MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACION LINEAL :

Sean dos espacios vectoriales V y W , $T: V \to W$ una transformación lineal y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente.

Veamos cómo construir una matriz $[T]_B^C$ que represente dicha transformación lineal.

Cualquier vector del espacio vectorial V se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base B:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \Rightarrow [v]^B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Luego $T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(v_j)$

Sin perder generalidad tomemos $B = \{v_1, v_2\}$ $C = \{w_1, w_2, w_3\}$

$n = 2$ $m = 3$

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \wedge [v]^B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

(1) $T(v) = \alpha_1 \underbrace{T(v_1)}_{\in W} + \alpha_2 \underbrace{T(v_2)}_{\in W}$ $\therefore$

se pueden escribir como CL de los elementos de C

$T(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} w_3 \wedge T(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3$)

En (1) $T(v) = \alpha_1 (a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} w_3) + \alpha_2 (a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3)$

$T(v) = (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12}) w_1 + (\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22}) w_2 + (\alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32}) w_3$

$[T]_B^C \in K^{3\times 2}$

y así $[T(v)]^C = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} \\ \alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}}_{[v]^B}$

En gral $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$

$$\underbrace{[T(v)]^C}= \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\alpha_j \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [T(v_1)]^C & [T(v_2)]^C & \ldots & [T(v_n)]^C \end{array} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{[T]_B^C \in K^{m\times n}} \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{[v]^B}$$

$$\boxed{[T(v)]^C = [T]_B^C [v]^B}$$

Ejemplo 1 : $n = 4$ $m = 3$

$T: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_2[x] \,/\, T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b) + (c+d)x + (a+b+c+d)x^2$ TL

con $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y

$C = \{1, 1+x, 1-x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$

Armamos $[T]_B^C$

$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + x^2 \longrightarrow [1+x^2]^C = (2 \;\; 0 \;\; -1)^T$

$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 + 2x^2 \longrightarrow [2+2x^2]^C = (4 \;\; 0 \;\; -2)^T$

$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 + x + 3x^2 \longrightarrow [2+x+3x^2]^C = (4 \;\; 1 \;\; -3)^T$

$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2x + 4x^2$

$[2+2x+4x^2]^C = (4 \;\; 2 \;\; -4)^T$

$$\Rightarrow [T]_B^C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

4: dim$(\mathbb{R}^{2\times 2})$

3: dim $\mathbb{R}_2[x]$

¿Cómo opera?

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$3\times 4 \qquad 4\times 1 \qquad 3\times 1$

$\Rightarrow [T]_B^C \cdot [M]^B = [T(M)]^C$ para cierta matriz M

Con $M = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

y donde $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 + (-2)x + (-1)x^2 = 1 - 2x - x^2$ (por fórmula)

pero también $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2(1) + (-2)(1+x) + 1(1-x^2) = 1 - 2x - x^2$

Ejemplo 2: Sea $T: \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^3$ una TL donde

$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $B = \{1, x\}$ y $C = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ bases de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente

a) Calcular $T(2-3x)$

b) Hallar, si existe $p \in \mathbb{R}_1[x] / T(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n = 2 \qquad m = 3$

Como $[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $[T(1)]^C$, $[T(x)]^C$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(1) = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ T(x) = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Puedo con esto hallar la fórmula de la TL

$$a + bx = a\cdot 1 + b\cdot x \Rightarrow T(a+bx) = aT(1) + bT(x) = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(a+bx) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix} \qquad T: \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^3$$

a) $T(2-3x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\exists p \in \mathbb{R}_1[x] / T(a+bx) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$?

$p(x) = a + bx / T(a+bx) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = 1 \\ a = 1 \end{matrix} \Rightarrow p(x) = 1 + x$

$\therefore T^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = 1 + x$

Como $Nu(T) = \{0_{\mathbb{R}_1[x]}\}$, T es monomorfismo $\Rightarrow \overbrace{T^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}^{\text{pre-imagen}}$ es única

---

Propiedad: $T: \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ $\dim(\mathbb{V}) = n$; $\dim(\mathbb{W}) = m$ una TL

$\Rightarrow \exists [T]_B^C$ B base de $\mathbb{V}$ y C base de $\mathbb{W}$

- $v \in Nu(T) \Leftrightarrow [v]^B \in Nul([T]_B^C)$

$v \in Nu(T) \Leftrightarrow [T(v)]^C = [0_W]^C$

$\Leftrightarrow [T]_B^C \cdot [v]^B = 0_K^m \Leftrightarrow [v]^B \in Nul([T]_B^C)$

- $w \in Im(T) \Leftrightarrow [w]^C \in Col([T]_B^C)$

$w \in Im(T) \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{V} : [T(v)]^C = [w]^C$

$\Leftrightarrow [T]_B^C \cdot [v]^B = [w]^C \Leftrightarrow [w]^C \in Col([T]_B^C)$

