# Norma inducida por un producto interno

Todo espacio euclídeo $\mathbb{V}$ se convierte en un espacio normado si se define una función, denominada *norma inducida* por el producto interno, tal que

$$\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_0^+ : \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \forall x \in \mathbb{V}$$

Ej 1: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ con $\langle X, Y\rangle = Y^T X$ p.i. canónico ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$X = (1\ 2)^T \Rightarrow \|X\| = \sqrt{(1\ 2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} = \sqrt{5}$

Ej 2: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ con $\langle X, Y\rangle = Y^T\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}X$

$X = (1\ 2)^T \Rightarrow \|X\| = \sqrt{(1\ 2)\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} = \sqrt{(3\ 7)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} = \sqrt{17}$

- $\|\cdot\|$ depende del pi

**Sobre espacios métricos y normados**

1. Una *distancia*, o una *métrica*, en un conjunto $\mathcal{X}$ es una función $d : \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
   a) Para $x, y \in \mathcal{X}$: $d(x,y) = 0$ si, y sólo si $x = y$.
   b) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$ (*simetría*).
   c) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$ (*desigualdad triangular*).

   La expresión $d(x,y)$ se lee *la distancia entre los puntos $x$ e $y$*. El par $(\mathcal{X}, d)$, constituido por el conjunto $\mathcal{X}$ munido de una distancia, se denomina *espacio métrico*.

2. La noción de distancia permite introducir la noción de límite: se dice que *la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x$*, o que *$x_n$ tiende a $x$*, cuando

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0.$$

En tal caso $x$ se llama *el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* y se denota por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

4. Una *norma* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
   a) $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
   b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{V}$.
   c) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$ (*desigualdad triangular*).

   Al número no negativo $\|x\|$ se le denomina *la norma de $x$* y el par $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se llama *espacio normado*. La norma de $x$ representa la longitud del segmento de recta $[0, x] := \{tx : t \in [0,1]\}$ que une a los puntos $0$ y $x$. Notar que si $x \neq 0$, entonces $u_x := \|x\|^{-1}x$ pertenece al subespacio generado por $x$ y $\|u_x\| = 1$.

   versor

Caso particular: $\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle}$ tiene las propiedades descriptas

También se escribe $\|X\|^2 = \langle X, X\rangle$

5. Todo espacio normado $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se convierte en un espacio métrico, si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{V}$ se define

$$d(x,y) := \|x - y\|.$$

   Notar que la distancia inducida por una norma posee las siguientes propiedades adicionales:
   a) $d(x,y) = d(x+z, y+z)$ (*invarianza por traslaciones*: la distancia entre $x$ e $y$ no cambia si ambos puntos se someten a una misma traslación).
   b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$ (*cambio de escala por dilataciones*: al dilatar ambos puntos por un mismo factor $\lambda$, la distancia queda multiplicada por $|\lambda|$).
   c) En particular, $d(x,y) = d(x-y, 0)$, de modo que las distancias al origen son suficientes para conocer todas las demás.

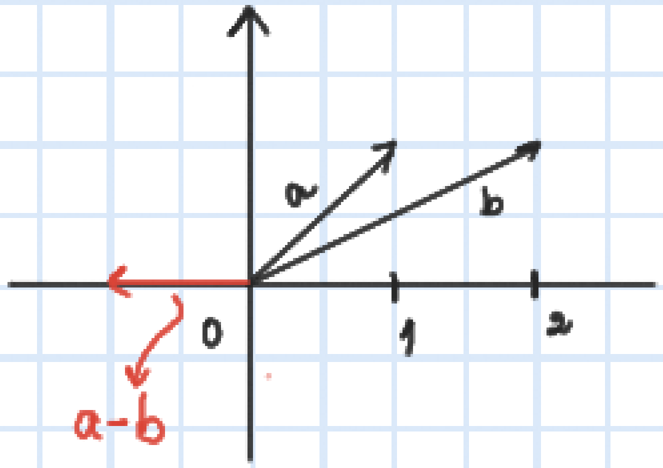
Ej: En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ con $\langle X, Y\rangle = Y^T\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}X$

Calcular la distancia entre $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{a}$ y $\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{b}$

$d(a,b) = \|a - b\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{(-1\ 0)^T\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}}$

$$d(a y b) = \sqrt{(-1\ \ 0)\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{(-1\ \ -1)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}} = 1 > 0$$

