

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

HORMIGÓN I (74.01 y 94.01)

**ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE
INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO**

Parte 1

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

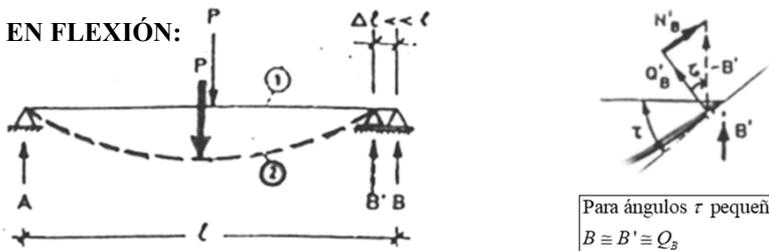
Descripción del problema

CASO 1) Entre causas y efectos existe una relación lineal

Cálculo lineal

- Material elástico lineal
- Pequeños desplazamientos

EN FLEXIÓN:



Para ángulos τ pequeños

$B \cong B' \cong Q_B$

$N'_B \cong 0$

Leonhardt - "ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO" - TOMO I - Fig. 10-1

Despreciamos los "efectos de 2° orden"

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

Descripción del problema

CASO 2) Entre causas y efectos no existe una relación lineal
Cálculo no-lineal

- Material NO es elástico lineal → no linealidad material
- Desplazamientos NO son pequeños o la incidencia de los mismos en las sollicitaciones NO es despreciable → no linealidad geométrica

Leonhardt - "ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO" - TOMO I - Fig. 10-1

NO se pueden despreciar los "efectos de 2º orden"
→ El equilibrio debe plantearse en el sistema deformado

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1º Parte

Lámina 3

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

Descripción del problema

COLUMNA EN FLEXO-COMPRESIÓN:

La inestabilidad global de un sistema estructural está asociada al colapso del sistema.

↓

Estado Límite Último de Inestabilidad del Equilibrio

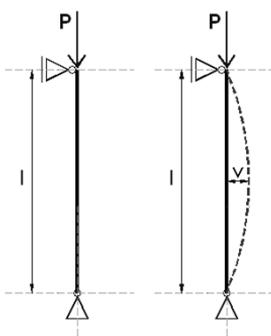
ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1º Parte

Lámina 4

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Marco Teórico
Euler (1744)
Materiales Ideales

Compresión centrada



ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA PEQUEÑAS DEFORMACIONES:

$$\chi = \frac{1}{\rho} \cong \frac{d^2v}{dx^2}$$

CURVATURA

$$-M(x) = EI \frac{d^2v}{dx^2}$$

(Convención de signos Argentina: M positivo cuando la deflexión es negativa)

EN ESTE CASO :

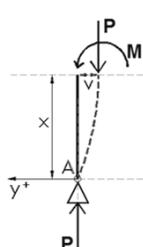
$$M^A = -M + P v = 0$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$\Rightarrow EI \frac{d^2v}{dx^2} + P v = 0$$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$



COMPRESIÓN CENTRADA
BARRA BIARTICULADA
MATERIAL ELÁSTICO IDEAL

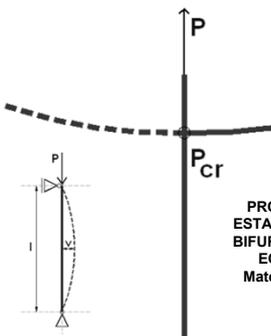
Bibliografía: "Resistencia de Materiales", Timoshenko

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

Lámina 5

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Marco Teórico
Euler (1744)
Materiales Ideales



$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

Condic. de Borde

1) $x=0; v=0 \Rightarrow C_2=0 \Rightarrow v_{(x)} = C_1 \sin kx$

2) $x=l; v=0 \Rightarrow$

2a) $C_1=0 \rightarrow$ solución trivial

2b) $\sin kl=0 \Rightarrow k l = n \pi \quad (n=1,2,3,...)$

ECUACIÓN DE PANDEO

$$\Rightarrow P = n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

CARGA CRÍTICA DE PANDEO DE EULER

$$\Rightarrow P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

Material Elastoplástico ideal
TAMBIÉN
PROBLEMA DE ESTABILIDAD CON BIFURCACIÓN
DEL EQUILIBRIO
EL VALOR DE P_{cr} SERÁ DISTINTO

