3.14 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$Col(A) \neq \mathbb{R}^3$

$\rho(A) = 2$

En cada uno de los siguientes casos, hallar las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$, determinar la de norma mínima, y calcular el error cuadrático $\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|b - Ax\|^2$

$C_3 = C_1 + C_2$

(a) $b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

Como $\{C_1, C_2, C_3\}$ LD hay inf. soluciones

(b) $b = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

$Ax = b \qquad Col(A) = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \notin Col(A) \Rightarrow$ lo mejor que podemos encontrar es un $\hat{x}$ tal que $A\hat{x} = \underset{Col(A)}{P(b)}$

$\hat{x}$ no es único, pero $\underset{Col(A)}{P}\, b$ es única

$(Col(A))^{\perp} = gen\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_1}\right\}$

$$\underset{Col(A)}{P(b)} = b - \underset{(Col(A))^{\perp}}{P(b)} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} - \frac{\langle v_1, b\rangle v_1}{\|v_1\|^2} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} - \frac{3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{3} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \hat{x} \text{ es tal que } A\hat{x} = \underline{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}} \in Col(A)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\cdot r_1 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\cdot r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución general: $X = \begin{pmatrix} 1 - x_3 \\ 2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -1\cdot x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \quad (1)$$

Solución gral $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\in Nul(A)}$

Otra forma Si $A\hat{x} = \underset{Col(A)}{P(b)} \Rightarrow A\hat{x} - b \in (Col(A))^{\perp} = (Fil(A^T))^{\perp} \Rightarrow A\hat{x} - b$ es ortog a $Fil(A^T) \Rightarrow$

$b - A\hat{x}$ es $\underset{(Col(A))^{\perp}}{P(b)}$

$A^T(A\hat{x} - b) = 0 \Rightarrow A^TA\hat{x} = A^Tb$. Sistema siempre es compatible

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\hat{x} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \underset{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}{b} \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$$

No escribir esto NUNCA

~~$Ax = b$ incomp. $\Rightarrow$ multiplico ambos miembros por $A^T \Rightarrow A^TAx = A^Tb$~~

La solución general: $X = \begin{pmatrix} 1 - x_3 \\ 2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

La solución no es única porque las columnas de A forman un cj. LD

$g(x_3) = \|\hat{x}\|^2 = (1-x_3)^2 + (2-x_3)^2 + x_3^2 \geq 0$ (tiene mínimo)

Derivo $g'(x_3) = -2(1-x_3) - 2(2-x_3) + 2x_3 = 0$

$-2 + 2x_3 - 4 + 2x_3 + 2x_3 = 0$

$6x_3 = 6 \qquad x_3 = 1 \qquad g''(x_3) = 6 > 0 \rightarrow$ Mínimo

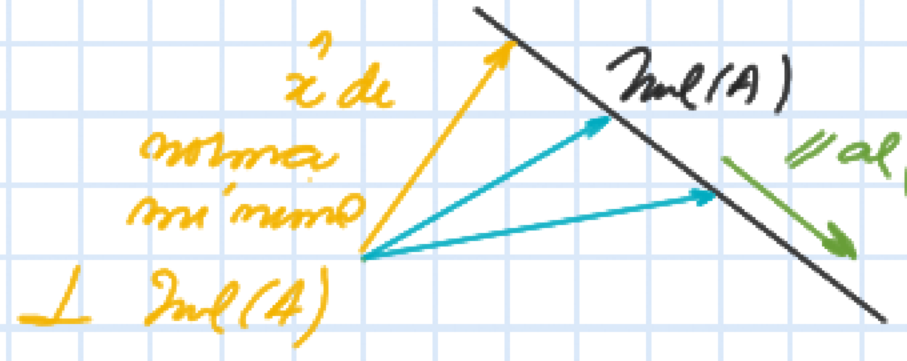
$\Rightarrow$ el $\hat{x}$ de norma mínima $\hat{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \|\hat{x}\| = \sqrt{2}$

OBS $\hat{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\in Nul(A)} \qquad \hat{x} = \begin{pmatrix}1-\alpha\\2-\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \in Fil(A) \Rightarrow$

$1 - \alpha + 2 - \alpha - \alpha = 0$

$3\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 1$

El $\hat{x}$ de norma mínima $\in Fil(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$



$\parallel$ al $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\underbrace{\hat{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{de norma mínima}} \in Fil(A)$

Error $\|b - A\hat{x}\|^2 = \|\underset{(Col(A))^{\perp}}{P(b)}\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2 = 3$

(b) a cargo del estudiante.

Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $\wedge$ $\rho(A) = 3$ $\quad Col(A) = \mathbb{R}^3$

$Ax = b$ siempre tiene solución $\quad (Col(A))^{\perp} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\forall b \in \mathbb{R}^3 \quad x = A^{-1}b$

No tiene sentido aplicar CM

$P_{Col(A)}\, b = b$

Aplico cuadrados mínimos cuando $Ax = b$ no es compatible $\iff b \notin Col(A)$

3.15 Sean $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ y $b \in \mathbb{R}^4$ definidos por

$\rho(A) = 2$

$\{C_1, C_2\}$ LI

$\hat{x}$ es única

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

$b \notin Col(A) \Rightarrow$ buscamos $\hat{x} : A\hat{x} = Proy_{Col(A)}\, b$

Hallar la solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$ y calcular el error cuadrático $\|b - A\hat{x}\|^2$.