Ejemplo 2 : Sea $T: \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^3$ una TL donde

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } B = \{1, x\} \text{ y } C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

bases de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente

a) Calcular $T(2-3x)$

b) Hallar, si existe $p \in \mathbb{R}_1[x] \,/\, T(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(*)$

$n = 2$ $m = 3$

$$[2-3x]^B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad 2 \cdot 1 - 3x = 2 - 3x$$

$$[T]_B^C \, [p(x)]^B = [T(p(x))]^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(p(x)) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DE UNA TL y MATRIZ ASOCIADA : (Ej 13)

$$T \text{ es monomorfismo} \Leftrightarrow Nul([T]_B^C) = \{0_{K^n}\}$$

$$T \text{ es epimorfismo} \Leftrightarrow Col([T]_B^C) = K^m$$

$$T \text{ es isomorfismo} \Leftrightarrow [T]_B^C \text{ es inversible}$$

$(n = m)$

$$\Downarrow$$

$$([T]_B^C)^{-1} = [T^{-1}]_C^B$$

Matriz de la composición

$\dim(\mathbb{V}_K) = n$; $\dim(\mathbb{W}_K) = m$ y $\dim(\mathbb{U}_K) = p$ y

$T_1 : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ y $T_2 : \mathbb{W}_K \to \mathbb{U}_K$ dos transformaciones lineales

donde $T_2 \circ T_1 : \mathbb{V}_K \to \mathbb{U}_K$ es también TL

$B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ base de $\mathbb{V}_K$

$C = \{w_1, w_2, \dots w_m\}$ base de $\mathbb{W}_K$

$D = \{u_1, u_2 \dots u_p\}$ base de $\mathbb{U}_K$

Entonces existen $[T_1]_B^C$ y $[T_2]_C^D$ y vale :

$$[(T_2 o T_1)]_B^D = [T_2]_C^D [T_1]_B^C$$

ya que : $[T_1]_B^C \cdot [v]^B = [T_1(v)]^C$

$$[T_2]_C^D \left([T_1]_B^C \cdot [v]^B\right) = [T_2]_C^D \cdot [T_1(v)]^C$$

$$\left([T_2]_C^D \cdot [T_1]_B^C\right)[v]^B = [T_2[T_1(v)]]^D$$

Por otro lado $[T_2 \circ T_1]_B^D \cdot [v]^B = [(T_2 \circ T_1)(v)]^D = [T_2(T_1(v))]^D$

Ej: $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a+b\\0\end{pmatrix}$

$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x] \,/\, T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1 + (x_2+x_3)x$

Calcular $[T_2 \circ T_1]_B^D$ con $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^2$

$D = \{1, 1+x\}$ base de $\mathbb{R}_1[x]$

$$[T_2 \circ T_1]_B^D = [T_2]_C^D \cdot [T_1]_B^C$$

C base de $\mathbb{R}^3$

$\Downarrow$

en part C: canónica

$$[T_1]_B^C = \left(\left[T_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]^C \left[T_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]^C \right) = \begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$[T_2]_C^D = \left(\left[T_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]^D \left[T_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]^D \left[T_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]^D \right) = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

donde $T_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1$ $\quad T_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = x$ $\quad T_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = x$

$$\therefore \; [T_2 \circ T_1]_B^D = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}$$

con $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1[x]$

Tarea poner otra base C y repetir la cuenta

Sea $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ una TL

$B = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ base de $\mathbb{V}$

$C = \{w_1, w_2, \dots w_m\}$ base de $\mathbb{W}$

$$T : \underset{B}{\mathbb{V}} \longrightarrow \underset{C}{\mathbb{W}}$$

Si ahora tengo otra base B' de $\mathbb{V}$ y otra base C' de $\mathbb{W}$

¿Cómo se relacionan $[T]_B^C$ y $[T]_{B'}^{C'}$?

Podemos escribir $T = I_{\mathbb{W}} \circ T \circ I_{\mathbb{V}}$ $\quad I_{\mathbb{V}}$ y $I_{\mathbb{W}}$ son TL

$$[T]_{B'}^{C'} = \underbrace{[I_{\mathbb{W}}]_C^{C'}}_{\text{cambio de } C \text{ a } C'} \cdot [T]_B^C \, \underbrace{[I_{\mathbb{V}}]_{B'}^{B}}_{\text{cambio de } B' \text{ a } B}$$

$$T: \begin{tikzcd} B \arrow[r] & C \arrow[d, bend left, "{[M]_C^{C'}}"] \\ B' \arrow[u, bend left, "{[M]_{B'}^{B}}"] \arrow[r] & C' \end{tikzcd}$$

M: cambio de base

$$\therefore \; [T]_{B'}^{C'} = [M]_C^{C'} \, [T]_B^C \cdot [M]_{B'}^{B}$$