PROBLEMA DE ESTABILIDAD CON BIFURCACIÓN DEL EQUILIBRIO
Material Elástico

Bibliografía: "Resistencia de Materiales", Timoshenko

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

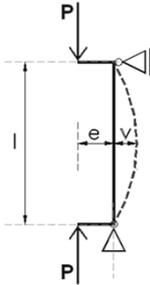
Lámina 6

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

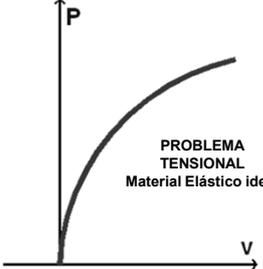
Marco Teórico

Materiales Ideales

COMPRESIÓN EXCÉNTRICA
MATERIAL ELÁSTICO IDEAL

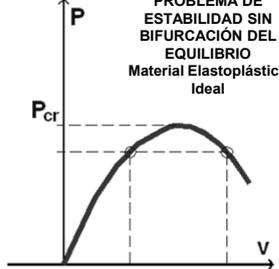


PROBLEMA TENSIONAL
Material Elástico ideal



COMPRESIÓN EXCÉNTRICA
MATERIAL ELASTOPLÁSTICO IDEAL

PROBLEMA DE ESTABILIDAD SIN BIFURCACIÓN DEL EQUILIBRIO
Material Elastoplástico Ideal



$$EI \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + P \cdot v + M_{ext} = 0$$

$$v = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cdot \cos kx + f(M_{ext} / EI)$$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

Lámina 7

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

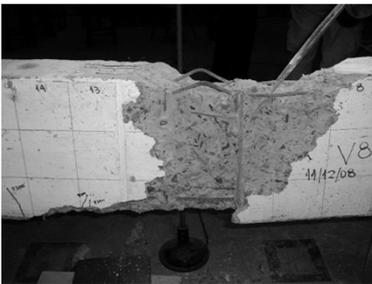
Qué parámetros inciden sobre la Carga Crítica?

- El tipo de sollicitación
- La geometría de la sección
- El material!!



Columna tubular de acero
Foto: Rul Carneiro de Barros, Tesis doctoral, 1983





Pandeo de barras de armadura
Ensayo FIUBA – 28-10-2009

Columna hormigón armado
Foto: Awati & Khadiranaikar, Engineering Structures, Vol 37, pp76-87, 2012

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

Lámina 8

Materiales y Vínculos Ideales

Qué parámetros inciden?

- Los vínculos

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

$P_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{EI}{l_e^2}$

$l_e = l$

$l_e = 2l$

$l_e = l$

$l_e = 0.70l$

$l_e = 0.50l$

l_e : longitud efectiva, distancia entre puntos de inflexión de la configuración de pandeo

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte
Lámina 9

Qué parámetros inciden?

- La esbeltez

Esbeltez aumenta

↓

Carga crítica disminuye!!

Gran Esbeltez

Pequeña Esbeltez

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte
Lámina 10

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> EFFECTOS DE 2° ORDEN EN ELEMENTOS COMPRIMIDOS DE HORMIGÓN ARMADO </div>
	<div style="display: flex; align-items: center;">  <ul style="list-style-type: none"> - No es elasto-plástico "ideal" - Material compuesto de complejo comportamiento - No existen vínculos ideales - Siempre existen imperfecciones y/o excentricidades </div>
ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte	
Lámina 11	

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I	DEFINICIÓN DE ESBELTEZ:
	<p> Esbeltez Geométrica: $\lambda_{geom} = \frac{l}{d_p}$ </p> <p> $\left\{ \begin{array}{l} l: \text{Longitud del elemento} \\ d_p: \text{Dimensión de la columna paralela al plano de pandeo} \end{array} \right.$ </p> <p> ESBELTEZ MECÁNICA: $\lambda_m = \frac{l}{r}$ </p> <p> r: Radio de giro de la sección; $r = \sqrt{\frac{I_g}{A_g}}$ </p> <p> $\left\{ \begin{array}{l} I_g: \text{Momento de inercia de la columna} \\ A_g: \text{Area de la columna} \end{array} \right.$ </p> <p> Sección rectangular: $r = \sqrt{\frac{b h^3}{12} \frac{1}{b h}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} \cong 0.30 h$ </p> <p> EN EL CÁLCULO: $l = l_e$ </p> <p> l_e: Longitud de pandeo o longitud efectiva, depende de las condiciones de vínculo. </p> <p> Se obtiene multiplicando la longitud sin arriostramientos l_u por un coeficiente k. </p> <p> $l_e = k l_u$ </p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-right: 10px;"> $\lambda_m = \frac{k l_u}{r}$ </div> <p>ESBELTEZ</p> </div>
ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte	
Lámina 12	

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

$$\lambda_m = \frac{k l_u}{r}$$

ESBELTEZ

l_u : Longitud sin arriostramientos

Distancia libre entre losas de entepiso, vigas u otros elementos capaces de proporcionar apoyo lateral en la dirección considerada.