En este caso $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$

$$A^TA\hat{x} = A^Tb \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

OJO A^TA no siempre tiene inversa

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 64 \end{pmatrix}$$

La solución general: $x = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}$

Como las columnas de A forman un cj LI

la solución es única

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{18}{5} \\ \frac{32}{5} \\ \frac{46}{5} \end{pmatrix} = Proy_{Col(A)}(b) = A\hat{x}$$

$$\|b - A\hat{x}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{25}(1+9+9+1) = \frac{20}{25} = 4/5$$

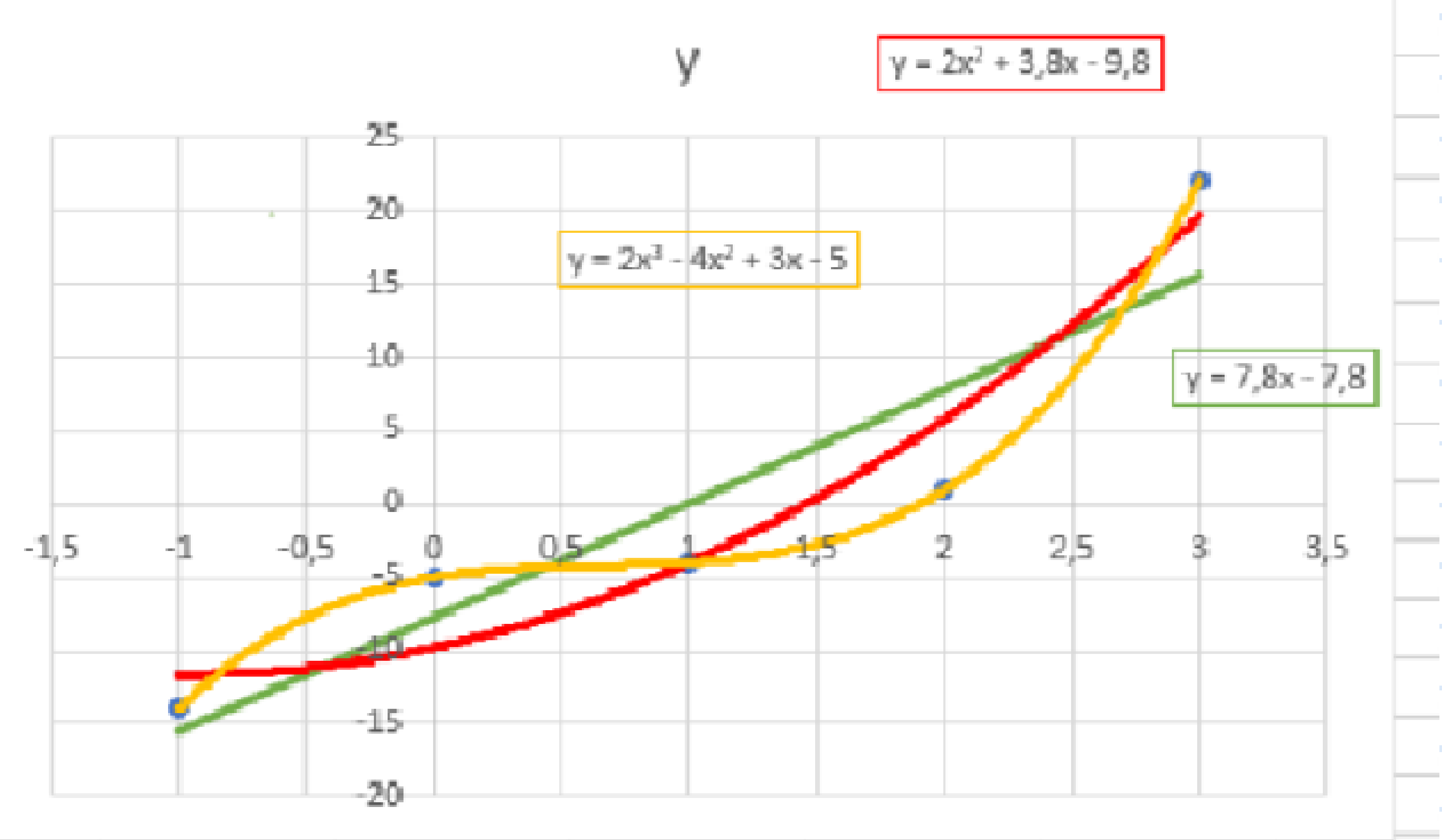
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}}_{b} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{18}{5} \\ \frac{32}{5} \\ \frac{46}{5} \end{pmatrix}}_{P_{Col(A)}(b)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix} = P_{(Col(A))^\perp}(b)$$

3.16 Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

x	-1	0	1	2	3
y	-14	-5	-4	1	22

mediante una recta $y = a_0 + a_1x$, mediante una cuadrática $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, y mediante una cúbica $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. ¿Cuál de esas tres curvas se ajusta mejor a los datos?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$



$y = a_1x + a_0$

$-14 = a_1(-1) + a_0$

$-5 = a_1 \cdot 0 + a_0$

$-4 = a_1 \cdot 1 + a_0$

$\vdots$

5 ecuaciones 2 incóg a_1, a_0

$A \cdot x = b$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Sistema incompatible

$y = a_0 + a_1 x$

$-14 = a_0 + a_1(-1)$
$-5 = a_0 + a_1 \cdot 0$
$-4 = a_0 + a_1 \cdot 1$
$1 = a_0 + a_1 \cdot 2$
$22 = a_0 + a_1 \cdot 3$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \overset{v}{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}} = \overset{Y}{\begin{pmatrix} -14 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \\ 22 \end{pmatrix}}$$