$a \neq b$



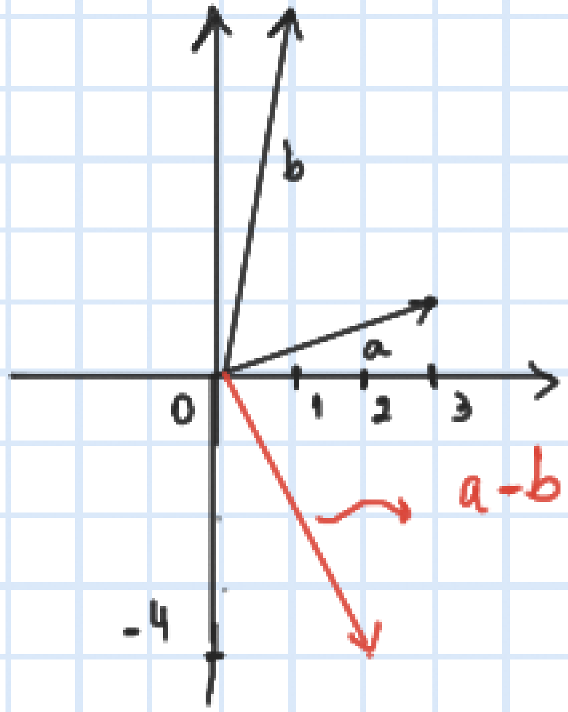

$\|a-b\| = 1$

Si ahora fuera $\langle X,Y\rangle = Y^T X$

$$d(a y b) = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\| = 1$$

Ahora $a = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

$a-b = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$




$\|a-b\|$ depende del pi

- Si tomo $\langle X,Y\rangle = Y^T X$ resulta

$$\|a-b\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(2\ \ -4)\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

- Si tomo el $\langle X,Y\rangle = Y^T\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}X$

$$\|a-b\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(2\ \ -4)\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{(-2\ \ -10)\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}} = \sqrt{36} = 6$$

**Ejemplo:**

Sea en $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ el pi dado por $\langle A,B\rangle = tr(B^T A)$.

Calcular

a) $A = \begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}$ $\langle A,B\rangle$

b) $\|A\|$ ; $\|B\|$

c) $\|A-B\|$

a) $\langle A,B\rangle = tr(B^T A) = tr\left(\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}4&6\\0&2\end{pmatrix} = 6$

b) $\|A\| = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \sqrt{tr\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}} = \sqrt{tr\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}} = \sqrt{6}$

$\|B\|^2 = \langle B,B\rangle = tr\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix} = tr\begin{pmatrix}10&2\\2&2\end{pmatrix} = 12$

$\Rightarrow \|B\| = \sqrt{12}$

c) $A-B = \begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\end{pmatrix}$

$\|A-B\|^2 = tr\begin{pmatrix}-2&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\end{pmatrix} = tr\begin{pmatrix}4&-2\\-2&2\end{pmatrix} = 6$

$\Rightarrow \|A-B\| = \sqrt{6}$

11. La *desigualdad de Cauchy-Schwarz* establece que

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{V}.$$

$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

$\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$

**Demostración.** Sean $y \neq 0_{\mathbb{V}}$, y el vector $x - \underbrace{\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}}_{\in \mathbb{K}} y = v$ y calculemos el cuadrado de su norma: $\langle v, v\rangle$

$$0 \leq \Big\|\underbrace{x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y}_{v}\Big\|^2 = \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y\right\rangle =$$

$$= \langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\underbrace{\langle y, y\rangle}_{\|y\|^2}}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle y, y\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\langle y, x\rangle + \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\overline{\langle x, y\rangle} + \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle =$$

observar que los dos últimos términos tienen signos opuestos:

$$= \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle$$

$\|x\|^2\|y\|^2 - \overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle$

finalmente:

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle \Leftrightarrow \|x\|^2\|y\|^2 \leq \overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|x\|\|y\| \leq |\langle x, y\rangle|$$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Si $y = 0_{\mathbb{V}}$ la desigualdad se cumple: $|\underbrace{\langle x, 0_{\mathbb{V}}\rangle}_{0}| \leq \|x\|\underbrace{\|0_{\mathbb{V}}\|}_{=0} = 0$