Cuando existan capiteles, ábacos o cartelas en las columnas, la longitud, l_u debe ser medida hasta el extremo inferior del capitel, ábaco o cartela, en el plano considerado.

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte
Lámina 13

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

El comportamiento del Hormigón es similar al del material elastoplástico ideal

$M = P(e + \delta)$

PROBLEMA DE ESTABILIDAD SIN BIFURCACIÓN DEL EQUILIBRIO

RAMA ESTABLE RAMA INESTABLE
 PROBLEMA TENSIONAL

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte
Lámina 14

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Incidencia de la esbeltez

Cargando con excentricidad constante, la sección fallará cuando se alcance la carga P^I

Solicitaciones de 1° Orden

Falla por resistencia

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte
Lámina 15

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Incidencia de la esbeltez

Considerando las solicitaciones de 2° orden

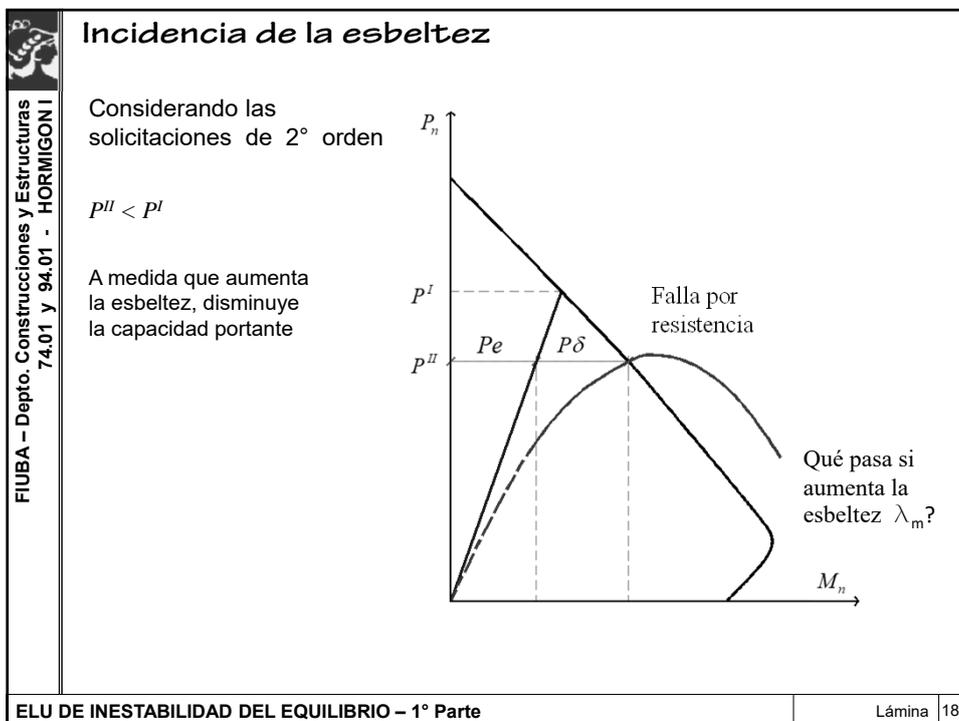
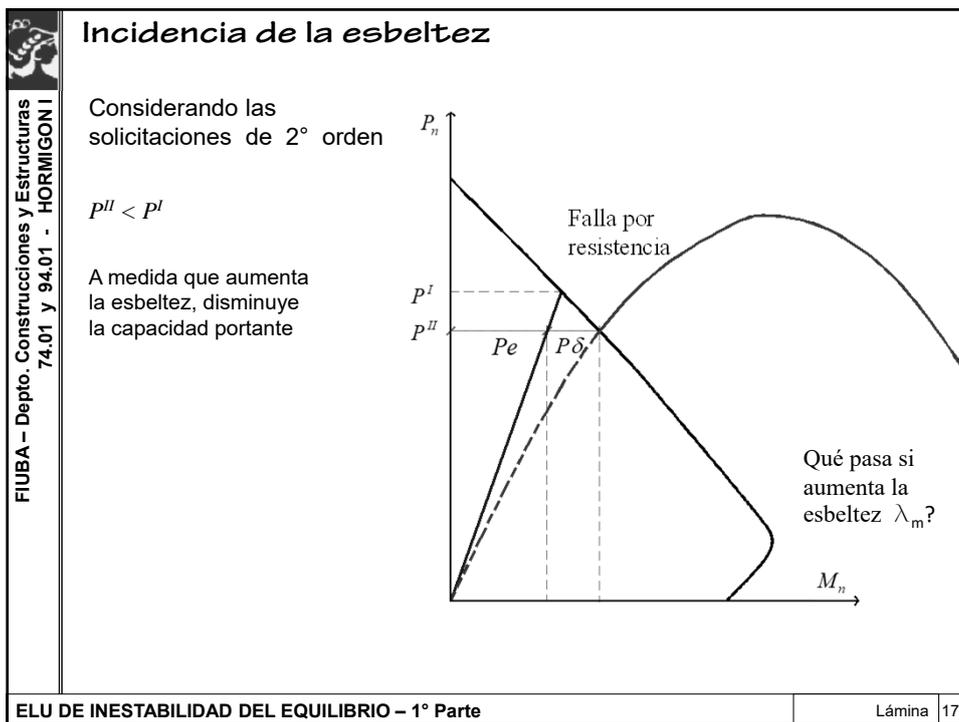
$P^{II} < P^I$

