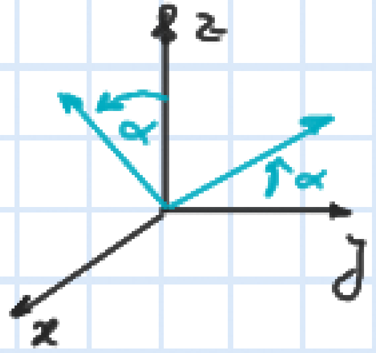
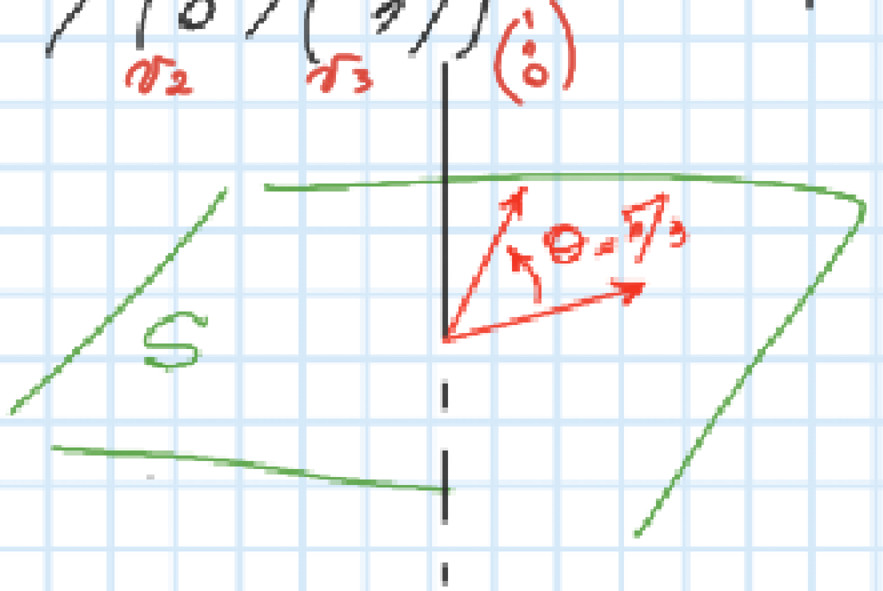
Obtener la matriz en base canónica de la rotación de eje $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ sobre el plano $S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ (Ángulo $\pi/3$)

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$





$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & * \end{array}\right)$$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$* \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$[T]_E = \underbrace{[M]_B^E}_{\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}} [T]_B^B \underbrace{[M]_E^B}_{\left([M]_B^E\right)^{-1}}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3$$

4. Sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\},$$
$$T = \text{gen}\left\{\underbrace{[-1\ \ 2\ \ 2\ \ 0]^T}_{u_1 \not\in S},\ \underbrace{[3\ \ 0\ \ 0\ \ 2]^T}_{u_2}\right\} \Rightarrow T \not\subset S$$

$T \not\subset S \Rightarrow$ *

Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga, a la vez, a una base de S y a una base de T.

$\dim S = 3 \qquad \dim T = 2 \qquad \mathcal{B}_T = \{u_1, u_2\}$

$\mathcal{B}_S = \{v_1, v_2, v_3\} \qquad \dim \mathbb{R}^4 = 4$

Base de $\mathbb{R}_4$ $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

$T \subset S \quad \dim(S \cap T) = \dim T = 2$

* $T \not\subset S \quad \dim(S \cap T) = 1$

¿$\dim(S \cap T) = 0$? imposible $3 + 2 = 5 > 4$

Busco $S \cap T$ $\qquad$ Busco $v \in S \cap T$

Si $v \in T \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 3\beta \\ 2\alpha \\ 2\alpha \\ 2\beta \end{pmatrix}$ Si Además $v \in S$

$-\alpha + 3\beta + \cancel{2\alpha} - \cancel{2\alpha} - 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow$

$v = \alpha\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Condiciones de T $\qquad \underline{x_2 = x_3 = 2\alpha} \qquad t = 2\beta \qquad \underline{2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0}$

$x_1 = -x_2/2 + 3/2\ x_4$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_T} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\mathcal{B}_S$