Sistema incompatible

$A \cdot v = Y$ incomp. pues $Y \notin Col(A)$

Resolvemos entonces $A^T A \hat{v} = A^T Y$

$$A^T A \hat{v} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 78 \end{pmatrix}$$

La idea es encontrar $\hat{v}$ / $A\hat{v} = Proy_{Col(A)} Y$

$5a_0 + 5a_1 = 0 \Rightarrow a_0 = -a_1$

$5a_0 - 15a_0 = 78 \Rightarrow a_0 = -7{,}8 \quad a_1 = 7{,}8$

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$-14 = a_0 + (-1)a_1 + 1\,a_2$
$-5 = a_0$
$-4 = a_0 + a_1 + a_2$
$1 = a_0 + 2a_1 + 4a_2$
$22 = a_0 + 3a_1 + 9a_2$

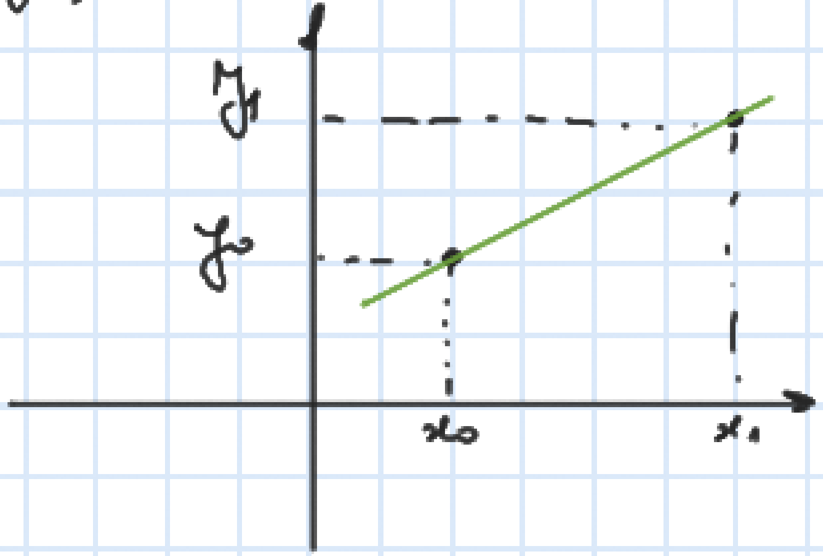
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$A v = Y$ Sistema Incomp.
$Y \notin Col(A)$

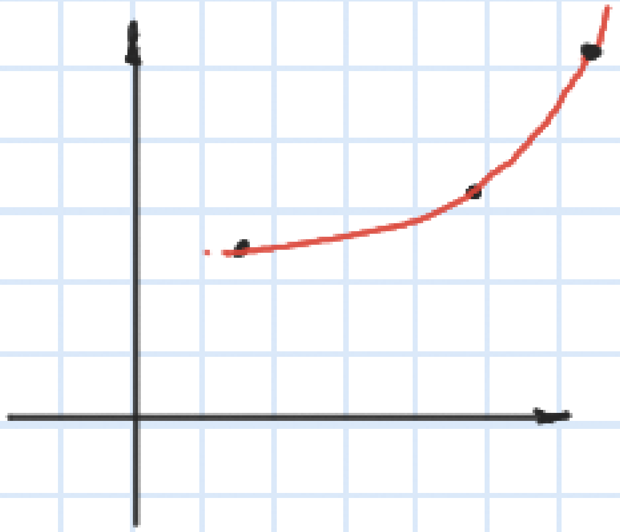
x^2	1	0	1	4	9
x	-1	0	1	2	3
y	-14	-5	-4	1	22

$A^T A \hat{v} = A^T Y \ \ldots$

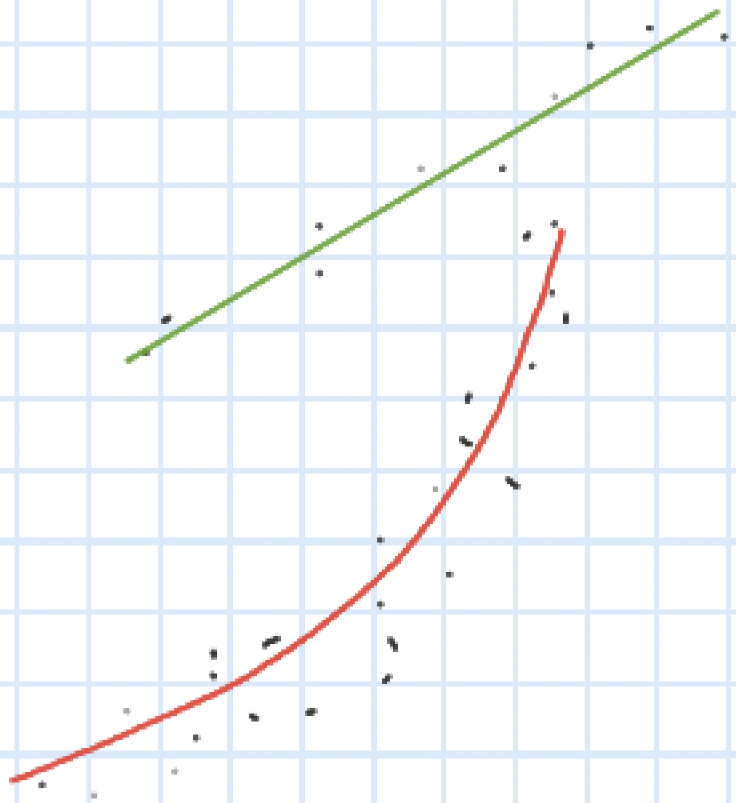
(x_0, y_0) (x_1, y_1)