COLUMNA ESBELTA:
Se denomina "columna esbelta" a aquellas columnas en las que se produce una reducción significativa (aprox. 5%) de su capacidad resistente a esfuerzo normal debido a momentos que resultan de las deformaciones laterales de la columna.

Falla por resistencia

Qué pasa si aumenta la esbeltez λ_m ?

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte
Lámina 16



FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Incidencia de la esbeltez

Considerando las sollicitaciones de 2° orden

Esta estructura se vuelve inestable antes de alcanzar el ELU de agotamiento!!

El pandeo es un fenómeno estructural.
O sea, no depende sólo de la sección sino de la estructura en su conjunto.

Falla por inestabilidad

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

Lámina 19

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

DIAGRAMAS INTERACCIÓN COLUMNAS ESBELTAS

Esbeltez aumenta ⇒ Capacidad portante disminuye!!

(a) $M_1/M_2 = 0$. (b) $M_1/M_2 = -1$.

Columnas con Momentos Extremos con apoyos horizontales en los extremos

Mac Gregor, J. "REINFORCED CONCRETE - Mechanics and Design", Fig. 12-12

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

Lámina 20

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

Proceso de Dimensionamiento

1) CONDICIÓN DE ESTABILIDAD ⇒ **ELU INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO**

➢ VERIFICACIÓN DE ACUERDO A TEORÍA DE 2° ORDEN
ó
➢ VERIFICACIÓN UTILIZANDO PROCEDIMIENTOS SIMPLIFICADOS

2) CONDICIÓN DE RESISTENCIA ⇒ **ELU AGOTAMIENTO A FLEXOCOMPRESIÓN**

COLUMNA ESBELTA:

Se denomina "columna esbelta" a aquellas columnas en las que se produce una reducción significativa (aprox. 5%) de su capacidad resistente a esfuerzo normal debido a momentos que resultan de las deformaciones laterales de la columna.

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

Lámina 21

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

CÁLCULO SEGÚN TEORÍA DE 2° ORDEN

VERIFICACIÓN DE LA ESTABILIDAD

- Cargar la estructura (sin deformar) con Cargas Mayoradas y un coeficiente de reducción de rigidez $\phi_k \cong 0.80$
- Calcular las deformaciones δ_1
- Cargar la estructura deformada 1 con Cargas Mayoradas
- Calcular las deformaciones δ_2

VERIFICACIÓN DE RESISTENCIA
DIMENSIONAMIENTO DE ARMADURAS

$$\begin{cases} N_d = \phi N_n \geq N_u \\ M_d = \phi M_n \geq M_u \end{cases}$$

Puede suceder que no haya convergencia!!

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

Lámina 22

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

CÁLCULO SEGÚN TEORÍA DE 2° ORDEN

Iterativo y engorroso.....

No es fácil determinar las deformaciones.....

- comportamiento no lineal del material,
- comportamiento distinto a compresión y a tracción,
- fisuración que incide en las rigideces,
- fluencia lenta,
- excentricidades constructivas, etc.