$\in \mathcal{B}_T$

$\in \mathcal{B}_S$

$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ $\qquad$ buscar 2 vect LI con $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que cumplan la condición

---

Combinaciones lineales convexas

V espacio vectorial $\qquad A \subset V$

$A = \{v_1, v_2, \dots v_k\}$

CL de vectores de A $\qquad$ (Promedio ponderado)

$p_1 v_1 + p_2 v_2 + \dots + p_k v_k$

$p_i \in \mathbb{K} \qquad 0 \leq p_i \leq 1 \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Materia Historia

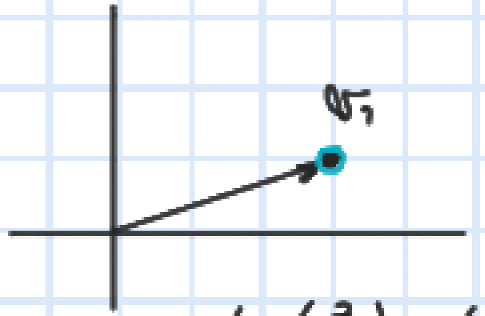
TP	Parcial 1	Parcial 2	Oj...
$v_1 = 8$	$v_2 = 7$	$v_3 = 9$	$v_4 = 6$
10%	80%		10%

p_i

$0{,}1\ 8 + 0{,}8\ 7 + 0{,}8\ 9 + 0{,}1\ 6 =$

$\mathbb{R}^2$ $A = \left\{ \underset{v_1}{\binom{3}{1}} \right\}$ $p_1 v_1$

$0 \le p_1 \le 1$ $p_1 = 1$

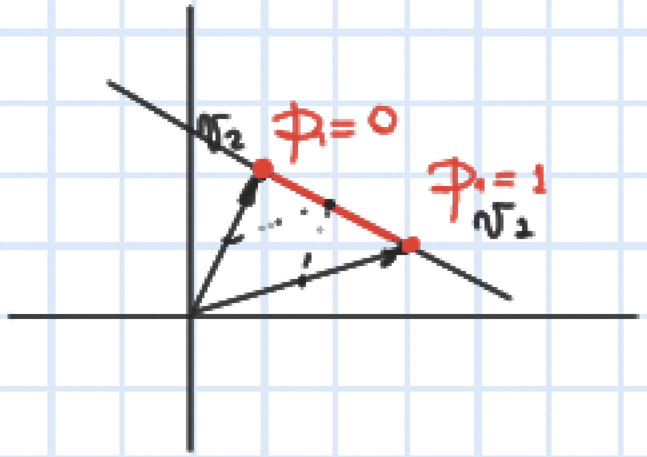


p_1 en $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ $\left\{ \underset{v_1}{\binom{3}{1}} \; \underset{v_2}{\binom{1}{2}} \right\}$. $p_1 \binom{3}{1} + p_2 \binom{3}{2}$

$p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - p_1$

$0 \le p_i \le 1 \quad 1 \le i \le 2$



$p_1 v_1 + p_2 v_2 =$

$= p_1 v_1 + (1 - p_1) v_2 =$

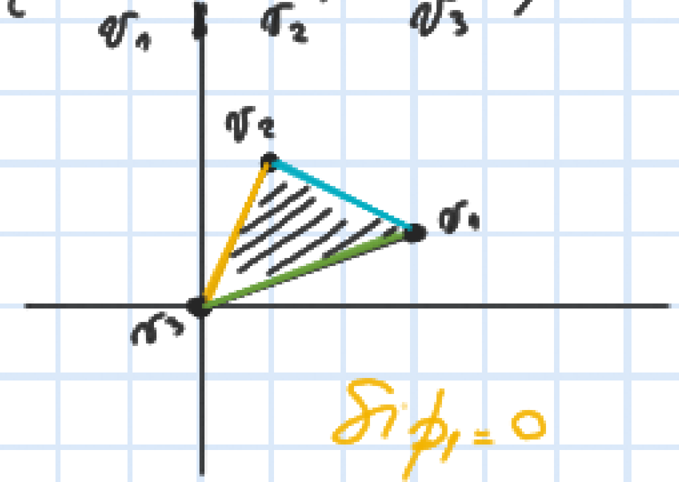
$= v_2 + p_1 (v_1 - v_2)$

Si p_1 fuera cualquier $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ tengo una recta pero como $0 \le p_1 \le 1$ lo que tengo es un segmento.