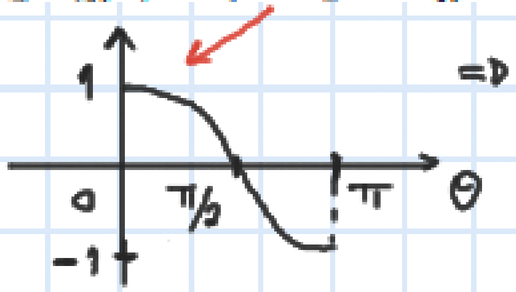
$\mathbb{V}$ sea un $\mathbb{R}$ - E. Vectorial $\quad \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1 \quad x \neq 0_V \quad y \neq 0_V$

2. Si $\mathbb{V}$ es un $\boxed{\mathbb{R}}$-espacio vectorial el *ángulo $\theta$ entre dos vectores no nulos $x$ e $y$* se define mediante la fórmula

$$\cos\theta := \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}, = \Big\langle \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{u_x}, \underbrace{\frac{y}{\|y\|}}_{u_y} \Big\rangle$$

versores

donde $\theta \in [0, \pi]$. Notar que $\cos\theta = \langle u_x, u_y\rangle$.



$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right) \quad x \neq 0_V, \; y \neq 0_V$

Ej: En $\mathbb{V} = \mathbb{R}_1[x]$ con el pic $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$

$\theta$ : $\measuredangle$ entre $p$ y $q$ con $p(x) = 1$ y $q(x) = x$

$\langle 1, x\rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$\|1\|^2 = \langle 1, 1\rangle = \int_0^1 dx = 1 \qquad \therefore \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

13. Si $\langle y, x\rangle = 0$ se dice que *los vectores $x$ e $y$ son ortogonales* y se denota por $y \perp x$. El conjunto de todos los vectores ortogonales a $x$ se denota por $x^\perp$, y se llama el *subespacio ortogonal a $x$*

$$x^\perp := \{y \in \mathbb{V} : \langle y, x\rangle = 0\}.$$

En los espacios euclídeos reales la condición $\langle y, x\rangle = 0$ implica que $\theta = \frac{\pi}{2}$ salvo que $x = 0$ o $y = 0$.

$\forall x : \langle 0_V, x\rangle = 0 \Rightarrow 0_V \perp x$

Ej: $V = \mathbb{R}^2$ con el pi dado por $\langle X, Y\rangle = Y^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$

$>0$ $\quad \det(\ ) > 0$

Dado $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ hallar todos los vectores $Y$ : $X \perp Y \iff \langle X, Y \rangle = 0$

Sea $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$

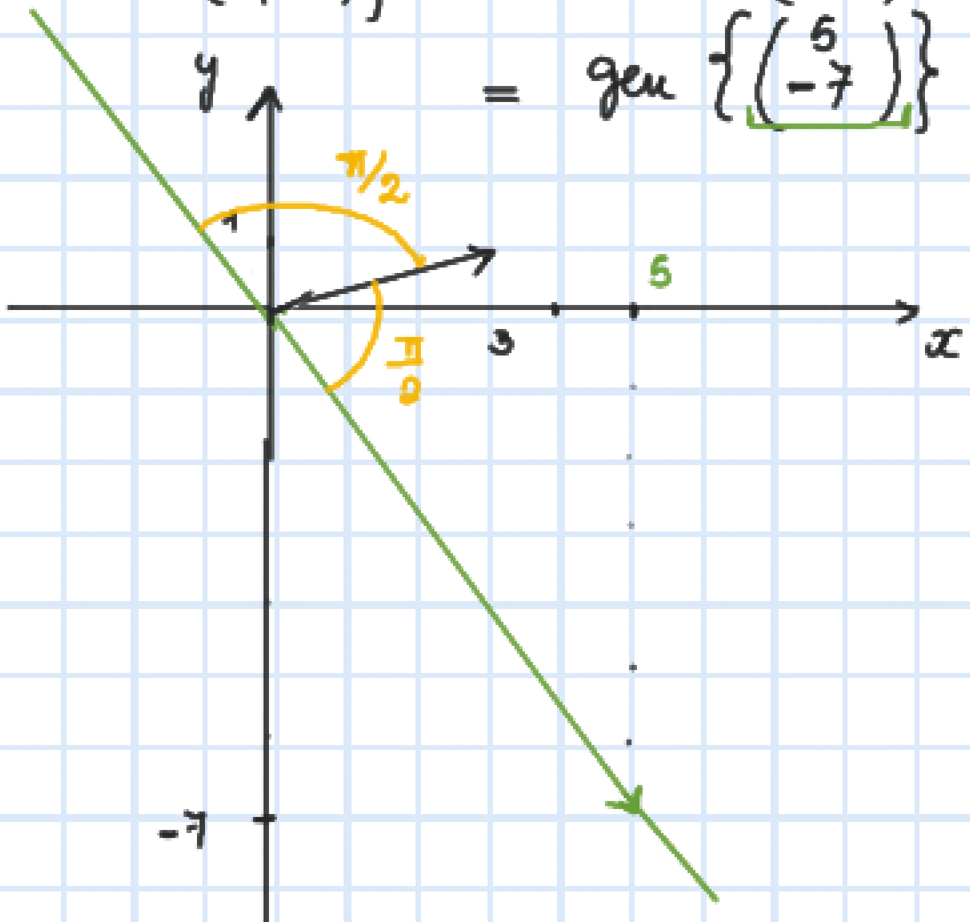
$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow (a \ \ b)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (a \ \ b)\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 7a + 5b = 0 \Rightarrow b = -\tfrac{7}{5}a$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} a \\ -\frac{7}{5}a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}^{\perp} = \left\{ Y = a\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}$$




