

Soluciones autoevaluación 1 y 2

1. Sea π el plano vertical que contiene al origen y es paralelo al vector $\vec{u} = (1, 1, 0)$ podemos afirmar que:

Como π es un plano vertical el vector vertical $\vec{v} = (0, 0, 1)$ es paralelo al plano, además $\vec{u} = (1, 1, 0)$ es paralelo al plano por enunciado y como pasa por el origen éste es un punto de paso ($P = (0, 0, 0)$), como el vector $(-1, -1, 0)$ es múltiplo de $\vec{u}$ una ecuación vectorial de π resulta:

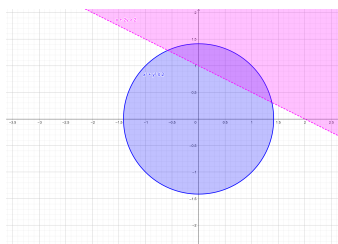
$$\vec{X} = \alpha(0, 0, 1) + \beta(-1, -1, 0), \quad \alpha, \beta \in R$$

Si queremos la ecuación cartesiana podemos obtener un vector normal al plano con $\vec{N} = \vec{v} \times \vec{u} = (-1, 1, 0)$, por lo tanto

$$\vec{N} \cdot \vec{X} = \vec{N} \cdot P \rightarrow x - y = 0$$

2. El conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y \leq 2, x + 2y > 2\}$ es:

Los puntos que cumplen $x^2 + y \leq 2$ son el interior del círculo azul (con su frontera) y los puntos $x + 2y > 2$ son el semiplano de color rosa sin su frontera, por lo anterior el conjunto A no puede ser abierto (hay puntos frontera que pertenecen a A) no cerrado los puntos de la recta dentro del círculo son frontera de A pero no pertenecen a A . Del gráfico se ve claramente que el conjunto es acotado única opción válida.



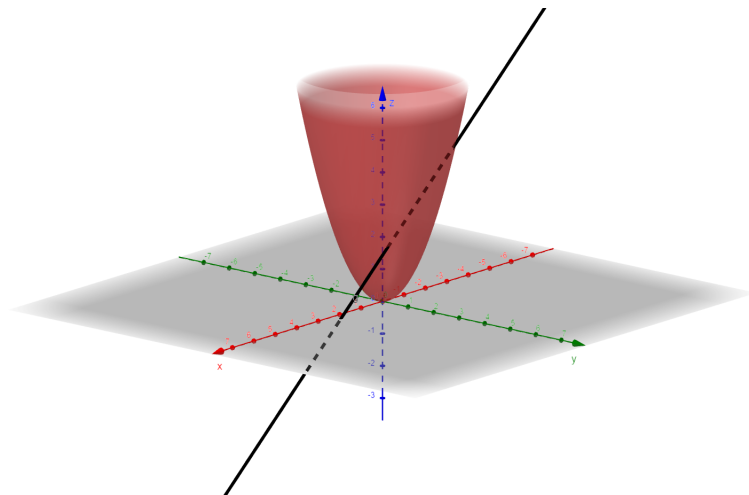
3. La intersección de la recta $L: \vec{X} = (1, 1, 2) + \lambda(2, -1, -3), \quad \lambda \in R$ con la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ es/son:

De la ecuación de L podemos escribir
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación de la superficie

$$z = x^2 + y^2 \rightarrow 2 - 3\lambda = (1 + 2\lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$$

Y al reemplazar en la ecuación de la recta obtenemos los puntos $(1, 1, 2)$ y $(-1, 2, 5)$.



4. Sea $f(x, y) = e^{x^2+2y-y^2}$

Primero determinamos los conjuntos de nivel K de la función

$$e^{x^2+2y-y^2} = K, \quad \rightarrow \quad x^2 + 2y - y^2 = \ln(K)$$

Si completamos cuadrados obtenemos $x^2 - (y - 1)^2 = \ln(K) - 1$, ahora vamos a calcular el conjunto de nivel 1 de f , si reemplazamos el valor $K = 1$ obtenemos hipérbolas

$$x^2 - (y - 1)^2 = \ln(1) - 1 = -1, \quad \rightarrow \quad (y - 1)^2 - x^2 = 1$$

