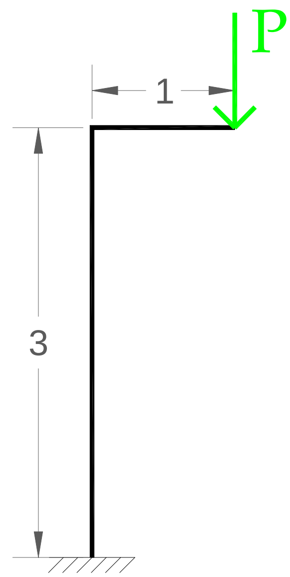
Ejercicio de flexión compuesta en régimen anelástico:

Calcular la máxima carga P que puede soportar la columna a flexión compuesta:

a) Para elastoplástico ideal, con plastificación total.
b) Para elastoplástico ideal, con plastificación parcial del 10%.
c) Para elastoplástico real, para los planos limites propuestos.



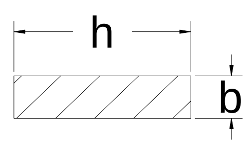
Datos: **Geometría:**

Longitud de la columna: $L_1 := 3m$

Longitud de la ménsula: $L_2 := 1m$

Sección rectangular: $h := 80cm$

$b := 20cm$



Material:

Tensión última a compresión: $\sigma_{fc} := 15MPa$ para plano $\varepsilon_{fc} := 1.5 \cdot ‰$

Tensión última a tracción: $\sigma_{ft} := 0.5MPa$ para plano $\varepsilon_{ft} := 0.05 \cdot ‰$

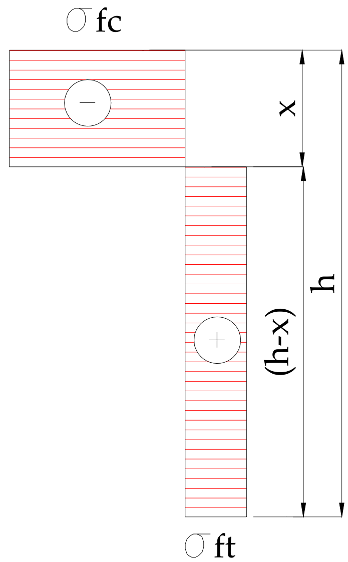
Plano límite para EPR a compresión: $\varepsilon_{uc} := 3.5 \cdot ‰$

Plano límite para EPR a tracción: $\varepsilon_{ut} := 3.5\ ‰$

Resolución: Esfuerzo axil en la columna: $N(P) := -P$

Momento en la columna: $M(P) := P \cdot L_2$

a) Para plantificación total:



Calculo los esfuerzos en función de las tensiones:

El esfuerzo axil sale simplemente: $N(x) := -x \cdot b \cdot \sigma_{fc} + \sigma_{ft} \cdot (h - x) \cdot b$

El momento podríamos intentar calcularlo respecto al baricentro de la sección, pero en este caso optaremos por calcularlo desde el punto inferior de la sección. Al hacer esto no debemos olvidar sumar entonces el momento que genera la normal respecto de dicho punto.

Resulta entonces: $M(x) := \sigma_{fc} \cdot x \cdot b \cdot \left(h - \frac{x}{2}\right) - \sigma_{ft} \cdot \frac{(h-x)^2}{2} \cdot b + \frac{h}{2} \cdot N(x)$

Resueltos los esfuerzos planteamos las siguientes igualdades: $N(P) = N(x)$

$$M(P) = M(x)$$

Reemplazando las ecuaciones llegamos a: $-P = -x \cdot b \cdot \sigma_{fc} + \sigma_{ft} \cdot (h - x) \cdot b$

$$P \cdot L_2 = \sigma_{fc} \cdot x \cdot b \cdot \left(h - \frac{x}{2}\right) - \sigma_{ft} \cdot \frac{(h-x)^2}{2} \cdot b + \frac{h}{2} \cdot N(x)$$