El reglamento establece **dos limitaciones** para su utilización:

1. Las dimensiones en la estructura definitiva no pueden diferir en más del 10 % de las dimensiones adoptadas en el análisis estructural.
2. Se debe demostrar que se obtienen valores de las cargas últimas dentro de un margen de ± 15 % con respecto a las obtenidas mediante ensayos !!!

Alternativa:

**ANÁLISIS ELÁSTICO +
EL MÉTODO DE LA
AMPLIFICACIÓN DE
MOMENTOS**

}

1) PÓRTICOS INDESPLAZABLES

2) PÓRTICOS DESPLAZABLES

Análisis elástico de 1° orden: para tener en cuenta la existencia de fisuración, reducir rigideces:

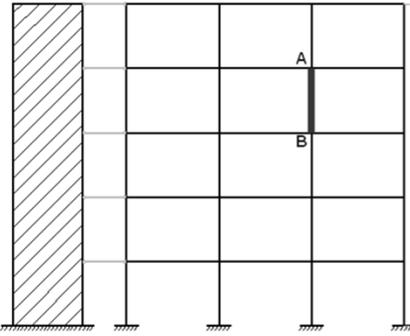
Vigas:	0.35 I _g
Columnas:	0.70 I _g
Placas y losas planas:	0.25 I _g

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

Lámina 23

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

SISTEMAS INDESPLAZABLES



SUS NUDOS SE ENCUENTRAN IMPOSIBILITADOS DE MOVERSE HORIZONTALMENTE.

→ESTÁN VINCULADOS A ELEMENTOS ESTRUCTURALES QUE ABSORBEN LAS FUERZAS HORIZONTALES.

Si no resulta claro, verificar alguna de estas condiciones:

- Una columna de una estructura se puede suponer como indesplazable, si el incremento en los momentos extremos de la columna, debido a los efectos de segundo orden, es igual o menor que el 5 % de los momentos extremos de primer orden.
- Cuando todas las columnas del piso tengan igual altura, un entrepiso de la estructura se podrá suponer como indesplazable, si se verifica que el **ÍNDICE DE ESTABILIDAD** :

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_{us} l_c} \leq 0.05$$

$\sum P_u$: Carga vertical mayorada total. (Sumatoria de todas las cargas de columnas y tabiques en el nivel considerado)

V_{us} : Esfuerzo de corte horizontal en el piso considerado

Δ_o : Desplazamiento relativo de 1° orden entre la parte superior e inferior del entrepiso debido a V_{us}

l_c : Longitud del elemento comprimido de un pórtico, medida entre los ejes de los nudos del pórtico

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

Lámina 24

12

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

SISTEMAS INDESPLAZABLES

I_b : Momento de Inercia de las Vigas
 I_c : Momento de Inercia de la Columna

EN SISTEMAS INDESPLAZABLES $l_e \leq l_c$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

Lámina 25

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

SISTEMAS DESPLAZABLES

EN SISTEMAS DESPLAZABLES $l_e \geq l_c$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

Lámina 26

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Coefficientes de rigidez relativa

I_b : Momento de Inercia de las Vigas ($0.35I_{gb}$)
 I_c : Momento de Inercia de la Columna ($0.70I_{gc}$)

$$\psi_A = \frac{\frac{E_c I_{c1}}{l_{c1}} + \frac{E_c I_{c2}}{l_{c2}}}{\frac{E_b I_{b1}}{l_1} + \frac{E_b I_{b2}}{l_2}}$$

Se recomienda una reducción de rigidez del 50% en el caso de extremos articulados de vigas o columnas

$$\psi_B = \frac{\frac{E_c I_{c1}}{l_{c1}} + \frac{E_c I_{c2}}{l_{c2}}}{0.5 \frac{E_b I_{b1}}{l_1} + \frac{E_b I_{b2}}{l_2}}$$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

Lámina 27

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Longitud efectiva l_e en columnas de **Sistemas Indesplazables**