El conjunto de nivel e lo obtenemos de la misma forma reemplazando $K = e$

$$x^2 - (y - 1)^2 = \ln(e) - 1 = 0, \quad \rightarrow \quad |x| = |y - 1|$$

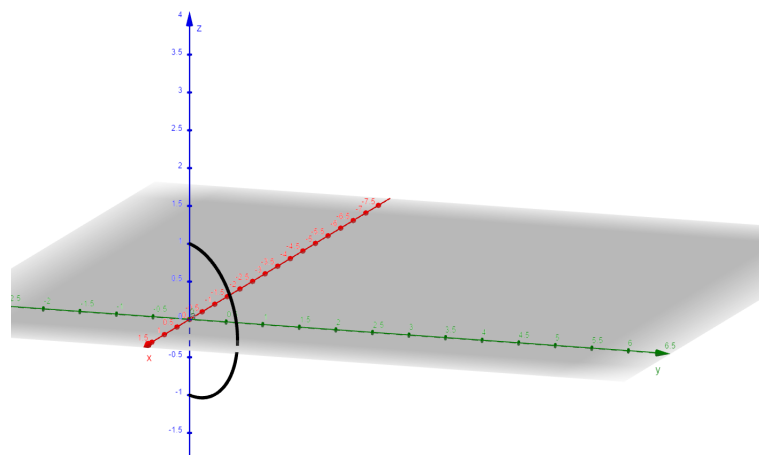
Quedando las rectas $y = x + 1$ e $y = -x + 1$. Por último observemos que como $f(x, y) = e^{x^2+2y-y^2} > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ el conjunto de nivel -1 es vacío.

5. El conjunto imagen de la función vectorial $\vec{g}(t) = (\text{sen}(t/2), \text{sen}(t/2), \cos(t/2))$, $t \in [0, 2\pi]$ es:

Los puntos (x, y, z) pertenecientes a la imagen deben cumplir

$$\begin{cases} x = \text{sen}(t/2) \\ y = \text{sen}(t/2) \\ z = \cos(t/2) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{Si ahora nos fijamos en los valores de } t \text{ observamos que en } [0, 2\pi] \text{ el } \text{sen}(t/2) \geq 0 \text{ por lo que una respuesta es:}$$

$$x^2 + z^2 = 1, \quad x = y, \quad x \geq 0$$



6. Sea $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L$, podemos afirmar que:

Este ejercicio es conceptual repasemos un poco las opciones, primero si el límite cuando $(x,y) \rightarrow (9,0)$ existe y es L entonces por cualquier curva que me acerque al origen también debe ser L , por lo que la afirmación:

El límite de f restringido a la curva $y = x^2$ cuando x tiende a cero es L es verdadera.

Veamos brevemente que las demás son falsas:

Claramente

- *El punto $(0,0)$ pertenece al dominio de f*
es falsa en general, pues el concepto de límite me dice a cuanto se acerca la función cuando me acerco al $(9,0)$ pero sin importar cuánto vale en el origen ni si existe $f(0,0)$
- *La función es continua en el punto $(0,0)$*
Con el mismo argumento que el ítem anterior, no necesariamente $f(9,0) = L$.
- *Los valores de la función están acotados en su dominio*
No necesariamente en el dominio los valores de f están acotados (no se van a infinito), si fuera en un entorno del $(0,0)$ si podría asegurarlo.

Un buen ejercicio que pueden hacer es inventarse contraejemplos para justificar las proposiciones falsas, queda como tarea.

7. Considerando el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$, podemos decir que:

Veamos si podemos calcular el límite, la estrategia que emplearemos es dividir en dos términos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left\{ \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right\}$$

Les dejamos que vean que el primer término se puede pensar como $0 \cdot$ acotado y por lo tanto el primer término tiende a cero. Mientras que el segundo término si se acercan por dos rectas distintas (por ejemplo $y = 0$ y $x = y$) el límite restringido da distinto, por lo que el límite pedido no existe.

8. La superficie $y = x^2 + z^2$ es el conjunto imagen de la/s funciones vectoriales:

La manera más conveniente es fijarse si las componentes de las funciones vectoriales propuestas cumplen con la ecuación.

Por ejemplo si trabajamos con

$$\vec{F}(u, v) = (u \cos(v), u^2, u \sin(v)), \quad u \in \mathbb{R}. v \in [0, 2\pi] \text{ tenemos:}$$

$$\begin{cases} x &= u \cos(v) \\ y &= u^2 \\ z &= u \sin(v) \end{cases} \rightarrow x^2 + z^2 = (u \cos(v))^2 + (u \sin(v))^2 = u^2 = y$$

Por lo que los puntos de la imagen pertenecen a la superficie, y son todos, por lo que es verdadera.

Claramente $\vec{F}(x, z) = (x, x^2 + z^2, z)$, $x, z \in \mathbb{R}$ también lo cumple, les dejamos como ejercicio que muestren que los otros dos campos vectoriales no lo cumplen, es decir el conjunto imagen no son los puntos de la superficie.