Trabajo Práctico de Laboratorio Nº 1: Líneas de Campo Eléctrico

En este trabajo práctico se quiere determinar el vector campo eléctrico debido a la aplicación de una diferencia de potencial entre dos zonas del espacio (electrodos). Para ello se determinarán experimentalmente valores de diferencia de potencial en una grilla de puntos y luego se calculará el campo eléctrico (módulo y dirección) a través de algún programa o planilla de cálculo. También se tomarán líneas equipotenciales con las que se podrá inferir la dirección del campo.

> Cada grupo debe traer calculadora, por lo menos cuatro hojas milimetradas tamaño oficio, cinta para pegar, regla y lápices de colores.

Introducción: Campo eléctrico, diferencia de potencial y ecuación de Laplace y de Poisson

Como se ha visto en Análisis II, cuando un campo es conservativo existe una función V llamada función potencial tal que $-\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_1^2 dV = V(2) - V(1)$ (1)

y cuyo valor es independiente del camino que se haya elegido para ir desde el punto 1 al punto 2, siempre que 1 y 2 y el camino que los une (cualquiera) pertenezcan al dominio en el cual el campo $\vec{E}$ es conservativo. En la ec. (1)

$$\begin{cases} \vec{E} = (E_x, E_y, E_z) \\ d\vec{l} = (dx, dy, dz) \\ dV = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot dz \end{cases} \quad (2)$$

En consecuencia, en coordenadas cartesianas, resulta

$$\Rightarrow \int_1^2 E_x.dx + E_y.dy + E_z.dz = \int_1^2 -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot dz\right) \quad (3)$$

Por lo tanto, como será cualquier curva (con la restricción de dominio ya nombrada) deberá cumplirse la igualdad de los integrandos (sumandos) punto a punto:

$$\Rightarrow \ E_x.dx + E_y.dy + E_z.dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot dz\right) \ \Rightarrow \vec{E}.d\vec{l} = -\vec{\nabla}V.d\vec{l} \quad (4)$$

Esto implica la igualdad de la proyección de $\vec{E}$ y de $-\vec{\nabla}V$ sobre $d\vec{l}$, y como $d\vec{l}$ puede ser cualquiera, se deberá cumplir la igualdad de los dos vectores:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V} \quad (5)$$

Notemos que la ec. (5) es una función de punto (se cumple punto a punto) pero que es equivalente a la ecuación integral (1).

La expresión (5) determina la relación entre el campo y el potencial eléctricos. Pero no resuelve directamente las situaciones donde se conoce la distribución de cargas. Para ello debemos llegar a una expresión que vincule el potencial con la configuración de cargas. Es decir, se trata de vincular el potencial y no el campo eléctrico con la distribución de cargas debido a la simplicidad que presenta el potencial por su naturaleza escalar. Además, una vez obtenido el potencial, puede hallarse el campo por simple derivación.

Considerando la ley de Gauss

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_{Vol} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot dVol = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad (6)$$

y aplicando el teorema de Stokes a la integral del primer miembro de la ec. (6) se llega a

$$\iiint_{Vol} \left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right) dVol = \iiint_{Vol} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot dVol \qquad (7)$$

que, como debe cumplirse para cualquier volumen, implicará la igualdad de los integrandos, $\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right) \cdot dVol = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot dVol$, y como el $dVol$ puede ser cualquiera, se deberá cumplir que

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (8)$$

Entonces si se reemplaza la expresión (5) en (8) se obtiene

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \qquad \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (9)$$

donde ρ es la densidad volumétrica de carga. La ecuación escalar (9), que es una función de punto, se denomina Ecuación de Poisson y cuando está igualada a cero, se la llama Ecuación de Laplace. Estas son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que, con las condiciones de contorno correspondientes, resuelven el problema electrostático. Es decir, conociendo la distribución espacial de carga y resolviendo (9) se llega a una expresión de la función potencial potencial. A partir de la misma y aplicando (5) se obtiene la expresión del campo eléctrico en todo el espacio.

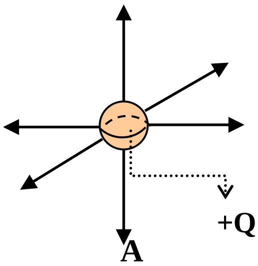
La resolución de un problema electrostático (determinar el campo eléctrico dada una distribución de cargas o la diferencia de potencial entre los puntos del espacio se puede hacer a partir de la Ley de Coulomb o a partir de la resolución de la ecuación de Poisson (y la relación entre el potencial y el campo eléctrico). Para ello es necesario conocer la distribución de cargas en todo el espacio. Además, una resolución analítica del problema puede obtenerse en pocos casos ideales: en la mayoría de los casos (aunque sean ideales) las ecuaciones diferenciales o integrales sólo admiten solución numérica.

