FÍSICA II – Electricidad&Magnetismo (todos los codigos)
Primer Cuatrimestre de 2024
(última versión: 1º C 2024)

Guía 0: *Repaso de Análisis Matemático*

1. Analice por qué el vector posición tiene la forma $\vec{r} = x\,\breve{e}_x + y\,\breve{e}_y + z\,\breve{e}_z$ en coordenadas cartesianas, $\vec{r} = \rho\breve{e}_\rho + z\breve{e}_z$ en coordenadas cilíndricas y $\vec{r} = r\,\breve{e}_r$ en coordenadas esféricas mientras que una fuerza $\vec{F}$ puede escribirse como $\vec{F} = F_x\,\breve{e}_x + F_y\,\breve{e}_y + F_z\,\breve{e}_z$ o $\vec{F} = F_\rho\,\breve{e}_\rho + F_\varphi\,\breve{e}_\varphi + F_z\,\breve{e}_z$ o $\vec{F} = F_r\,\breve{e}_r + F_\varphi\,\breve{e}_\varphi + F_\vartheta\,\breve{e}_\vartheta$.
NOTA: usamos la notación usual para los ángulos en distintos sistemas de coordenadas. Usted puede usar el que quiera PORQUE **siempre debe hacer un esquema** donde indique cuál es el significado de cada uno.

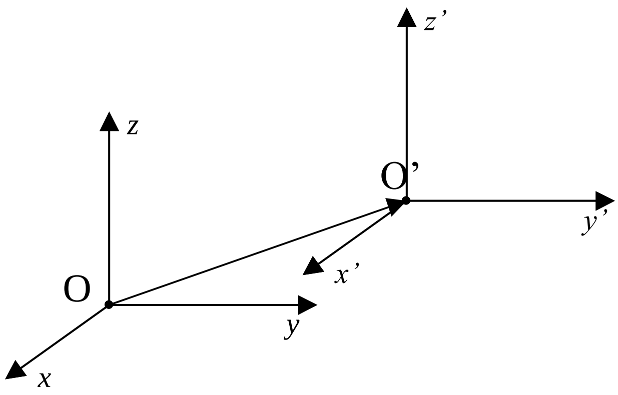
2. En un sistema de coordenadas cartesiano (terna derecha) grafique los vectores posición $\vec{r} = 3\,\breve{e}_x + 4\,\breve{e}_y + 0\,\breve{e}_z$ y $\vec{r} = 5\,\breve{e}_\rho + 0\,\breve{e}_z$. ¿Están ambos perfectamente especificados? Si no es así, qué otro dato debería aportar para afirmar que representan al mismo vector posición ¿En qué unidades pueden estar expresados estas cantidades numéricas?

3. Si un punto del espacio está dado por $\vec{r} = 2\,\breve{e}_x$ -1 $\breve{e}_y + 3\,\breve{e}_z$, cómo lo expresaría en coordenadas esféricas y en cilíndricas?

4. Si una función está dada por $\vec{F} = (3x + y)\breve{e}_x + 4\breve{e}_y + (-2x + y - 2z)\breve{e}_z$, ¿qué operaciones debe hacer para escribir la misma función como $\vec{F} = F_\rho\,\breve{e}_\rho + F_\varphi\,\breve{e}_\varphi + F_z\,\breve{e}_z$ y como $\vec{F} = F_r\,\breve{e}_r + F_\varphi\,\breve{e}_\varphi + F_\vartheta\,\breve{e}_\vartheta$?

5. La posición de un punto P (vector posición) en un sistema de coordenadas cartesianas está dado por $\vec{r} = 2\text{cm}\,\breve{e}_x + 4\text{cm}\,\breve{e}_y - 6\text{cm}\,\breve{e}_z$. a) Establecer la distancia entre el punto P y el origen de coordenadas; b) Expresar la posición del punto P en coordenadas esféricas (versores esféricos); c) Expresar la posición del punto P en coordenadas cilíndricas (versores cilíndricos).
¿Cómo relaciona las tres expresiones?

6. a) Dado un vector $\vec{v}$ que expresado en coordenadas de un sistema cartesiano ortogonal O es $\vec{v} = (1,2,1)$ escribir sus componentes en otro sistema cartesiano ortogonal O' con origen en $(0, a, 0)$.
b) Lo mismo que en a) si el vector es $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$