P_1 P_2 P_3



Supone un modelo
lineal
cuadrático
polinómico
exponencial



Resolvemos

$A^T A \hat{v} = A^T Y$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 15 \\ 5 & 15 & 35 \\ 15 & 35 & 99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 78 \\ 184 \end{pmatrix}$$

$a_0 = -9{,}8$
$a_1 = 3{,}8$
$a_2 = 2$

Terminar

Cual ajusta mejor

$A\hat{v} = \mathrm{Proy}_{Col(A)} Y$

Lineal

$$\| Y - \underbrace{A\hat{v}}_{\mathrm{Proy}_{Col(A)} Y} \|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -14 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \\ 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15{,}6 \\ -7{,}8 \\ 0 \\ 7{,}8 \\ 15{,}6 \end{pmatrix} \right\|^2 = 10{,}6$$

$$A\hat{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7{,}8 \\ 7{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15{,}6 \\ -7{,}8 \\ 0 \\ 7{,}8 \\ 15{,}6 \end{pmatrix}$$

Resolver para los otros dos casos y ver que

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ es la que mejor aproxima

en realidad no aproxima "da justo"

¿Cuánto da el error en ese caso? ¿Qué significa?

cero

$b \in Col(A)$

Sistema comp.

$$\begin{array}{cccc} x_i & x_i^2 & x_i^3 & \\ \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v} \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -14 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \\ 22 \end{pmatrix}}_{Y \text{ de } \mathbb{R}^5} y_i$$

Sistema Compatible

casualidad

4 columnas

$v = \hat{v}$

No tiene sentido aplicar CM porque el sist. es compat.

3.17 Después de estudiar el comportamiento de un cierto tipo de enfermedad vírósica, un investigador plantea la hipótesis de que, a corto plazo, la cantidad, x, de individuos infectados en una población particular crece exponencialmente con el tiempo, t, medido en días. Es decir, postula un modelo de la forma $x = ae^{bt}$. Estimar, mediante la técnica de mínimos cuadrados, los parámetros a y b, utilizando para ello los siguientes datos observados por el investigador:

t	1	2	3	4	5
x	16	27	45	74	122

$x = f(t) = a e^{bt}$

$\ln x = \ln a + \ln e^{bt} = \underbrace{\ln a}_{a_0} + \underbrace{b}_{a_1} . t$

Nueva tabla

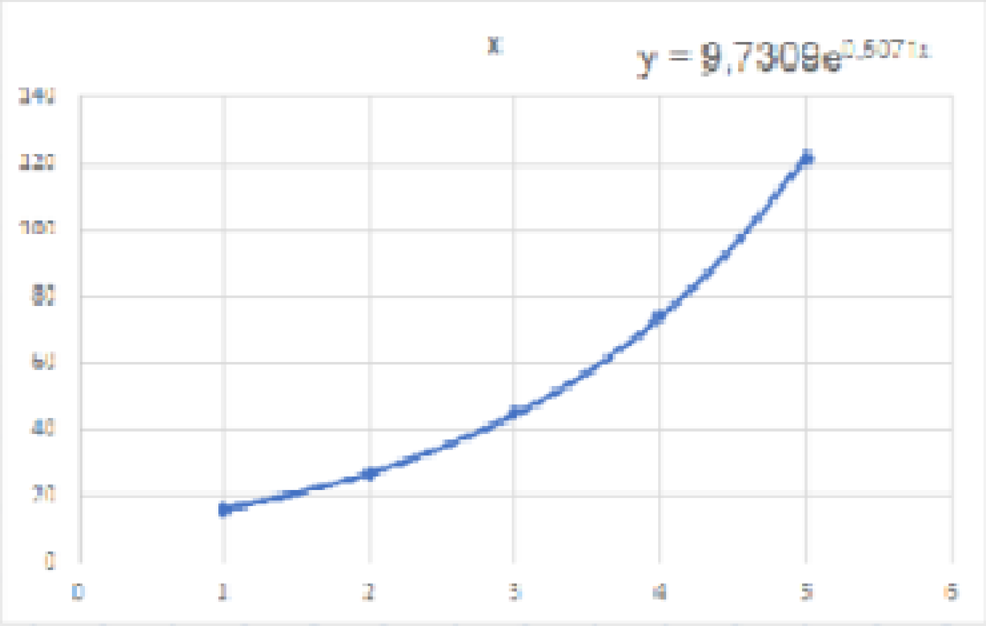
t	1	2	3	4	5
$\ln x$	$\ln 16$	$\ln 27$	$\ln 45$	$\ln 74$	$\ln 122$

