

Ejercicios GUIA III - 3. Parametrización de Superficies

30. Determinar las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a las superficies siguientes en el punto que se indica.

c) La porción del cono circular

$$\vec{X}(u, v) = (v \cos(u), 2v, v \sin(u)), \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 3, \quad Q_0 = (0, 4, 2)$$

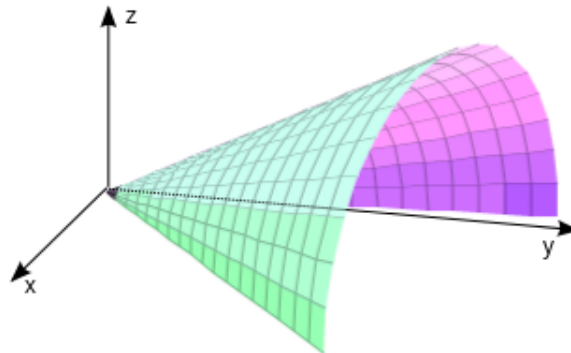
Resolución: Primero vamos a llevarlo a una ecuación cartesiana para ver que efectivamente es un cono y poder graficarlo. La idea es escribir como x , y y z las componentes de la parametrización e intentar encontrar una ecuación independiente de los parámetros (u y v)

$$\begin{array}{lcl} x(u, v) = v \cos(u) & & \\ y(u, v) = 2v & \rightarrow & x^2 + z^2 = v^2 \\ z(u, v) = v \sin(u) & & y^2 = 4v^2 \end{array} \quad \rightarrow \quad x^2 + z^2 = \frac{y^2}{4}$$

Cuya ecuación resulta un cono doble circular de eje y . Para determinar que porción del cono esta parametrizada tenemos que mirar los límites del dominio de la parametrización (valores que pueden tomar u y v). Es claro que como v esta entre 0 y 3 los valores que toma y estarán entre 0 y 6. Como $0 \leq u \leq \pi$ la manera más sencilla de ver a que porción del cilindro corresponde es pensar que el $\sin(u)$ entre 0 y π es positiva por lo que queda la porción del cono con $z > 0$, resumiendo:

$$4(x^2 + z^2) = y^2, \quad \text{con } z > 0, \quad 0 \leq y \leq 6.$$

Figura 1: Ej 30 c)



Ahora queremos escribir la ecuación del plano tangente y la recta normal en el punto $Q_0 = (0, 4, 2)$. Primeros necesitamos los valores de u y v (que llamaremos (u_0, v_0) cuya imagen me da el punto Q_0

$$\begin{array}{lcl} 0 = v_0 \cos(u_0) & & \\ 4 = 2v_0 & \rightarrow & u_0 = \pi/2 \\ 2 = v_0 \sin(u_0) & & v_0 = 2 \end{array} \quad \text{es decir} \quad \vec{X}(\pi/2, 2) = (0, 4, 2)$$

Si la parametrización es regular (en el próximo ejercicio hablaremos de esto) un vector normal al plano tangente en el punto Q_0 podemos escribirlo como: $\vec{N} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u_0, v_0)$, en nuestro ejercicio resulta:

$$\vec{N} = (-v \sin(u), 0, v \cos(u))_{(\pi/2, 2)} \times (\cos(u), 2, \sin(u))_{(\pi/2, 2)} = (-2, 0, 0) \times (0, 2, 1) = (0, 2, -4)$$

Con un vector normal y sabiendo que tiene que pasar por el punto Q_0 podemos escribir la ecuación cartesiana del plano tangente y la recta normal a la superficie.

$$\pi_{tg} : \quad \vec{N} \cdot (x, y, z) = \vec{N} \cdot Q_0 \quad \rightarrow \quad 2y - 4z = 0$$

$$\mathbb{L}_{normal} : \quad \vec{X} = \lambda \vec{N} + Q_0 \quad \longrightarrow \quad (x, y, z) = \lambda(0, 2, -4) + (0, 4, 2), \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Dejamos que ubiquen el punto Q_0 sobre la superficie, grafiquen el plano tangente y la recta normal y vean geoméricamente que el plano pasa por el origen.