Por otra parte, la distribución de cargas en un problema real no es fácil de determinar. Lo que se puede medir no son cargas sino sus efectos, como, por ejemplo, la diferencia de potencial que se genera entre dos puntos del espacio debido a su presencia. En esta experiencia se determinan diferencias de potencial experimentalmente y, a partir de los datos obtenidos, se puede inferir la forma del campo eléctrico y la distribución de cargas que lo produjo. Para determinar el campo eléctrico se usará el método de diferencias finitas, que no es más que una resolución numérica de la ec. (5).

Análisis gráfico

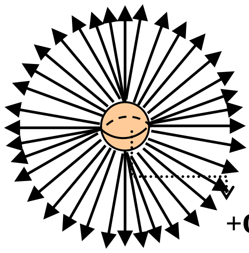
Las superficies equipotenciales y las líneas de campo son un modelo de representación gráfico del problema electrostático. Este modelo gráfico dará una idea de cómo son el potencial y el campo en una región del espacio.

<u>Línea de campo</u>: Es una línea imaginaria dibujada de modo tal que su dirección en cada punto (es decir, la dirección de su tangente) sea la misma que la dirección del campo en ese punto. Ahora bien, supongamos que tenemos una carga puntual de valor +Q que, como se sabe, es fuente de campo eléctrico. Por lo tanto, ¿cuántas líneas de campo sería correcto asignarle? ¿Conviene elegir la representación tridimensional A o la B?



+Q

A

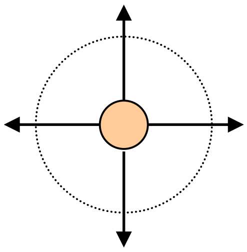


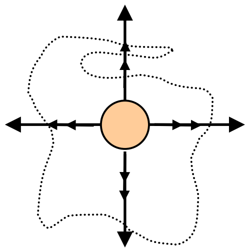
+Q

A

La respuesta es que se puede elegir cualquiera de las dos. Pero, limitando adecuadamente el número de líneas dibujadas, éstas pueden utilizarse no sólo para indicar la dirección del campo sino también la magnitud del mismo. ¿Cómo? Espaciando las líneas de forma tal que **el número de las que atraviesen la unidad de superficie perpendicular a la dirección del campo, sea proporcional, en cada punto, a la intensidad del campo eléctrico en dicho punto.**

¿Depende este número de la superficie cerrada elegida? Veámoslo en un dibujo en el plano (para que sea más sencilla la visualización, aunque siempre es 3D) tomando dos "superficies" distintas (corte de las superficies cerradas en el espacio)





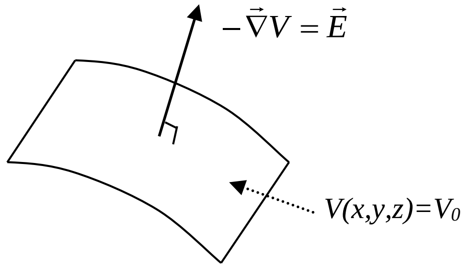
En la primera salen 4 líneas, y en la segunda salen 5 y 1 entra, es decir, son 4 las que salen de la "superficie". Es decir, no depende de la superficie elegida. Así, en un área A, perpendicular a las líneas de campo, el número de líneas N será proporcional a EA. Considerando una superficie esférica de radio r que rodee a una carga puntual Q y considerando que el campo eléctrico que genera está dado por la Ley de Coulomb, resulta N es proporcional a Q [1] . Es decir, el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie es proporcional a la carga situada en su interior. Y este número es independiente del radio de la esfera. También se deduce de esto que ninguna línea comienza o termina sobre la superficie esférica.

Entonces se llega a que la intensidad del campo eléctrico se materializa en nuestra representación gráfica según la densidad de líneas de campo que visualicemos en la zona.

- *<u>Debatir en grupo</u>: ¿Las líneas de campo se pueden cortar entre sí? ¿Por qué?*

[1] Para una explicación más detallada se puede consultar, por ejemplo "Electricidad y Magnetismo" de Sears

Superficies equipotenciales: La función potencial se define respecto de la variables espaciales, por lo tanto una superficie equipotencial responde a $V(x,y,z)$ = cte. El gradiente del potencial será ortogonal a la superficie equipotencial e igual -según la relación hallada (5)- pero en sentido contrario al campo eléctrico.



Por lo tanto, las líneas de campo eléctrico son ortogonales a las superficies equipotenciales.