$\ln 16 = a_0 + a_1 \cdot 1$
$\ln 27 = a_0 + a_1 \cdot 2$

t	1	2	3	4	5
$\ln x$	2,77	3,29	3,8	4,3	4,8

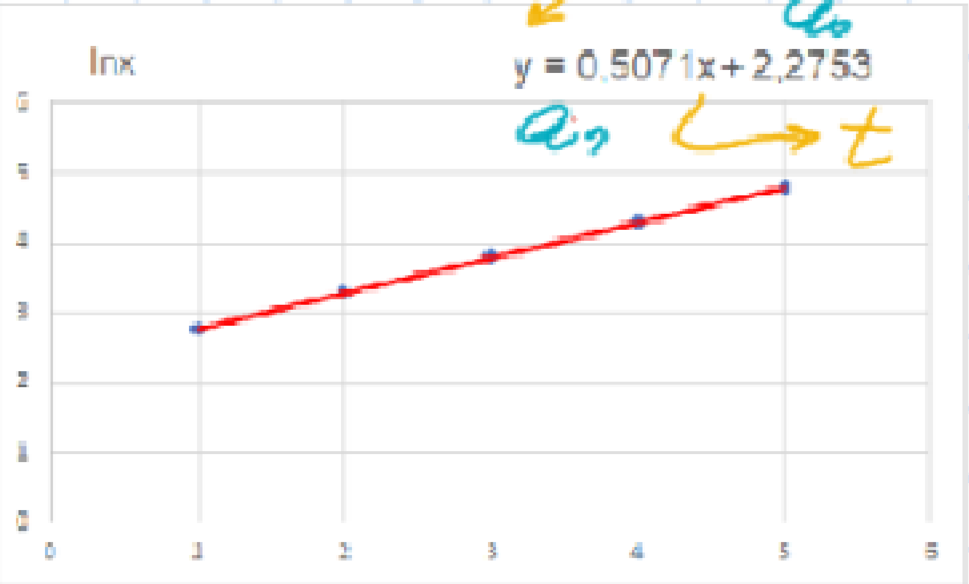
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln x \end{pmatrix}$$

t	x	t	lnx
1	16	1	2,7725887
2	27	2	3,2958369
3	45	3	3,8066625
4	74	4	4,3040651
5	122	5	4,804021



$\ln x$

$\Downarrow$



a_0

$a_1 \quad x \to t$

$b = 0{,}5071 = a_1$

$a = 9{,}7309$

$\ln a = 2{,}2753 = a_0$

Utilizar la estimación obtenida para predecir la cantidad de individuos infectados al cabo de una semana.

7 (días)

y = 9,7309e^0,5071x

$x = 9{,}7309\, e^{0{,}5071 t}$

$\cancel{3 = 5} \Rightarrow 2$

$\cancel{0.3 = 0.5}$

1 semana
7 días

$\cancel{Av = y \Rightarrow A^T A v = A^T y}$

$x(7) \cong 339$

$t = 7$

Importante
$\Rightarrow$ resuelvo

$Av = y$ Incompatible

$A^T A \hat{v} = A^T y$ compatible

3.18 [ver **Ejercicio 1.26**] Se considera el $\mathbb{R}$-espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Comprobar que

$$\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{2}(x-1)(x-2),\ -x(x-2),\ \frac{1}{2}x(x-1)\right\}$$

es una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$, y utilizar ese resultado para hallar el vector de coordenadas del polinomio $p = 1 + x + x^2$ en base $\mathcal{B}$.

Raíces
$x = 0$
$x = 1$
$x = 2$

$p(0) = 1$
$p(1) = 3$
$p(2) = 7$

$p_1(0) = 1 \qquad p_1(1) = p_1(2) = 0$

$p_2(1) = 1 \qquad p_2(0) = p_2(2) = 0$

$p_3(2) = 1 \qquad p_3(0) = p_3(1) = 0$

$$\Rightarrow \langle p_i, p_j\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$p = p(0)\cdot p_1 + p(1)\, p_2 + p(2)\, p_3$$

$$[p]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$p(0) = p(0)\cdot 1 + 0$

$p(1) = p(0)\cdot 0 + p(1)$

$p(2) = 0 + 0 + p(2)$

Si tengo $BON_W = \{v_1, v_2, v_3\}_m$

$$\Rightarrow \forall v \in W \quad v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \langle v_i, v\rangle v_i$$

$$p_1 \qquad p_1(0) = 1 \qquad p_1(1) = 0 \qquad p_1(2) = 0$$

$$p_2 \qquad p_2(0) = 0 \qquad p_2(1) = 1 \qquad p_2(2) = 0$$

$$p_3 \qquad p_3(0) = 0 \qquad p_3(1) = 0 \qquad p_3(2) = 1$$

$$p = \alpha\, p_1 + \beta\, p_2 + \gamma\, p_3$$

$$p(0) = \alpha\, \underbrace{p_1(0)}_{1} + \beta\, \cancel{p_2(0)} + \gamma\, \cancel{p_3(0)} \Rightarrow p(0) = \alpha$$

$$p(1) = \alpha\, \cancel{p_1(1)} + \beta\, \underbrace{p_2(1)}_{1} + \gamma\, \cancel{p_3(1)} \Rightarrow p(1) = \beta$$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ BON de V

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \qquad [v]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{\langle v, v_j \rangle} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \, ; v_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\langle v_i ; v_j \rangle}_{\begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}} = \underline{\alpha_j}$$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \langle v ; v_i \rangle \, v_i$$

$Ax = b$ Sistema incompatible (no existe x que solucione) $b \notin Col(A)$ $\mathbb{R}$

Planteamos

$A^TA\hat{x} = A^Tb$ Siempre compatible

~~$Ax = b \Rightarrow A^TAx = A^Tb$.~~ Falso

$[p]^B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$

BON $= \{v_1, v_2\}$

$v = \underline{\alpha} v_1 + \underline{\beta} v_2$

$\langle v, v_1 \rangle = \langle \alpha v_1 + \beta v_2 ; v_1 \rangle$

$= \alpha \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{1} + \beta \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{0}$