En particular: CON ESTE PRODUCTO INTERNO

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\measuredangle\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}\right) = \frac{\pi}{2}$$

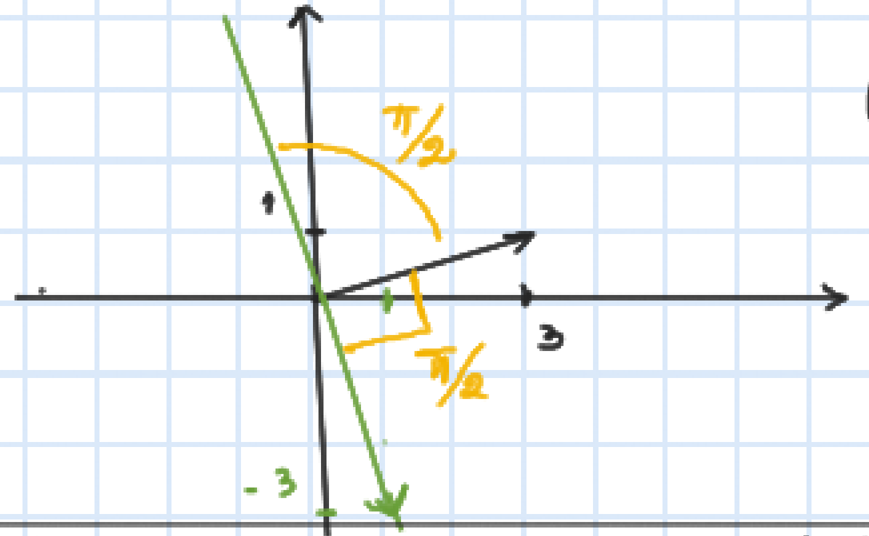
Si ahora tomamos $\langle X, Y \rangle = Y^T X$ pic en $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (a \ b)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -3a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ con el pic




Ej: $V = \mathbb{R}_2[x]$ con pi $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$

Sea $A = \{1 - x,\ 1 + x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ $\quad A \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{\perp} = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] : \langle p, 1-x \rangle = 0 \wedge \langle p, 1+x^2 \rangle = 0 \}$$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\langle p, 1-x \rangle = \langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2, 1 - x \rangle = a_0 \cdot 1 + (a_0 + a_1 + a_2) \cdot 0 + (a_0 - a_1 + a_2)2$$
$$= a_0 + 2a_0 - 2a_1 + 2a_2 = 0 \iff 3a_0 - 2a_1 + 2a_2 = 0 \quad (1)$$

$$\langle p, 1+x^2 \rangle = \langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2, 1 + x^2 \rangle = a_0 \cdot 1 + (a_0 + a_1 + a_2)2 + (a_0 - a_1 + a_2) \cdot 2$$
$$= 5a_0 + 4a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{5}{4}a_0$$