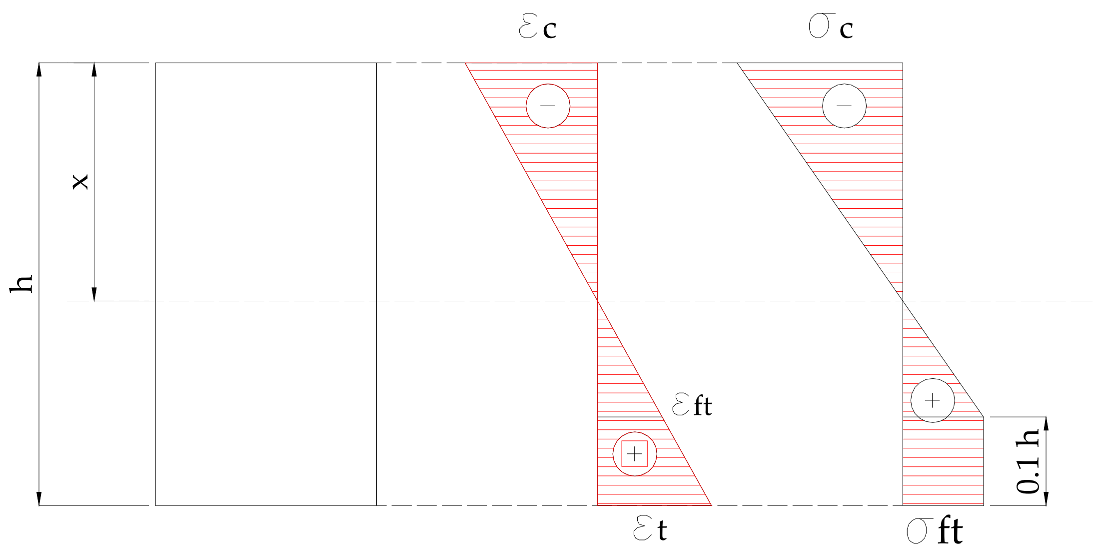
Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, P y x.

Operamos y llegamos a: $P = 48.869 \cdot kN$

$$x = 4.157 \cdot cm$$

b) Para plastificación parcial:

En este caso tenemos que pensar previamente un poco más como vamos a proponer nuestro plano limite. El ejercicio nos dice que tenemos un 10% de plastificación, pero no sabe si todo lo que plastifica esta del lado inferior, del lado superior, o parte en cada lado.
Como vemos que la resistencia a la tracción es muy inferior a la resistencia a compresión planteamos el siguiente plano (vale aclarar que podemos haber elegido el caso incorrecto, en cuyo caso el resultado seria un absurdo y deberíamos replantear el ejercicio para el caso correcto):



Por semejanzas de triángulos: $\dfrac{\varepsilon_c}{x} = \dfrac{\varepsilon_{ft}}{(h - x - 0.1\cdot h)} = \dfrac{\varepsilon_t}{(h - x)}$

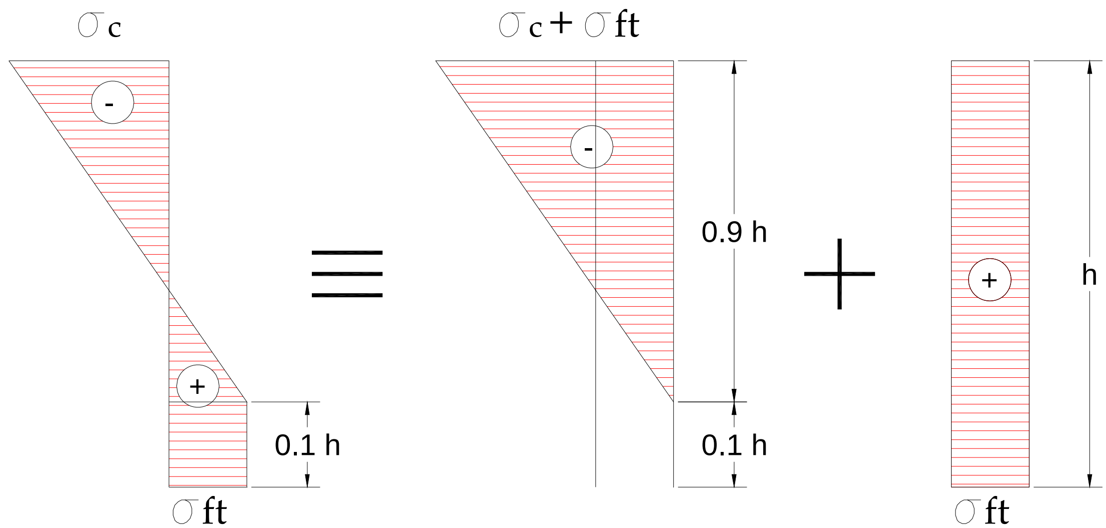
Entonces podemos despejar: $\varepsilon_c(x) := \dfrac{\varepsilon_{ft}\cdot x}{(0.9\cdot h - x)}$ $\quad \varepsilon_t(x) := \dfrac{\varepsilon_{ft}\cdot(h - x)}{(0.9\cdot h - x)}$

De la misma forma podemos despejar: $\sigma_c(x) := \dfrac{\sigma_{ft}\cdot x}{(0.9\cdot h - x)}$

Calculo los esfuerzos en función de las tensiones:

El esfuerzo axil sale simplemente: $N(x) := \dfrac{-x\cdot b\cdot\sigma_c(x)}{2} + \dfrac{\sigma_{ft}\cdot(0.9\cdot h - x)\cdot b}{2} + \sigma_{ft}\cdot 0.1\cdot h\cdot b$