31. Sean $D = [0, 2\pi] \times [0, 2]$, $\vec{\Phi} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\Phi}(u, x) = (x, 2 \cos(u), 2 \sin(u))$.

a). Mostrar que es una parametrización de una porción de cilindro. Graficar $S = \text{Img}(\vec{\Phi})$.

b). Calcular el vector normal y analizar si es una parametrización regular en todos los puntos.

c). Hallar el plano tangente a la superficie en el punto $(1, \sqrt{3}, 1)$.

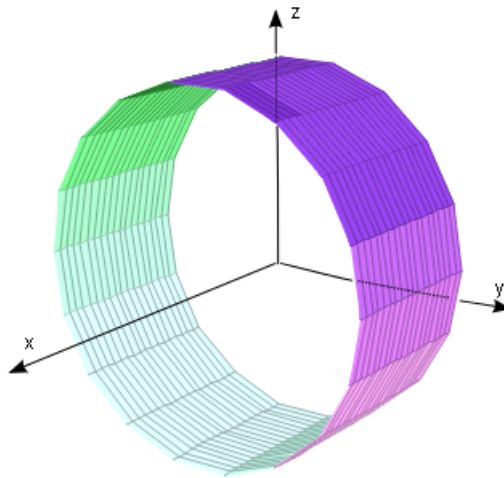
Resolución: a). Como en el ejercicio anterior para identificar la superficie llevamos la parametrización a una ecuación cartesiana

$$\begin{aligned} x(u, x) &= x \\ y(u, x) &= 2 \cos(u) \\ z(u, x) &= 2 \sin(u) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= x \\ y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad y^2 + z^2 = 4$$

Noten que no hay condición sobre la coordenada x (eje del cilindro circular) salvo que está entre 0 y 2 (dominio de la variable x en la parametrización, resumiendo:

$$y^2 + z^2 = 4, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2.$$

Figura 2: Ej 31



b) Para ver que en todo punto $\vec{\Phi}$ es una parametrización regular del cilindro, tenemos que ver que cada componente de la parametrización es de clase C^1 y que en todo el dominio el vector normal que se obtiene de la parametrización no es idénticamente nulo. Que las componentes son de clase C^1 es evidente porque las funciones *seno*, *coseno* y la identidad x lo son. Sabemos además que para encontrar un vector normal a la superficie utilizando la parametrización es:

$$\text{Si } \vec{\Phi}(u_0, x_0) = (x_0, y_0, z_0) = P \quad \longrightarrow \quad \vec{N}_P = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x}(u_0, x_0)$$

Siendo $\vec{N}_P$ un vector normal a la superficie en P. Haciendo cuentas obtenemos:

$$\vec{N}_P = (0, -2 \sin(u_0), 2 \cos(u_0)) \times (1, 0, 0) = (0, 2 \cos(u_0), 2 \sin(u_0))$$

Y como el *seno* y el *coseno* no se anulan simultáneamente, $\vec{N}_P$ es un vector distinto del vector nulo para todo (u_0, x_0) . Por lo tanto $\vec{\Phi}$ es una parametrización regular del cilindro.

c) Para hallar el plano tangente tenemos que encontrar primero los valores de (u_0, x_0) que a través de $\vec{\Phi}$ nos dan el punto $(1, \sqrt{3}, 1)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 = x_0 & & x_0 = 1 & & \\ \sqrt{3} = 2 \cos(u_0) & \rightarrow & \cos(u_0) = \sqrt{3}/2 & \rightarrow & x_0 = 1 \\ 1 = 2 \sin(u_0) & & \sin(u_0) = 1/2 & & u_0 = \pi/6 \end{array}$$

Luego reemplazamos los valores de (u_0, x_0) en el vector normal resultando $\vec{N}_P = (0, \sqrt{3}, 1)$, y finalmente escribimos la ecuación del plano tangente a la superficie en ese punto:

$$\pi_{tg} : \quad \vec{N}_P \cdot (x, y, z) = \vec{N}_P \cdot (1, \sqrt{3}, 1) \quad \longrightarrow \quad \sqrt{3}y + z = 4$$