$[v]^B = \begin{pmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \langle v, v_2 \rangle \end{pmatrix}$

$p(x) = 1 + x + x^2 = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x)$

$p(0) = 1 = \alpha_1 \underbrace{p_1(0)}_{1} + \alpha_2 \underbrace{\cancel{p_2(0)}}_{0} + \alpha_3 \underbrace{\cancel{p_3(0)}}_{0}$

$p(1) = 3 = \alpha_1 \underbrace{\cancel{p_1(1)}}_{0} + \alpha_2 \underbrace{p_2(1)}_{1} + \alpha_3 \underbrace{\cancel{p_3(1)}}_{0}$

$p(2) = 1 + 2 + 2^2 = 7 = \alpha_3 \underbrace{p_3(2)}_{1}$

3.20 Se considera $\mathbb{R}^2$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x. \quad (*)$$

(a) Describir el significado geométrico del conjunto

$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 4\}. \Rightarrow \|x\|^2 = 4$$

(b) Hallar dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\Sigma = \{y_1v_1 + y_2v_2 : y_1, y_2 \in \mathbb{R},\ y_1^2 + y_2^2 = 4\} = \{2\cos(\theta)v_1 + 2\,\mathrm{sen}(\theta)v_2 : \theta \in [0, 2\pi)\},$$

y representar gráficamente el resultado obtenido.

$\|x\| = 2$ (*)

para ese PI $\|x\|$ es la dist al origen

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

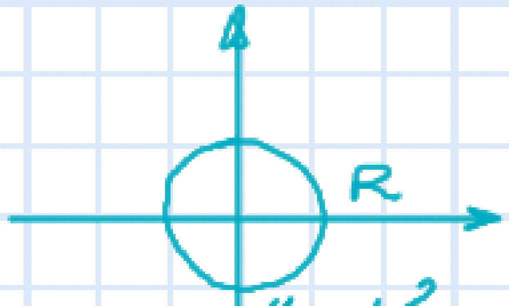
$$\|x\|^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

(a) $\|x\|^2 = 2^2$ representa los puntos que están a distancia 2 del origen

Será la ecuación de una circunferencia de radio 2

En $\mathbb{R}^2$ ¿cuál sería la ecuación de una circunferencia? $x_1^2 + x_2^2 = R^2$

$d(P, O) = R$ norma de x



$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$

que PI está definido p/ que $(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

PIC !

$\|x\|$ es la distancia al origen o la longitud del vector

Supongamos el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ¿cuánto mide?

Depende del PI

con el del ejercicio $(1 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \|x\|^2$

$\|x\|^2 = 6 \quad \|x\| = \sqrt{6}$

Para el PI del ejercicio indicar un pto que pertenezca a la circunferencia de radio 2.

$x_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \|x\|^2 = 4 \Rightarrow$ está en la circunf

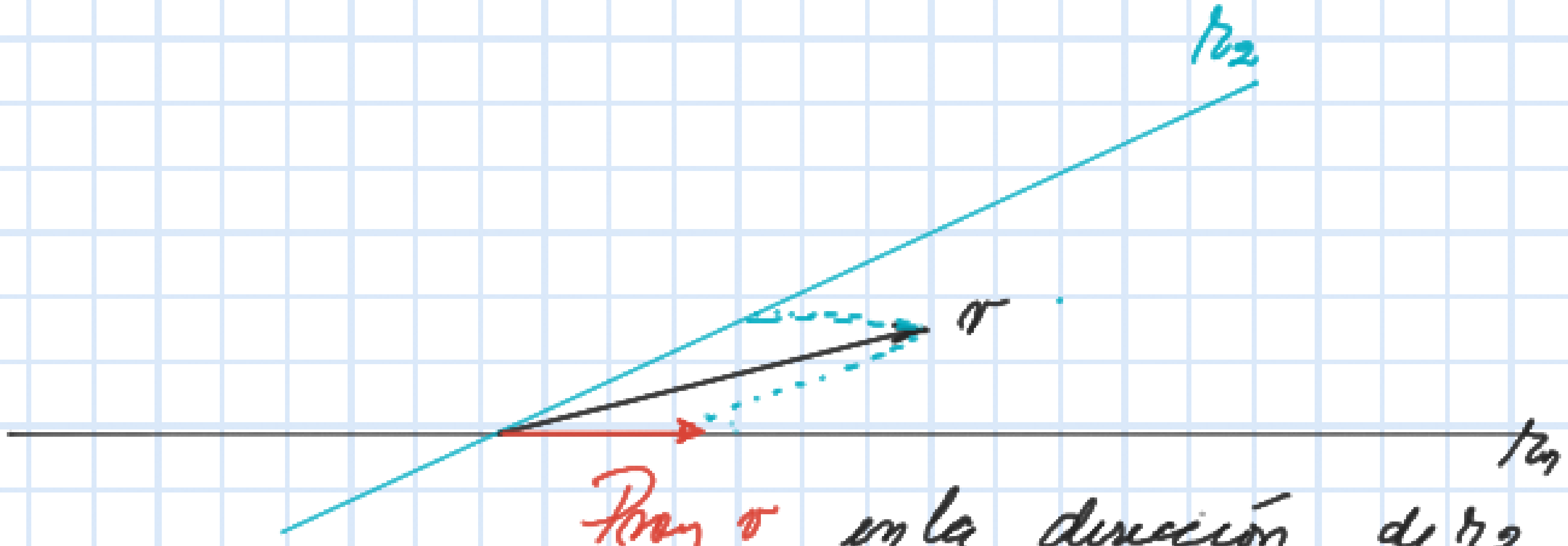
$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ también !