El momento podríamos intentar calcularlo como la suma de los momentos que originan los tres sectores (como en la normal). En este caso es tal vez más sencillo dividir el diagrama de tensiones en dos como se ve a continuación:



En este caso lo único que genera momento respecto del baricentro es el triángulo:

Resulta entonces: $M(x) := \dfrac{\left(\sigma_c(x) + \sigma_{ft}\right)\cdot 0.9\cdot h\cdot b}{2}\cdot\left(\dfrac{h}{2} - \dfrac{0.9\cdot h}{3}\right)$

Resueltos los esfuerzos planteamos las siguientes igualdades: $N(P) = N(x)$

$M(P) = M(x)$

P :=

Giv

Reemplazando las ecuaciones llegamos a: $-P = \dfrac{-x\cdot b\cdot \sigma_c(x)}{2} + \dfrac{\sigma_{ft}\cdot(0.9\cdot h - x)\cdot b}{2} + \sigma_{ft}\cdot 0.1\cdot h\cdot b$

$$P\cdot L_2 = \frac{\left(\sigma_c(x) + \sigma_{ft}\right)\cdot 0.9\cdot h\cdot b}{2}\cdot\left(\frac{h}{2} - \frac{0.9\cdot h}{3}\right)$$

Tenemos nuevamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, P y x.

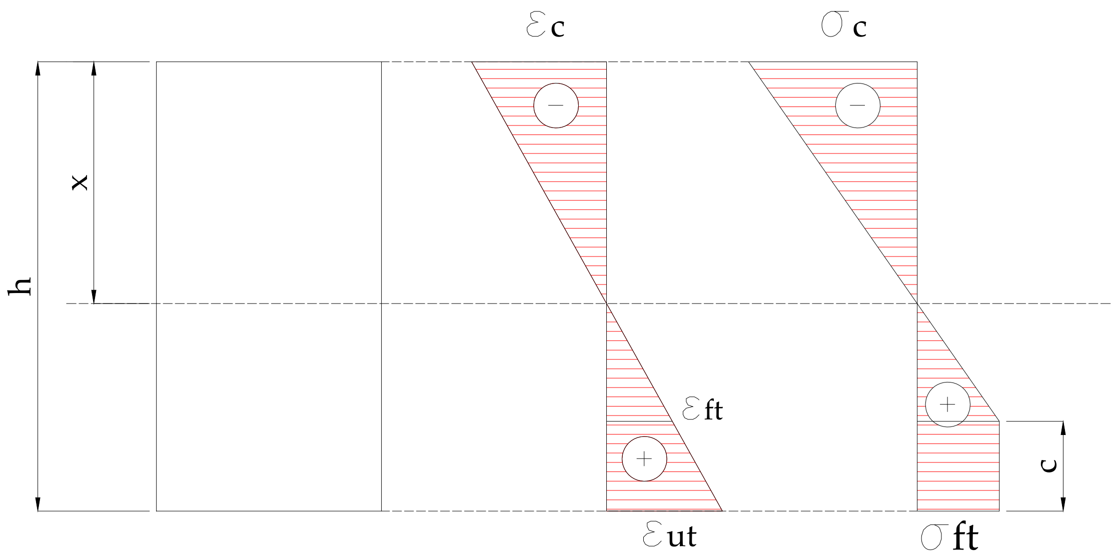
Operamos y llegamos a: $P = 15.238\cdot kN$

$x = 44.784\cdot cm$

Verificamos: $\sigma_c(x) = 0.823\cdot MPa$ $\varepsilon_c(x) = 0.082\cdot‰$ $\varepsilon_t(x) = 0.065\cdot‰$

c) Para material elastoplástico real:

En este caso también tenemos que pensar previamente un poco más como vamos a proponer nuestro plano limite. Ahora lo que tenemos que plantear es que alguna fibra de nuestra sección llego a la deformación última. Aunque se pueden dar casos límites, es decir que tanto a tracción como a compresión se haga llegado simultáneamente a la deformación última esto son casos particulares para una cierta combinación de N y M. Lo más probable es que solo un lado este en este situación.
Para este caso lo primero que se nos ocurriría entonces es que la fibra inferior llega a la deformación ultima de tracción. Sin embargo todavía no esta acotado nuestro caso, pues aunque la fibra superior no haya llegado al estado último no quiere decir que no haya llegado a empezó a plastificar. Todo esto hace que la cantidad de casos se multiplique.
De todas formas en este caso como la resistencia a la tracción es muy inferior al valore relacionado con la compresión lo más probable es que se de el siguiente diagrama. Plantearemos ese caso y verificaremos al final que la fibra superior no haya llegado a plastificar.



