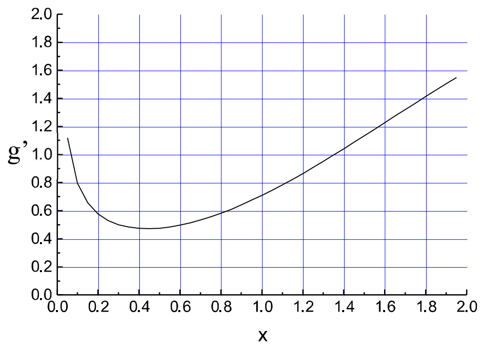
   a) Hallar un intervalo de partida para utilizar el método de bisección.
   b) Estimar el número de aproximaciones necesarias para hallar la raíz con una tolerancia para el error absoluto de 0.02. Calcular la raíz.
   c) Si la tolerancia de 0.02 es sobre el error relativo, cuántas aproximaciones se requieren?
   d) Sabiendo que la raíz buscada a 5 decimales correctos es α =1.93375 obtener conclusiones sobre la performance del método.
   e) Estimar el orden de convergencia en forma experimental.

2) Utilizar el método de Regula-Falsi para hallar la raíz del ejercicio 1. Realice varias aproximaciones, con el objeto de poder estimar experimentalmente el orden de convergencia del método. Compare sus resultados con los del ej. 1.

3) La función $\mathrm{F(x)} = \mathrm{sen(x)} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{x}}$ tiene 2 ceros en I=[0,2]. Uno es x=0; se desea hallar el otro. Para ello se utilizará un método de punto fijo basado en la función de iteración $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} - \mathrm{F(x)}$. Las figuras muestran g y g' en I.

   a) Hallar, mediante justificación teórica, un intervalo que contenga al cero buscado como único cero de F(x). Mostrar que en dicho intervalo el método propuesto converge.
   b) Hallar el cero con una tolerancia del 1% para el error relativo entre 2 pasos consecutivos.
   c) Hallar el orden de convergencia del método y la constante asintótica del error





4) Se desea hallar la primer raíz positiva de la ecuación x=cos(x) con el método de Newton-Raphson.

   a) Plantee el método para el problema de punto fijo planteado.
   b) Estudie las propiedades de convergencia del método propuesto. Encuentre explícitamente un intervalo de convergencia.
   c) Encuentre el cero buscado con una tolerancia para el error relativo del 10^{-10}.
   d) Estime en forma experimental el orden de convergencia del método.

5) La raíz real r de la ecuación $x^3 = x + 4$ puede ser escrita en la forma:

$$r = \left(2 + \frac{1}{9}\cdot 321^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2 - \frac{1}{9}\cdot 321^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

a) Calcular r con 4 decimales significativos, utilizando la expresión.
b) Recalcular r con la misma precisión por el método de Newton con x_0=2.
c) Comparar los resultados anteriores y obtener conclusiones.

6) Determinar la raíz de la ecuación $x = 7/3 - e^{-2\cdot x}$ en el intervalo [-1, 1], con los métodos de Newton-Raphson, Bisección y Regula Falsi con 4 decimales significativos. Comparar la cantidad de iteraciones necesarias para llegar a la precisión pedida y con qué velocidad de convergencia lo hacen.

7) Sea la ecuación $F(x) = x^3 - 9\cdot x^2 + 24\cdot x - 20 = 0$.

a) Aplicar el método de Newton-Raphson con x_0=1.5. Detener el proceso cuando se obtengan 2 decimales significativos.
b) Aplicar el método de Newton-Raphson para el caso de raíces múltiples y las mismas condiciones del punto a).

8) Hallar la raíz de la función $F(x) = 1.5 - \ln(1 + x^2)$, utilizando el método de Newton-Raphson. Utilizar aritmética de punto flotante con 5 dígitos de precisión para las operaciones y redondear el logaritmo a 4 dígitos significativos. Estimar el error de redondeo, determinando cuál es la fuente que más contribuye a este error. Tener en cuenta que este error proviene básicamente de la evaluación de f(x).

9) Mostrar que la aplicación del método de Newton-Raphson para hallar la raíz de la función $F(x) = e^x - x - 1$ produce convergencia lineal. Partir x_0=1. Indicar cuál es el comportamiento esperado a priori, a qué se puede deber el comportamiento observado y cómo lo corregiría.