$A = \left\{ \underset{v_1}{\binom{3}{1}} \; \underset{v_2}{\binom{1}{2}} \; \underset{v_3}{\binom{0}{0}} \right\}$ $p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$p_2 = 0$



Si $p_3 = 0 \Rightarrow p_1 v_1 + p_2 v_2$

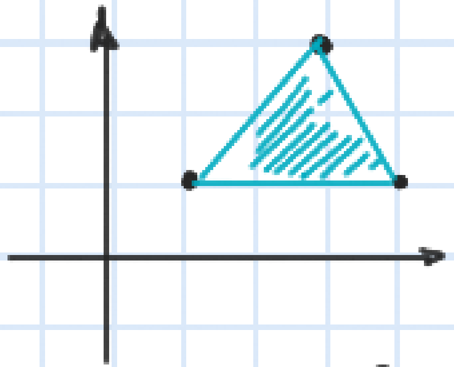
$p_1 + p_2 = 1$

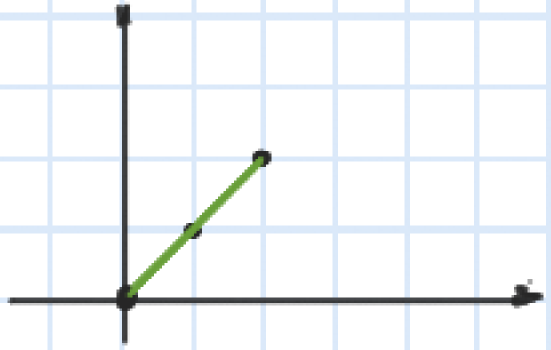
Si $p_1 = 0$ $p_2 v_2$ $0 \le p_2 \le 1$

Donde irá a parar la CLC si

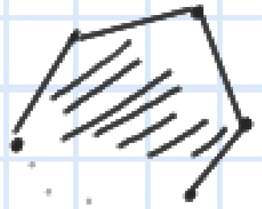
$p_1 = 1/2 \quad p_2 = 1/4 \quad p_3 = 1/4$

$A = \left\{ \binom{1}{1} \binom{2}{2} \binom{0}{0} \right\}$

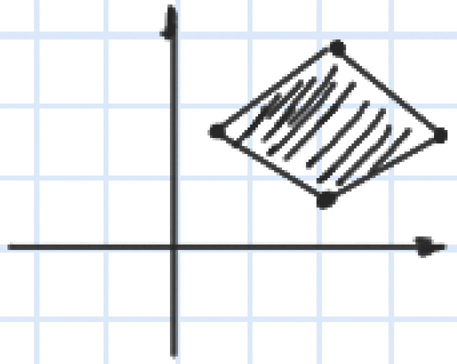




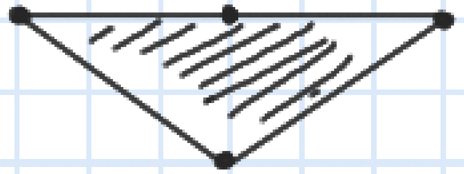
En $\mathbb{R}^2$ $A \{v_1, v_2, \dots v_k\}$



C L Convexa de los vectores de A



polígono de k vértices (o menos) y su interior



$C(A)$: combinaciones lineales convexas de los vectores de A

2.7 $T(C(A)) = C(T(A))$ $A = \{v_1, \dots v_k\}$

$$T\left(\sum_{i=1}^{k} p_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i \, T(v_i)$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