En (1) $\quad 3a_0 - 2a_1 + \cancel{2}\left(-\frac{5}{\cancel{4}_{\,2}}a_0\right) = 0 \Rightarrow 2a_1 = \frac{1}{2}a_0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}a_0$

$$p(x) = a_0 + \left(\frac{1}{4}a_0\right)x + \left(-\frac{5}{4}a_0\right)x^2 = a_0\left(1 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}x^2\right) \quad \forall a_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A^{\perp} = \text{gen}\{4 + x - 5x^2\}$$

18. Si $\mathcal{V}$ es un conjunto no vacío de vectores, el *subespacio ortogonal a* $\mathcal{V}$, denotado por $\mathcal{V}^{\perp}$, se define por

$$\mathcal{V}^{\perp} := \{x \in \mathbb{V}_k : \langle x, v\rangle = 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{V}\} \longrightarrow \text{definición general}$$

Por ejemplo si $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ con el pic $\wedge$ $\mathcal{V} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \mathcal{V}^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, (1\ 1\ 1)^T\rangle = 0 \wedge \langle x, (1\ 0\ 1)^T\rangle = 0\}$

y así si $x = (x_1\ x_2\ x_3)^T$ como $\langle x, (1\ 1\ 1)^T\rangle = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (1)

$\wedge$ $\langle x, (1\ 0\ 1)^T\rangle = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 = 0$ (2)

De (1) y (2) sale que: $x_2 = 0 \wedge x_1 = -x_3$

$\therefore \mathcal{V}^{\perp} = \{(x_1\ x_2\ x_3)^T = (x_1, 0, -x_1)^T,\ x_1 \in \mathbb{R}\} = \text{gen}\{(1\ 0\ -1)^T\}$

Propiedad: $\mathcal{V}^{\perp}$ es SUBESPACIO de $\mathbb{V}_K$

i) $0_V \in \mathcal{V}^{\perp}$ ya que $\langle 0_V, v\rangle = 0$ $\forall v \in \mathbb{V}_K$ en particular a los vectores del conjunto

ii) $v_1 \in \mathcal{V}^{\perp} \wedge v_2 \in \mathcal{V}^{\perp} \Rightarrow \langle v_1, v\rangle = 0 \ \forall v \in \mathcal{V}$

$\langle v_2, v\rangle = 0 \ \forall v \in \mathcal{V}$

$\Rightarrow \langle v_1, v\rangle + \langle v_2, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1 + v_2, v\rangle = 0 \ \forall v \in \mathcal{V}$

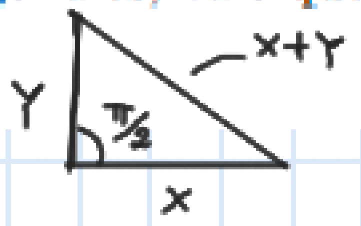
$\Rightarrow v_1 + v_2 \in \mathcal{V}^{\perp}$

iii) $v_1 \in \mathcal{V}^{\perp} \Rightarrow \langle v_1, v\rangle = 0 \ \forall v \in \mathcal{V}$

$\lambda\langle v_1, v\rangle = \lambda \cdot 0 \Rightarrow \langle \lambda v_1, v\rangle = 0 \Rightarrow \lambda v_1 \in \mathcal{V}^{\perp}$

15. El *teorema de Pitágoras* establece que si $x$ e $y$ son ortogonales, vale que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$




• $\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$\|x + y\|^2 \overset{\text{def de } \|\cdot\|}{=} \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \underbrace{\cancel{\langle x, y\rangle}}_{=0} + \cancel{\langle y, x\rangle} + \langle y, y\rangle$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2$

$\langle x, y\rangle = 0$

$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} = \bar{0} = 0$

ojo! $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 \overset{?}{\Longrightarrow} \langle x, y\rangle = 0$

• $\cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} = \cancel{\|x\|^2} + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \cancel{\|y\|^2}$

$0 = \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} \Rightarrow 0 = 2\,\text{Re}\langle x, y\rangle$

$z + \bar{z} = 2\,\text{Re}(z)$

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial $\quad \text{Re}\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Longleftrightarrow x \perp y$

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{C}$ - espacio vectorial $\quad \text{Re}\langle x, y\rangle = 0 \not\Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \not\Rightarrow x \perp y$ ($\mathbb{C}$)