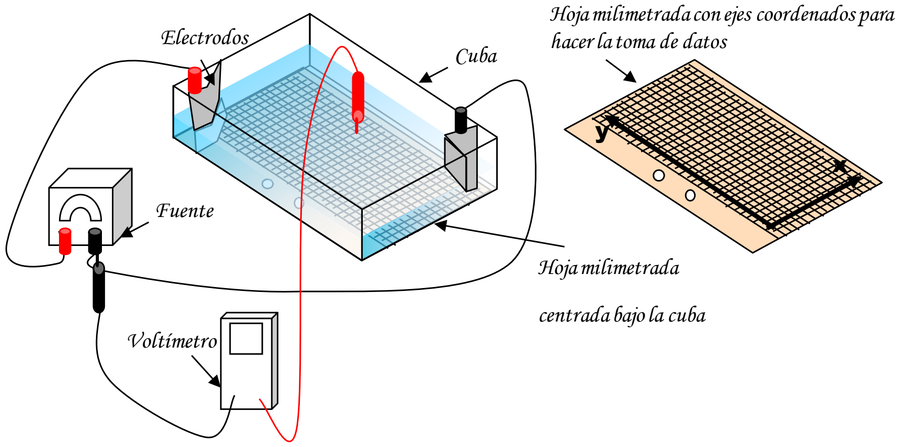
Además, como el gradiente cambiado de signo indica (como se vio en Análisis II) la dirección de mayor decrecimiento de la función V, entonces sabemos que si nos movemos en la dirección del campo eléctrico nos dirigimos a zonas de menor potencial.

Esto es coherente a la definición de energía potencial que se venía manejando de Física I. Al depositar una carga en una zona del espacio afectado por un determinado campo eléctrico (con determinada energía potencial) esta se desplazará de manera tal que disminuya su energía potencial.

Aclaración: si cortamos las superficies equipotenciales con un plano, sobre el mismo tendremos líneas equipotenciales.

EXPERIENCIA

En un recipiente plástico (que llamaremos "cuba") con dos electrodos (dos chapas metálicas de forma no regular) colocados en dos esquinas en diagonal, se introduce agua de red hasta una altura de unos dos centímetros. Los electrodos se conectan a una diferencia de potencial constante ΔV = 12 V. El borne negro se conecta al terminal negro de la fuente, y el borne rojo se usa para medir dentro de la cuba. Conectando de esta manera, las lecturas del voltímetro serán siempre positivas. ANTES DE PRENDER LA FUENTE, CONSULTAR AL DOCENTE PARA QUE VERIFIQUE LAS CONEXIONES.



Se determinará la diferencia de potencial entre un electrodo y un punto de la cuba introduciendo el borne rojo del voltímetro en el agua de la cuba (verticalmente, cuidando el paralaje) apoyándolo sobre la base de la misma. Es decir, se medirá sobre una zona cuasi-plana (bidimensional en primera aproximación). Se determinará el campo eléctrico en distintos puntos de la base de la cuba procesando los datos obtenidos (diferencias de potencial). Para esto se determinará la diferencia de potencial sobre toda la superficie de la cuba (Actividad N°1). Por otro lado, se buscarán puntos dentro de la cuba donde la diferencia de potencial tome ciertos valores constantes, lo que permitirá tener una idea de la orientación de las líneas de campo (Actividad N°2).

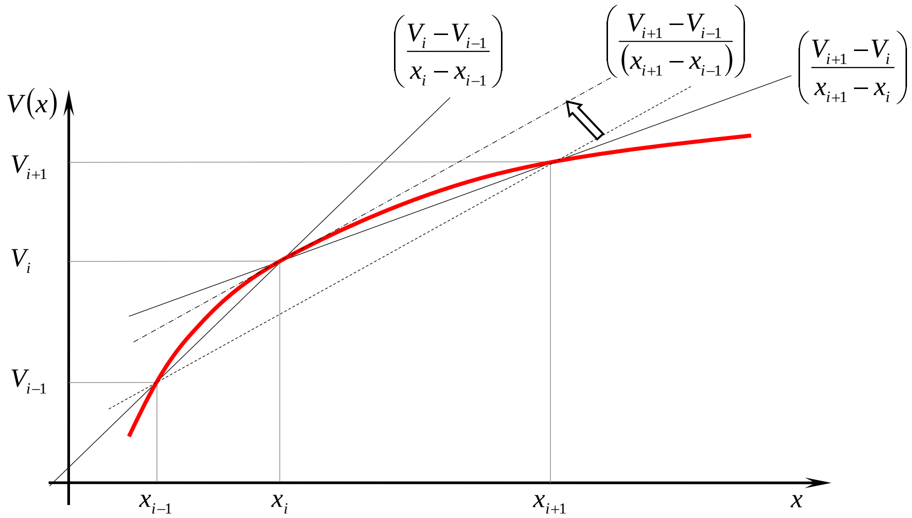
- *Debatir en grupo:* ¿Por qué se usa agua en esta experiencia? ¿Se podría medir la diferencia de potencial en el aire? ¿Sería mejor o peor usar agua destilada?