$$l_e = k l_u$$

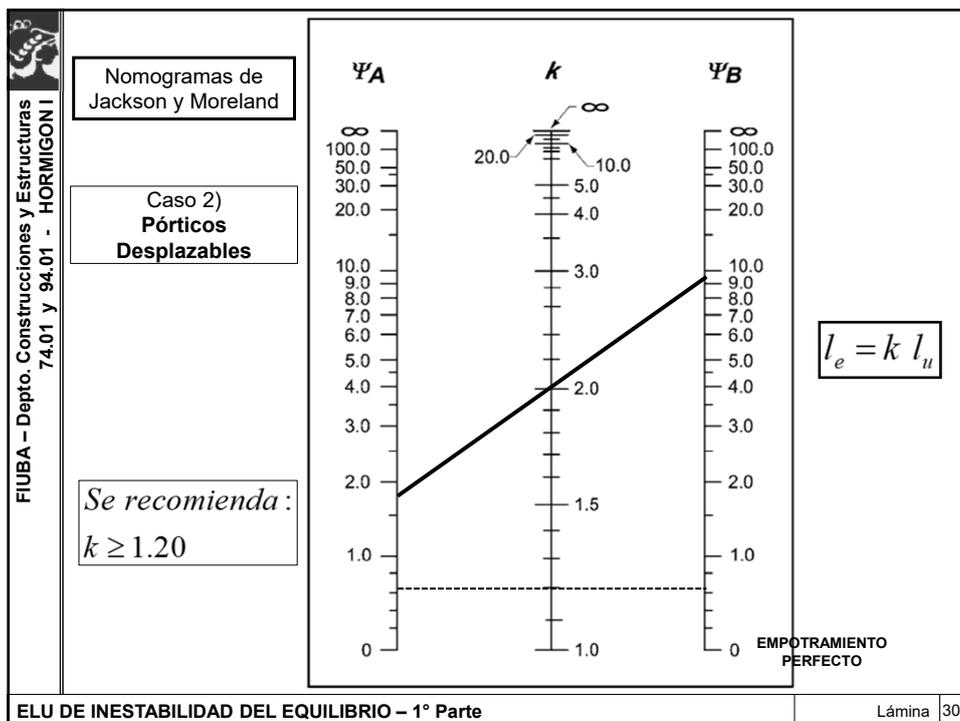
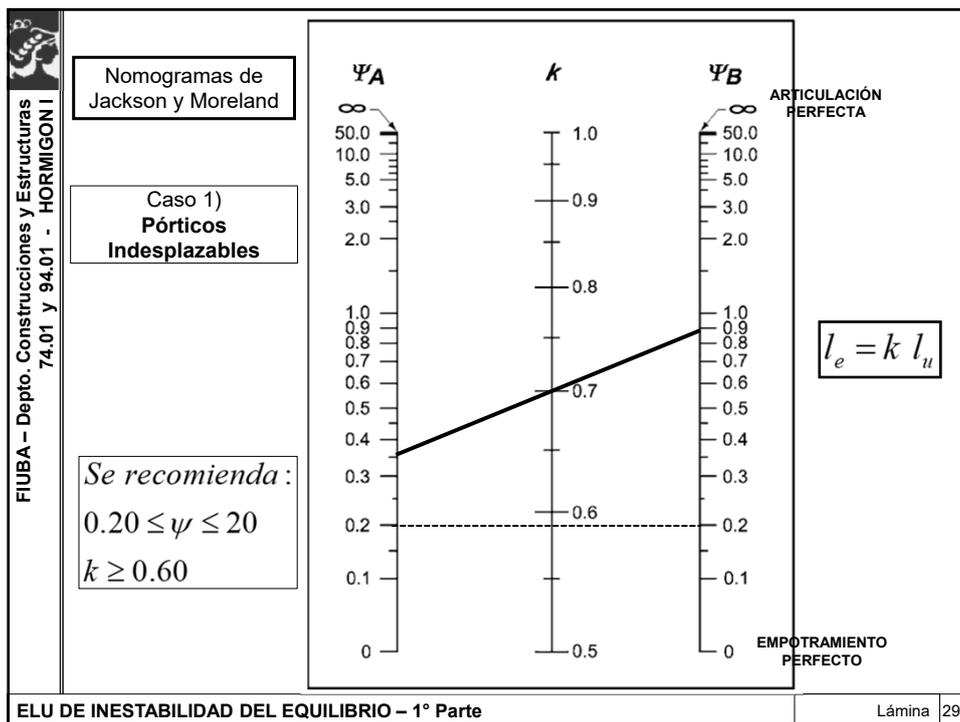
Tres alternativas:

1. Puede adoptarse $k=1 \Rightarrow l_e = l_u$
2. Puede evaluarse k por medio de los nomogramas de Jackson y Moreland
3. Puede evaluarse k mediante la siguiente expresión:

$$k = 1 - \frac{1}{(5+9 \psi_A)} - \frac{1}{(5+9 \psi_B)} - \frac{1}{(10+\psi_A \psi_B)}$$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

Lámina 28





FIN –
ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE
INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO
Parte 1

GRACIAS POR SU ATENCION !!!