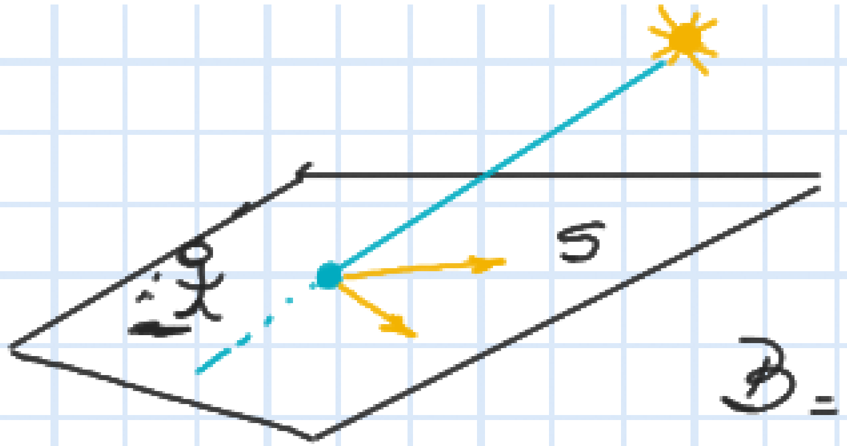
11. Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3 = 0\}$.

(a) Hallar la imagen por Π del segmento de extremos $[2 \;\; 1 \;\; 0]^T$ y $[1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

(b) Hallar la imagen por Π del segmento de extremos $[1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ y $[1 \;\; 0 \;\; 1]^T$.

(c) Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $[2 \;\; 1 \;\; 0]^T$, $[1 \;\; 1 \;\; 1]^T$, $[1 \;\; 0 \;\; 1]^T$.

(d) Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $[2 \;\; 1 \;\; -1]^T$, $[1 \;\; 1 \;\; 0]^T$, $[0 \;\; 1 \;\; 0]^T$.



Para definir la transf pongo una base conveniente

$$\mathcal{B} = \{ \underbrace{v_1}_{\text{director de la recta}}, \underbrace{v_2, v_3}_{\in S} \}$$

Ejemplo $\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{generador de la recta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad T(v_1) = 0 \quad T(v_2) = v_2 \quad T(v_3) = v_3$

FÓRMULA:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= \beta \\ y &= \alpha + \beta + \gamma \\ z &= \gamma \end{aligned} \qquad \alpha = y - x - z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (y-x-z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (y-x-z)\, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x\, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix}}$$

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_E^E = M_B^E \, [T]_B^B \, M_E^B =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{array}{ccc} & & \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \\ T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{array}$$

Cuando proyecto la imagen de un segmento puede ser un punto o un segmento

TIP: hallo la imagen de los extremos

(a) Hallar la imagen por II del segmento de extremos $[2 \quad 1 \quad 0]^T$ y $[1 \quad 1 \quad 1]^T$.

$$T\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

La imagen es el segmento que tiene por extremos los puntos $\underset{v_2}{\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}}$ y $\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 =$$

$$p_1 v_1 + (1 - p_1) v_2 =$$

$$= v_2 + p_1 (v_1 - v_2)$$

$$0 \leq p_1 \leq 1$$

(b) Hallar la imagen por II del segmento de extremos $[1 \quad 1 \quad 1]^T$ y $[1 \quad 0 \quad 1]^T$.

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ La imagen es un punto $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

el segmento que une $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ tiene la dirección $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

dirección de la recta

(c) Hallar la imagen por II del triángulo de vértices $[2 \quad 1 \quad 0]^T$, $[1 \quad 1 \quad 1]^T$, $[1 \quad 0 \quad 1]^T$.

Busco la imagen de los vértices del triángulo

$$T\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ $\alpha=1$ $\alpha=0$

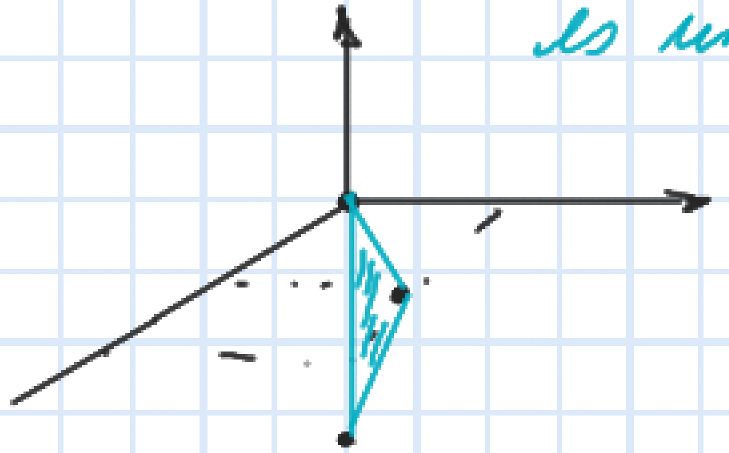
Rta: la imagen es el segmento que une los ptos $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