PROCESAMIENTO DE DATOS

Como es sabido, el campo eléctrico cumple la relación $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, que en forma cartesiana, y para el plano, equivale a $E_x.\hat{e}_x + E_y.\hat{e}_y = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\hat{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\hat{e}_y\right)$. Sin embargo, no se dispone de la función potencial sino de puntos de ella en una grilla discreta (la hoja milimetrada). Se necesita entonces recurrir a una aproximación discreta de las derivadas. Es decir, a partir de datos experimentales de diferencia de potencial y mediante una resolución numérica de una ecuación diferencial, se obtendrá el campo eléctrico en distintos puntos del espacio.

- *Debatir en grupo:* Vieron que las distribuciones de carga crean campos eléctricos. ¿Qué es lo que produce el campo eléctrico que se quiere determinar en este caso?

Si se tiene una función $V = f(x,y)$ y se corta con un plano a y=cte. (como muestra la figura), el valor de su derivada en el punto x_i puede calcularse numéricamente de diversas formas, como por ejemplo:



donde
$$\begin{cases} \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_i} \approx \frac{V_{i+1} - V_i}{x_{i+1} - x_i} & \rightarrow \quad \text{Aproximación en avance} \\ \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_i} \approx \frac{V_i - V_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \rightarrow \quad \text{Aproximación en retroceso} \end{cases} \qquad (10)$$

Tomando el promedio de ambas, se obtiene una aproximación de mejor calidad llamada **aproximación centrada**. En el caso en que los puntos x_i sean equidistantes (distancia d), se obtiene que

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_i} \approx \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2\cdot\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{d}} = \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{\underbrace{(x_{i+1} - x_{i-1})}_{2\cdot d}} \qquad (11)$$

o sea que cuando los puntos son equidistantes el promedio de las pendientes en avance y retroceso no es más que la pendiente de la secante que pasa por los puntos (x_{i-1}, V_{i-1}) (x_{i+1}, V_{i+1}). En consecuencia, la componente x del campo eléctrico estará dada por

$$E_x\big|_{x_i} = -\frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{\underbrace{(x_{i+1} - x_{i-1})}_{2\cdot d}} \tag{12}$$

En los bordes de la grilla, donde no se dispone de alguno de los datos de avance o de retroceso, las expresiones aproximadas son (esto no se demostrará):

- Aproximación borde izquierdo: $\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_i} \approx \frac{-V_{i+2} + 4\cdot V_{i+1} - 3\cdot V_i}{2\cdot(x_{i+1} - x_i)}$

(13)

- Aproximación borde derecho: $\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_i} \approx \frac{3\cdot V_i - 4\cdot V_{i-1} + V_{i-2}}{2\cdot(x_i - x_{i-1})}$

Nota: Para obtener la componente E_y es el mismo tratamiento y expresiones, tan sólo reemplazando x por y. Luego resta tan sólo componer la suma vectorial $\vec{E} = E_x.\hat{e}_x + E_y.\hat{e}_y$.

- *Debatir en grupo:* El modelo más simple y útil para describir una corriente es que son cargas en movimiento. En la experiencia, el voltímetro mide una corriente. ¿Se puede hablar, entonces, de campo electrostático?

ACTIVIDADES

Actividad Nº1: Cálculo de $\vec{E}$

Medir la diferencia de potencial a intervalos de 2 cm. Para ello tomar dos hojas milimetradas oficio y marcar los ejes coordenados x e y en dos de sus márgenes (en las dos hojas). Colocar una de ellas centrada bajo la cuba (ver esquema en apartado Experiencia) marcando los electrodos. En la otra hoja milimetrada anotar los datos que vayan obteniendo de las mediciones. Se obtendrá así una matriz de datos. Se recomienda sacar una fotocopia de la hoja de datos, o, en su defecto escribir los datos con birome o tinta, ya que luego se dibujará sobre la hoja.

Calcular y graficar a escala el vector campo eléctrico sobre la hoja de datos en 6 puntos: 2 en la zona central de la cuba, 2 en los bordes y 1 cerca de cada electrodo. Si lo consideran necesario pueden tomar valores de diferencia de potencial a intervalos menores a 2 cm en las zonas cercanas a los puntos donde van a calcular el vector campo eléctrico.

Actividad Nº2: Curvas equipotenciales

Determinar los lugares geométricos donde la diferencia de potencial con el electrodo conectado al borne negro del voltímetro sea de 4 V, 6 V y de 8 V. **Sobre la hoja milimetrada con los datos medidos, pintar con diferentes colores e indicar claramente estas equipotenciales.** De ser necesario, realicen mediciones más precisas (es decir, a intervalos más pequeños) para determinar estas zonas.