Si $B = \{v_1, v_2\}$ BON

$x = y_1v_1 + y_2v_2 \qquad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle =$

$\|x\|^2 = y_1^2 + y_2^2 = 4$ ✓ $\qquad = \langle y_1v_1 + y_2v_2,\ y_1v_1 + y_2v_2 \rangle =$

$= y_2^2 \underbrace{\|v_2\|^2}_{1} + y_1^2 \underbrace{\|v_1\|^2}_{1} + y_1y_2 \cancel{\langle v_1, v_2 \rangle}^{0} + y_2y_1 \cancel{\langle v_2, v_1 \rangle}^{0}$



$Proy_{r_1}\, v$ en la dirección de r_2

Proyecto sobre la recta negra en la dirección de la celeste

Esta proyección es ortogonal si tengo en PI: $r_1 \perp r_2$

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \langle x, y\rangle \qquad (1 \quad 0)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = 0 = (2 \quad 1)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

Quiero un vector ortogonal al $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad 2a+b=0 \quad \underline{2a=-b}$

$BOG = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}$

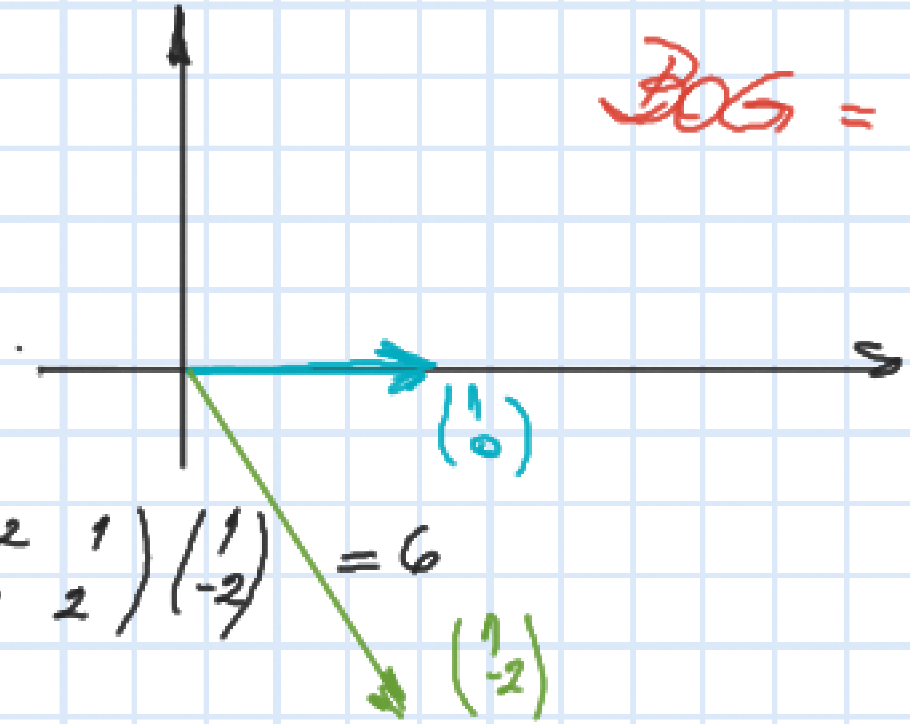
Busco BON en $\mathbb{R}^2$ para el PI definido

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\|^2 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix} \quad ; \quad \left\|\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\|^2 = (1 \quad -2)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = 6$$

$$v_2 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\ -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$



b) $\{v_1, v_2\}$ una BON de $\mathbb{R}^2$ plano PI

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{v_2} \right\}$$

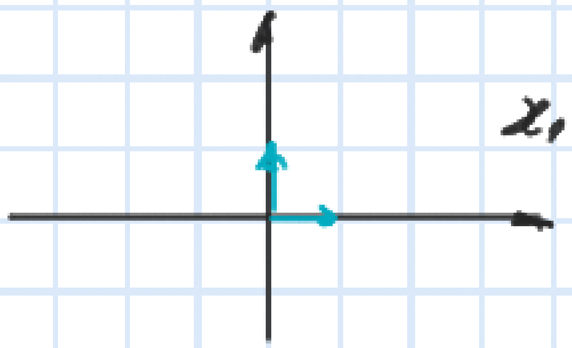
Esto v_i no son únicos

Cualquier BON sirve

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 = v$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = [v]_B \qquad y_1^2 + y_2^2 = 4$$

$$v = y_1 v_1 + y_2 v_2$$



$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es BON para PI2

3.21 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$C_1 \; C_2 \; C_3 \; C_4 \; C_5$

$\rho(A) = 2$

$b = C_1 + C_3$

(a) Comprobar que $b = [3 \quad 4 \quad 6 \quad 7]^T \in \operatorname{col}(A)$.