Como contraejemplo inmediato: Tomemos en $\mathbb{C}^n$ el P.I. canónico, $\langle x, y\rangle = y^* x = \bar{y}^T x$. Si $x = (1\ \ 0)^T$ e $y = (3i\ \ 1)^T$, entonces:

$$\left\langle (1\ \ 0)^T (3i\ \ 1)^T \right\rangle = (\bar{3i}\ \ \bar{1})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$(-3i\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -3i = -3i \neq 0$$

$\|x + y\|^2 = \|(1 + 3i\ \ 1)^T\|^2 = |1 + 3i|^2 + 1^2 = 1 + 9 + 1 = 11$

$\|x\|^2 = 1$, y $\|y\|^2 = 9 + 1 = 10$.

Entonces $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ y $x \not\perp y$.

$V = \mathbb{R}^2$ con el pi dado por $\langle x, y\rangle = y^T \begin{pmatrix} \overset{>0}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x$

$\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}^{\perp} = \left\{ y = a\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ para este producto interno.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} \right\|^2 = (8\ \ -6)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = (8\ \ -6)\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} = 80 + 24 = 104$$

Por otro lado $\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (3\ \ 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (3\ \ 1)\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 21 + 5 = 26$ $\quad 26 + 78 = 104$ ✓

$$\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} \right\|^2 = (5\ \ -7)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = (5\ \ -7)\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} = 15 + 63 = 78$$

8. La tabla de multiplicación de una colección de vectores $\mathfrak{X} = (x_i : i \in \mathbb{I}_n)$ se llama *la matriz de Gram de* $\mathfrak{X}$ y se denota por $G_{\mathfrak{X}}$

$$G_{\mathfrak{X}} := [\langle x_i, x_j\rangle]_{\substack{i\in\mathbb{I}_n\\ j\in\mathbb{I}_n}} = \begin{bmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle & \cdots & \langle x_2,x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle \end{bmatrix}.$$

El *Gramiano de* $\mathfrak{X}$, denotado por $G(\mathfrak{X})$, es el determinante de la matriz $G_{\mathfrak{X}}$.

9. La matriz de Gram de una base $\mathcal{B} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ de $\mathbb{V}$ determina unívocamente al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y se llama *la matriz del producto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *respecto de la base* $\mathcal{B}$.

En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ $\langle x, y\rangle = y^T x$ pic

$$X = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ (este conjunto es LD)}$$

$$G_X = \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Cuando en particular tomamos una base de $\mathbb{V}$ un $K$-espacio vectorial con $\dim V = n$ $\quad B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$

$$G_B = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \cdots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$$

Consideremos que tenemos un espacio vectorial de dimensión 2 con producto interno. $\quad B = \{v_1, v_2\}$ base de un $\mathbb{V}$ euclídeo

Sean $v, w \in \mathbb{V} \Rightarrow \underset{\text{únicos}}{\exists}\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$ :

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \qquad w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$$

$$\langle v, w\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2,\ \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2\rangle$$

$$= \langle \alpha_1 v_1, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2\rangle + \langle \alpha_2 v_2, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2\rangle$$

$$= \langle \alpha_1 v_1, \beta_1 v_1\rangle + \langle \alpha_1 v_1, \beta_2 v_2\rangle + \langle \alpha_2 v_2, \beta_1 v_1\rangle + \langle \alpha_2 v_2, \beta_2 v_2\rangle$$

$$= \alpha_1 \overline{\beta_1}\langle v_1, v_1\rangle + \alpha_1 \overline{\beta_2}\langle v_1, v_2\rangle + \alpha_2 \overline{\beta_1}\langle v_2, v_1\rangle + \alpha_2 \overline{\beta_2}\langle v_2, v_2\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} & \overline{\beta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

donde $\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix} = [w]^B \wedge \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} = [v]^B$

$$\Rightarrow \langle v, w\rangle = \left([w]^B\right)^* G_B\, [v]^B \qquad \left([w]^B\right)^* = \left(\overline{[w]^B}\right)^T = \overline{\left([w]^B\right)^T}$$

$G_B$ es la matriz del producto en base $B$

En gral : $\dim(\mathbb{V}) = n$

$$\langle v, w\rangle = \left([w]^B\right)^* G_B\, [v]^B \qquad G_B = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \cdots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$$

$$(G_B)_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle \quad \forall i \forall j$$