7. Un vector $\vec{m}$ está expresado en coordenadas cilíndricas con origen en un punto O: $\vec{m} = m_\rho\,\breve{e}_\rho + m_\varphi\,\breve{e}_\varphi + m_z\,\breve{e}_z$. El sistema cartesiano ortogonal $x', y' z'$ con origen en O' está desplazado una distancia *r* del sistema cartesiano O.
Calcular las componentes del vector $\vec{m}$ en el sistema de coordenadas cartesianas $x', y' z'$ y en uno de componentes cilíndricas ρ', φ', z' con origen en el punto O' en los siguientes casos:
a) El punto O' está dado por $\vec{r} = x_0\,\breve{e}_x$
b) El punto O' está dado por $\vec{r} = z_0\,\breve{e}_z$
c) El punto O' está dado por $\vec{r} = x_0\,\breve{e}_x + y_0\,\breve{e}_y + z_0\,\breve{e}_z$

8. Dada la función vectorial $\vec{F} = A r^2\, \breve{e}_r$ donde $\breve{e}_r$ representa al versor en la dirección radial en coordenadas esféricas, escribir $\vec{F}$ en:

a) coordenadas esféricas y componentes cartesianas,
b) coordenadas y componentes cartesianas,
c) coordenadas cartesianas y componentes esféricas.

9. Dado $\vec{r} = \rho\, \breve{e}_\rho + z\, \breve{e}_z$ donde $\breve{e}_\rho$ representa al versor en la dirección radial en coordenadas cilíndricas, escribir $\vec{r}$ en a) coordenadas cilíndricas y componentes cartesianas, b) coordenadas y componentes cartesianas, c) coordenadas cartesianas y componentes cilíndricas.

10. Dado $\vec{r} = r\, \breve{e}_r$ donde $\breve{e}_r$ representa al versor en la dirección radial en coordenadas esféricas, escribir $\vec{r}$ en a) coordenadas esféricas y componentes cartesianas, b) coordenadas y componentes cartesianas, c) coordenadas cartesianas y componentes esféricas.

11. Calcular la masa de una esfera maciza de 3 cm de radio si el material tiene una densidad δ (la densidad está expresada en coordenadas esféricas con centro en el centro de la esfera) vale:

i) $\delta = 5$ g/cm^3 ii) $\delta = A\, r^2$ g/cm^3 iii) $\delta = B\, sen^2\varphi$ g/cm^3

12. Calcular la masa de una barra cilíndrica de 3mm de diámetro y 5cm de longitud si el material tiene una densidad δ (la densidad está expresada en coordenadas cilíndricas centradas en el centro de la barra) vale:

i) $\delta = 5$ g/cm^3 ii) $\delta = A\, \rho^2$ g/cm^3 iii) $\delta = B\, z\, sen^2\varphi$ g/cm^3

13. Calcular la masa de un material comprendido entre dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 si a) la densidad es constante, b) la densidad varía como r^2 (coordenada esférica)

14. Calcular la masa de un material comprendido entre dos cilindros coaxiales de radios R_1 y R_2 y altura h si a) la densidad es constante, b) la densidad varía como ρ^2 (coordenada cilíndrica).

15. Un campo vectorial está dado por $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = x^2 y\, \breve{e}_x + 3z\, \breve{e}_y + z^3 \breve{e}_z$. Calcular $\iiint \vec{F}\, dV$ donde se integra en el volumen de un paralelepípedo de dimensiones *a*,*b*,*c*.

16. Un campo vectorial está dado por $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r, \varphi, \vartheta) = r^2\, \breve{e}_r + r\, sin\varphi\, \breve{e}_\varphi$. Calcular $\iiint \vec{F}\, dV$ donde se integra en el volumen de una esfera de radio R.

17. Un campo vectorial está dado por $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(\rho, \varphi, z) = \rho^2\, \breve{e}_r + sin\varphi\, \breve{e}_\varphi + z\, cos\,\varphi\, \breve{e}_z$. Calcular $\iiint \vec{F}\, dV$ donde se integra en el volumen de un cilindro de radio R y altura h.

18. ¿Cuál es el significado de la función $\vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x}\breve{e}_x + \frac{\partial g}{\partial y}\breve{e}_y + \frac{\partial g}{\partial z}\breve{e}_z = x^2 \breve{e}_y + 2xy\, \breve{e}_x$?

a) Calcular la función g
b) Si se conoce el valor de g en un punto, ¿se puede determinar g para todo punto del espacio?
c) ¿Cómo se calcula la diferencia de la función g entre los valores que toma en dos puntos cualesquiera del espacio?

19. Enunciar en forma general los Teoremas de Gauss y de Stokes prestando especial atención al recinto de integración.

20. Estudiar las propiedades que poseen aquellos campos cuya divergencia sea cero y/o aquellos cuyo rotor sea cero.

21. A partir de las expresiones de divergencia y rotor de una función vectorial, analizar cuándo no son válidas. Para ello utilice las expresiones en componentes cartesianas, cilíndricas y esféricas.

22. En las figuras se representan campos vectoriales. ¿Qué puede decir acerca de la divergencia y del rotor de dichos campos en todos los casos?