(b) Mostrar que existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in \operatorname{col}(A)$ tales que

$$\{y \in \operatorname{col}(A) : d(b, y) = 1\} = \{(a_1 + \cos(\theta))v_1 + (a_2 + \operatorname{sen}(\theta))v_2 : \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

¿Son únicos? Si la respuesta es afirmativa, determinarlos. Si la respuesta es negativa, exhibir dos ejemplos.

sirve cualquier BON de Col(A)

no ∇_0

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cos\theta\, v_1 + \operatorname{sen}\theta\, v_2$$

1 1 2 2 ✓ — 1 1 2 2

1 2 2 3 $F_2 - F_1$ — 0 1 0 1

2 3 4 5 $F_3 - 2F_1$ — ~~0 1 0 1~~

1 3 2 4 $F_3 - F_1$ — ~~0 2 0 2~~

0 1 0 1 ✓ — ~~0 1 0 1~~

$$\operatorname{Col}(A) = \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\cos\theta\, v_1 + \operatorname{sen}\theta\, v_2$

$\{v_1, v_2\}$ BON.

PIC BON de Col(A)

$$v_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{110}.} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3/10 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A cargo del estudiante

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

Hay que buscar otra BON

3.23 Sea $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el espacio euclídeo canónico. En cada uno de los siguientes casos, utilizar el algoritmo de Gram-Schmidt para producir un sistema ortonormal $\mathfrak{U}_i$ a partir del conjunto linealmente independiente $\mathcal{L}_i$ dado.

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} \right\},\ \mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix} \right\},\ \mathcal{L}_3 = \left\{ \begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\9\\11\end{bmatrix} \right\}.$$

$\mathcal{L}_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{6} \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$g_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - 7/6 \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/6\\-8/6\\11/6\end{pmatrix}$$

$\{v_1, g_2\}$ es BOG

$u_1 = v_1/\|v_1\| \qquad u_2 = g_2/\|g_2\|$

$\{u_1, u_2\}$ es BON

$$u_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt6\\2/\sqrt6\\1/\sqrt6\end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix}5/\sqrt{210}\\-8/\sqrt{210}\\11/\sqrt{210}\end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}_2$

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Queda ¡E!

$$g_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle v_1}{\|v_1\|^2} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} - \frac{6}{4}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$$

3.24 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix}1&2&0&4&0\\1&3&5&2&1\\2&3&-5&10&0\\2&4&0&8&1\end{bmatrix}.$$

(a) Hallar una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenga una base de $\mathrm{col}(A)$.

(b) Hallar la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathrm{col}(A)$. $\quad$ gen $\{v_1, v_2, v_3\}$

(c) Calcular la distancia del vector $\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}^T$ a $\mathrm{col}(A)$. $\quad \left\| \mathrm{Proy}_{W^\perp} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\|$

$$\begin{matrix}1&1&2&2\\2&3&3&4\\0&5&-5&0\\4&2&10&8\\0&1&0&1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}✓\\F_2-2F_1\\✓\\F_3-4F_1\\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&1&2&2\\0&1&-1&0\\\cancel{0}&\cancel{5}&\cancel{-5}&\cancel{0}\\\cancel{0}&\cancel{-2}&\cancel{2}&\cancel{0}\\0&1&0&1\end{matrix} \quad F_5-F_2 \qquad \begin{matrix}1&1&2&2\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\end{matrix}$$

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{gen}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$$

$$B_{\mathbb{R}^4} = \{v_1, v_2, v_3, \underbrace{v_4}_{\notin \mathrm{Col}(A)}\}$$

Aplicar G.S.

$$\{\underbrace{\underbrace{u_1, u_2, u_3}_{\text{BON de } Col(A)}, u_4}_{\text{BON de } \mathbb{R}^4}\} \qquad u_4 \perp v \quad \forall v \in Col(A)$$

Proyección de $\mathbb{R}^4$ sobre $Col(A)$

Sabemos que $(Col(A))^\perp = gen\{u_4\}$

$$\text{Proy}_{(Col(A))^\perp}(v) = \langle v ; u_4 \rangle . u_4$$

$$\Rightarrow \text{Proy}_{Col(A)}(v) = v - \langle v ; u_4 \rangle \cdot u_4 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^4$$

$$d\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} ; Col(A)\right) = \left\| \text{Proy}_{(Col(A))^\perp}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \right\| \Rightarrow$$

$$\left\| \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} ; u_4 \right\rangle u_4 \right\| = \left| \left\langle \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} . u_4 \right\rangle \right|$$

4. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcular la distancia del vector $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$ al subespacio $\text{col}(A)$.

5. Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	3	5

mediante una parábola $y = ax^2 + bx + c$.

3. Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\end{bmatrix}^T$. Hallar la imagen por Π del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\}$.

4. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcular la distancia del vector $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$ al subespacio $\text{col}(A)$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}6 & 3 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-3 & 2 & 6\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}2 & -6 & 3\end{bmatrix}^T \right\},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{2}x(x-1), -(x+1)(x-1), \frac{1}{2}(x+1)x \right\}.$$

Comprobar que el polinomio $6 + 3x$ pertenece a la imagen de T y determinar la preimagen por T del subespacio $\text{gen}\{6 + 3x\}$.

1. Sean $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$ y $\mathbb{U}$ los subespacios de $\mathbb{R}_4[x]$ definidos por

$$\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(3) = p(2) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{T} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(6) = p(3) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{U} = \left\{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(0) + p'(0) + \frac{1}{2!}p''(0) + \frac{1}{3!}p'''(0) + \frac{1}{4!}p''''(0) = 0\right\}.$$

Construir un base de $\mathbb{U}$ que contenga a una base de $\mathbb{T}$ y a una base de $\mathbb{S}$. ¿Es única? Si la respuesta es negativa, construir otra.