Si $i = j \Rightarrow \langle v_i, v_i\rangle = \|v_i\|^2 > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots n$

$$(G_B)_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle = \overline{\langle v_j, v_i\rangle} \Rightarrow G_B \text{ es HERMÍTICA}$$

## Ejemplo:

En $V=\mathbb{R}_2[x]$ con el pi $\langle p,q\rangle = p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(-1)q(-1)$

Considero la base $B=\{1+x+x^2,\ 1+x^2,\ 1\}$ base de $V=\mathbb{R}_2[x]$ $(K=\mathbb{R})$

Armamos $G_B$

$$G_B = \begin{pmatrix} \langle 1+x+x^2, 1+x+x^2\rangle & \langle 1+x+x^2, 1+x^2\rangle & \langle 1+x+x^2, 1\rangle \\ \langle 1+x^2, 1+x+x^2\rangle & \langle 1+x^2, 1+x^2\rangle & \langle 1+x^2, 1\rangle \\ \langle 1, 1+x+x^2\rangle & \langle 1, 1+x^2\rangle & \langle 1, 1\rangle \end{pmatrix}$$

$$G_B = \begin{pmatrix} 1+9+1 & 1+6+2 & 1+3+1 \\ 1+6+2 & 1+4+4 & 1+2+2 \\ 5 & 5 & 1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{>0}{11} & 9 & 5 \\ 9 & 9^{>0} & 5 \\ 5 & 5 & 3^{>0} \end{pmatrix}$$

Si cambio la base $B^*=\{1, x, x^2\}$

$$G_{B^*} = \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Obs: Para cada base una matriz

Obs: Supongamos que hago esta cuenta matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{([p]^{B^*})^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{G_{B^*}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{[q]^{B^*}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 13 = \langle 1+x+x^2, 1+2x^2\rangle$$

Verificación:

$$\langle 1+x+x^2, 1+2x^2\rangle \underset{\text{fórmula}}{=} 1+3.3+1.3 = 1+9+3 = 13$$

Quiero calcular $\langle 1+x+x^2, 1+2x^2\rangle$ usando $G_B = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 5 \\ 9 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Entonces:

$$\langle 1+x+x^2, 1+2x^2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 9 & 5 \\ 9 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 13$$

Para:

$$1+2x^2 = \alpha_1(1+x+x^2)+\alpha_2(1+x^2)+\alpha_3\cdot 1$$

$$1 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = -1$$

$$0 = \alpha_1$$

$$2 = \alpha_1+\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 2$$

En $V=\mathbb{R}^2$ $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ base de $\mathbb{R}^2$/

$G_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es la matriz de Gram para cierto $\langle , \rangle$ pi en $\mathbb{R}^2$

¿Podríamos calcular $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$? Sí

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \underset{\text{en } \mathbb{R}}{=} \left(\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]^B\right)^T \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]^B =$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \ ✓ \qquad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3$$

16. Un sistema de vectores $\mathbb{S} = \{v_i : i \in \mathbb{I}\} \subset \mathbb{V} \setminus \{0\}$ se llama *ortogonal*, cuando

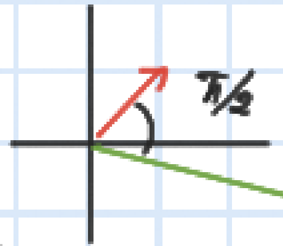
$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{para todo } i \neq j.$$

Obsérvese que $\mathbb{S}$ es un sistema ortogonal si, y sólo si, las matrices de Gram de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{S}$ son diagonales.

Ej : En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ con pi dado por $\langle X, Y \rangle = X^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} Y$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema ORTOGONAL o CONJUNTO ORTOGONAL

ya que $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$




En particular $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base $B$ de $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow G_B = \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \text{diagonal}$$

de todos los subconjuntos finitos de S son diagonales.