El diagrama planteado no dista mucho de lo planteado en el punto b de este ejercicio. La diferencia recae en que en vez de saber el porcentaje de plastificación 'c' sabemos la deformación de la fibra inferior.

Por semejanzas de triángulos: $\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_{ft}}{(h-x-c)} = \frac{\varepsilon_{ut}}{(h-x)}$

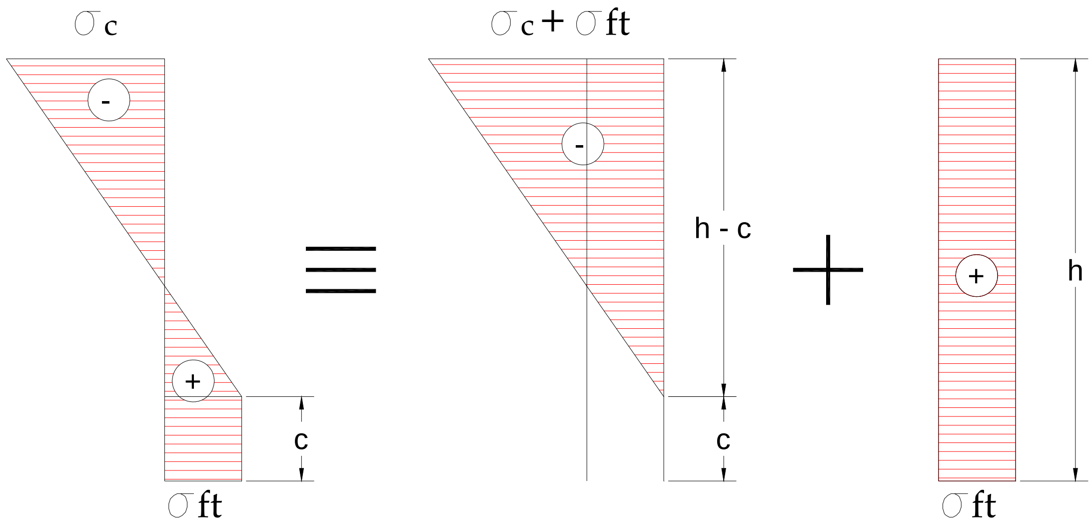
Entonces podemos despejar: $c(x) := \frac{\varepsilon_{ft}\cdot(x-h)}{\varepsilon_{ut}} + h - x$ $\qquad \varepsilon_c(x) := \frac{\varepsilon_{ft}\cdot x}{(h-x-c(x))}$

De la misma forma podemos despejar: $\sigma_c(x) := \frac{\sigma_{ft}\cdot x}{(h-x-c(x))}$

Calculo los esfuerzos en función de las tensiones:

El esfuerzo axil sale simplemente: $N(x) := \frac{-x\cdot b\cdot\sigma_c(x)}{2} + \frac{\sigma_{ft}\cdot(h-x-c(x))\cdot b}{2} + \sigma_{ft}\cdot c(x)\cdot b$

Para el cálculo del momento haremos lo mismo que en el punto b:



En este caso lo único que genera momento respecto del baricentro es el triángulo:

Resulta entonces: $M(x) := \frac{\left(\sigma_c(x)+\sigma_{ft}\right)\cdot(h-c(x))\cdot b}{2}\cdot\left[\frac{h}{2}-\frac{(h-c(x))}{3}\right]$

Resueltos los esfuerzos planteamos las siguientes igualdades: $N(P) = N(x)$

$$M(P) = M(x)$$

P

G

Reemplazando las ecuaciones llegamos a: $-P = \frac{-x\cdot b\cdot\sigma_c(x)}{2} + \frac{\sigma_{ft}\cdot(h-x-c(x))\cdot b}{2} + \sigma_{ft}\cdot c(x)\cdot b$

$$P\cdot L_2 = \frac{\left(\sigma_c(x)+\sigma_{ft}\right)\cdot(h-c(x))\cdot b}{2}\cdot\left(\frac{h}{2}-\frac{h-c(x)}{3}\right)$$

Tenemos nuevamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, P y x.

Operamos y llegamos a: $P = 42.953\cdot kN$

$$x = 14.258\cdot cm$$

Verificamos: $\sigma_c(x) = 7.591\cdot MPa$

$c(x) = 64.803\cdot cm$ $\qquad c(x) = 0.81\cdot h$

Podemos observar que el valor de P no es mucho menor que el valor hallado en el punto a. Esto es interesante pues hace notar que aunque el caso de plastificación total es un caso teórico imposible de llegar a la práctica, pues se requiere una curvatura infinita (deformaciones especificas infinitas), con valores pequeños de deformaciones limites se puede llegar a momentos muy próximos a los de plastificación total.