10) Se desea hallar la raíz de la función $F(x) = \sin(x)$ que se encuentra en el intervalo $3 < x < 3.3$ con una precisión de 6 dígitos significativos.

a) Utilizar el método de Newton-Raphson partiendo de x_0=3. Suponer que $F(x)$ y $F'(x)$ solo se conocen con una precisión de 4 decimales significativos.
b) Demostrar a partir de la gráfica de proceso, cómo el error de redondeo en los valores de $F(x)$ y $F'(x)$ impide obtener la precisión requerida. Comparar el error en la raíz estimado de este modo, con el error "exacto" obtenido comparando el resultado con el valor de la raíz exacta.

11) Se desea hallar la raíz de la función:

$$F(x) = x^4 - 14.564\cdot x + 16.804$$

a) Utilizar el método de Newton Raphson, con 6 dígitos de precisión. Obtener convergencia a 3 dígitos. Tomar x_0=1.4.

b) Mostrar que la velocidad de convergencia no es cuadrática. Determinar dicho orden y dar una explicación sobre la causa de la pérdida de velocidad de convergencia.
c) Mostrar que los cálculos con la fórmula iterativa :

$$x^{k+1} = x^k - q \cdot \frac{F(x^k)}{F'(x^k)}$$

tomando q=1.9, convergen más rápidamente.
d) Dar una interpretación al parámetro q.

12) Dada la profundidad h y el período T de una ola, su longitud de onda l surge de la relación de dispersión $w^2 = g \cdot k \cdot \tanh(k \cdot h)$, donde $w = (2 \cdot \pi)/T$ es la pulsación, g es la aceleración de la gravedad y $k = (2 \cdot \pi)/l$ es el número de onda. Conociendo $g = 9.8 m/s^2$ y $h = 4m$, se desea calcular cuál es la longitud de onda correspondiente a una ola con $T = 5seg$.

a) Utilizar un método de punto fijo para calcular la solución con 1 dígito de precisión, partiendo de k=1.
b) Utilizar el método de Newton Raphson para calcular la solución con 4 dígitos de precisión. Partir del resultado obtenido en a).

13) El método de la secante para resolver el problema de punto fijo *F*(x)=0 consiste en utilizar la aproximación

$$F'(x_n) \approx \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

en la fórmula correspondiente del método de Newton-Raphson.
a) Aplique el método de la secante para hallar la raíz no nula de

$$F(x) = \frac{x^2}{4} - \operatorname{sen}(x)$$

con una tolerancia del 0.1%.
b) Encuentre experimentalmente el orden de convergencia del método y compárelo con el de Newton-Raphson.

14) Determinar las raíces de las siguientes ecuaciones con el método de la secante con 5 decimales significativos:

a) $2 \cdot x = e^{-x}$ b) $\tan(x) + \cos(h \cdot x) = 0$

15) Sea el sistema de ecuaciones no lineal

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$g(x,y) = x \cdot y - 1 = 0$$

Resolverlo por el método de Newton-Raphson con x_0=2 y y_0=0.

16) Sea el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$x_1 \cdot x_2^2 = 11.20$$
$$x_1 + x_2 = -1.83$$

a) Hallar la solución utilizando el método de Newton-Raphson. Partir de los valores de x_1=1, x_2=-3, y utilizar aritmética de punto flotante con 3 dígitos de precisión.

b) Volver a hallar la solución con la misma precisión, pero esta vez por el método de Gauss-Seidel no lineal, partiendo de los mismos valores que en el punto a.
c) Justificar el comportamiento oscilatorio observado en el punto anterior en términos del error de redondeo.

17) Sea el sistema no lineal:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 4.188$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3.677$$
$$x_1 + 1.258 \cdot x_2 = 0$$

a) Resolverlo por el método de Newton Raphson, partiendo de: $x^{(o)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ con 3 iteraciones.
b) Ídem punto a), sin actualizar la matriz de coeficientes.
c) Mostrar que el orden de convergencia es de aproximadamente 0.5.

18) Se desea resolver el siguiente SENL

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$
$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \mathrm{sen}(x_3) + 1.06 = 0$$
$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

con una precisión de 10^{-6} para $\left\| \varepsilon_{k+1} \right\|_\infty$, donde ε_{k+1} es el error absoluto entre dos iteraciones consecutivas.
a) Utilizar un método de punto fijo
b) Acelerar la convergencia de a) usando el criterio de Gauss-Seidel
c) Utilizar el método de Newton