17. Un sistema ortogonal de vectores $\{u_i : i \in \mathbb{I}\}$ se llama *ortonormal*, cuando

$$\|u_i\| = 1 \quad \text{para todo } i \in \mathbb{I}.$$

En el caso anterior como $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{7}$ y $\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{21}$

$\Rightarrow B^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ resulta una BASE ORTONORMAL

y así $G_{B^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Observación

ORTOG (no nulo) $\Rightarrow$ LI

- Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un **conjunto ortogonal que no contiene al vector nulo** $\Rightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es l.i.
  Para probarlo, igualamos una combinación lineal a $0_{\mathbb{V}}$ :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0_{\mathbb{V}} \ (1)$$

Si tomamos producto interno m. a m. *"contra"* $v_1$:

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, v_1 \rangle = \langle 0_{\mathbb{V}}, v_1 \rangle = 0$$

$$\lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} + \cdots + \lambda_k \underbrace{\langle v_k, v_1 \rangle}_{=0} = 0$$

$v_1 \neq 0_V$

$\lambda_1 \underbrace{\|v_1\|^2}_{\neq 0} = 0$, como por hipótesis $v_1 \neq 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$ ✓

Esto que hicimos con $v_1$, podemos repetirlo para cada uno de los vectores del conjunto. Entonces, en (1) tomemos producto interno m. a m. *"contra"* $v_i$, para cada $i = 1, \ldots, k$:

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, v_i \rangle = \langle 0_{\mathbb{V}}, v_i \rangle = 0$$

$$\lambda_1 \langle v_1, v_i \rangle + \lambda_2 \langle v_2, v_i \rangle + \cdots + \lambda_k \langle v_k, v_i \rangle = 0 (2)$$

Pero $\langle v_j, v_i \rangle = 0 \ \forall j \neq i$. Entonces el único término que no se anula a la izquierda de la igualdad es $\lambda_i \|v_i\|^2$ y en (2) queda:

$\lambda_i \|v_i\|^2 = 0$, como por hipótesis $v_i \neq 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow \boxed{\lambda_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, k.}$

$\therefore \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente.

Ej: Sea en $\mathbb{R}_1[x]$ el producto interno dado por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

Dada $B = \{1+x, 1-x\}$ base de $\mathbb{R}_1[x]$

a) Hallar la $G_B$

b) Hallar $q(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ que resulten ortogonales a $p(x) = 2-3x$

a) $$G_B = \begin{pmatrix} \langle 1+x, 1+x \rangle & \langle 1+x, 1-x \rangle \\ \langle 1-x, 1+x \rangle & \langle 1-x, 1-x \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle 1+x, 1+x \rangle = \int_0^1 (1+x)^2 dx = \int_0^1 (1+2x+x^2)\, dx$$

$$= x\Big|_0^1 + x^2\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\langle 1+x, 1-x \rangle = \int_0^1 (1+x)(1-x)\, dx = \int_0^1 (1-x^2)\, dx$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\langle 1-x, 1-x \rangle = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \int_0^1 (1-2x+x^2)\, dx$$

$$= x\Big|_0^1 - x^2\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ G_B = \begin{pmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$G_B = \begin{pmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Obs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{G_B} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

¿A qué par de polinomios le hemos calculado el pi?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \left([p]^B\right)^T ; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = [q]^B$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$p(x) = 1(1+x) + 1(1-x)$ $\qquad$ $q(x) = 1.(1+x) - 1(1-x)$

$p(x) = 2$ $\qquad$ $q(x) = 2x$

$$\therefore\ \langle 2, 2x \rangle = 2 \text{ ya que } \int_0^1 (2 \cdot 2x)\, dx = 4\int_0^1 x\, dx$$

$$= 4\, \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2$$

b) $q(x) \in \mathbb{R}_1[x] \,/\, \langle q(x), 2-3x \rangle = 0$

$$[q(x)]^B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \wedge \quad 2-3x = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(1-x)$$

$$2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$-3 = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\Downarrow\ \alpha_1 = -1/2 \quad \Rightarrow [2-3x]^B = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = \frac{5}{2}$$

$$\langle q(x), 2-3x \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{6}+\frac{10}{6} & -\frac{2}{6}+\frac{5}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 0 \Rightarrow \underline{\alpha + \beta = 0}$$

$$\therefore \quad [g(x)]^B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow g(x) = \alpha(1+x) + (-\alpha)(1-x)$$

$$\underline{g(x)} = \alpha(1+x-1+x) = \alpha(2x)$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\therefore \quad \{2-3x\}^{\perp} = \{\alpha(2x),\ \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{gen}\{x\}$$

$$g(x) \in \text{gen}\{x\}$$