(d) Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $[2\ \ 1\ \ -1]^T$, $[1\ \ 1\ \ 0]^T$, $[0\ \ 1\ \ 0]^T$.

$$T\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}_{A} \qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{B} \qquad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}_{C.}$$

Los puntos no están alineados. La imagen es un triángulo de vértices ABC



6. Sean $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$ y $\mathbb{U}$ los subespacios de $\mathbb{R}_4[x]$ definidos por $\quad \dim \mathbb{R}_4[x] = 5$

$$\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(3) = p(2) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{T} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(6) = p(3) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{U} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) = 0\}.$$

Construir un base de $\mathbb{U}$ que contenga a una base de $\mathbb{T}$ y a una base de $\mathbb{S}$. ¿Es única? Si la respuesta es negativa, construir otra.

$\mathcal{B}_S = \{p_1, p_2\}$ $\quad \mathcal{B}_T^1 = \{p_2, p_3\}$ $\quad p_2 \in S \cap T$

$\dim S = 2 \qquad \dim T = 2 \qquad \dim U = 4$

Chequeamos C.Nec. $S \subset U$ ✓ $T \subset U$ ✓

¿$S \cap T$? $\quad S \cap T = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : 0 = p(3) = p(2) = p(6) = p(1)\}$

$\dim S \cap T = 1 \qquad S \cap T = \text{gen}\{\underbrace{(x-3)(x-2)(x-6)(x-1)}_{p_2}\}.$

$$\mathcal{B}_U = \{\overbrace{p_1 \quad \underbrace{p_2}_{\in S,\ \in T}}^{\in S} \quad \underbrace{p_3}_{\in T} \quad p_4\}$$

$p_1 = (x-3)(x-2)(x-1)\underbrace{(ax+b)}_{\text{no hace falta}}$

$$\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(3) = p(2) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{T} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(6) = p(3) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{U} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) = 0\}.$$

$p_3 = (x-6)(x-3)(x-1)$

$p_4 = (x-1)$

7. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix}1 & \overset{v_1}{1} & 2\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}1 & \overset{v_2}{1} & -1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}1 & \overset{v_3}{-1} & 0\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\end{bmatrix}^T,$$

y sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio definido por $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$. Hallar todas las soluciones de la ecuación $\underline{T(x) = \begin{bmatrix}2 & 2 & 3\end{bmatrix}^T}$ que pertenecen al subespacio $\mathbb{S}$.

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$[T]_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$$

Si es compatible $\Rightarrow \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(T)$

Si es incompatible $\notin \operatorname{Im}(T)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{-1} \end{array}\right)$$

SC Indet. infinitas soluciones

$\alpha + \beta + \gamma = 2 \qquad 2\beta + 4\gamma = 2 \qquad \beta + 2\gamma = 1$

$\alpha = 2 - 1 + 2\gamma - \gamma \qquad \beta = 1 - 2\gamma$

$\alpha = 1 + \gamma$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = (1+\gamma)\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{T\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}} + (1-2\gamma)\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{T\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}} + \gamma\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}}_{T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} = T\left[(1+\gamma)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + (1-2\gamma)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$= T\left[\begin{pmatrix}1+\gamma+1-2\gamma+\gamma \\ 1+\gamma+1-2\gamma-\gamma \\ 2+2\gamma-1+2\gamma\end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix}2\\2-2\gamma\\4\gamma+1\end{pmatrix}$$

Preimagen Recta

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$$

Además pide que $\in S$

$x + y + 2z = 0$

$2 + 2 - 2\gamma + 2 + 8\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix} \checkmark$$