

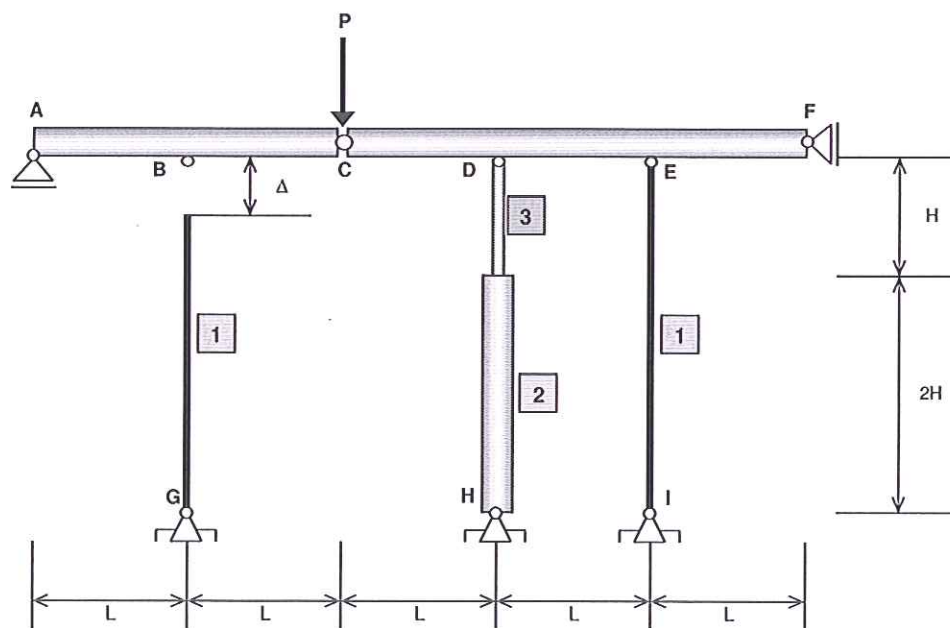


TP N° 4 "SOLICITACIÓN AXIL - SA" – TEMA 1

La estructura de la figura está conformada por dos barras rígidas AC y CF vinculadas entre sí mediante una articulación en C; más tres bielas con las características indicadas. La barra BG ha tenido un error de montaje y se la calienta para salvarlo. Una vez montada, la barra recupera su temperatura inicial y se agrega a la estructura una cara P en C. Se pide:

- Determinar el índice de vinculación de la estructura para su esquema final;
- La variación de temperatura necesaria para poder montar la barra BG;
- Los esfuerzos normales y las tensiones normales en cada biela y en cada barra de cada biela para la acción conjunta de la variación de temperatura y de la fuerza P;
- La posición final de las barras rígidas.

TEMA 1: FIGURA 1



**BARRA 1:**

Sección circular hueca (tubo)  
 $A_1 = 17.0 \text{ cm}^2$

**BARRA 2:**

Sección circular hueca (tubo)  
 $A_2 = 20.0 \text{ cm}^2$

**BARRA 3:**

Sección circular hueca (tubo)  
 $A_3 = 16.0 \text{ cm}^2$

$L = 2.00 \text{ m}$        $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$   
 $H = 1.50 \text{ m}$        $\alpha = 24.00 \text{ kN/cm}^2$   
 $\gamma = 1.6$   
 $\alpha_{ADM} = ? \text{ kN/cm}^2$

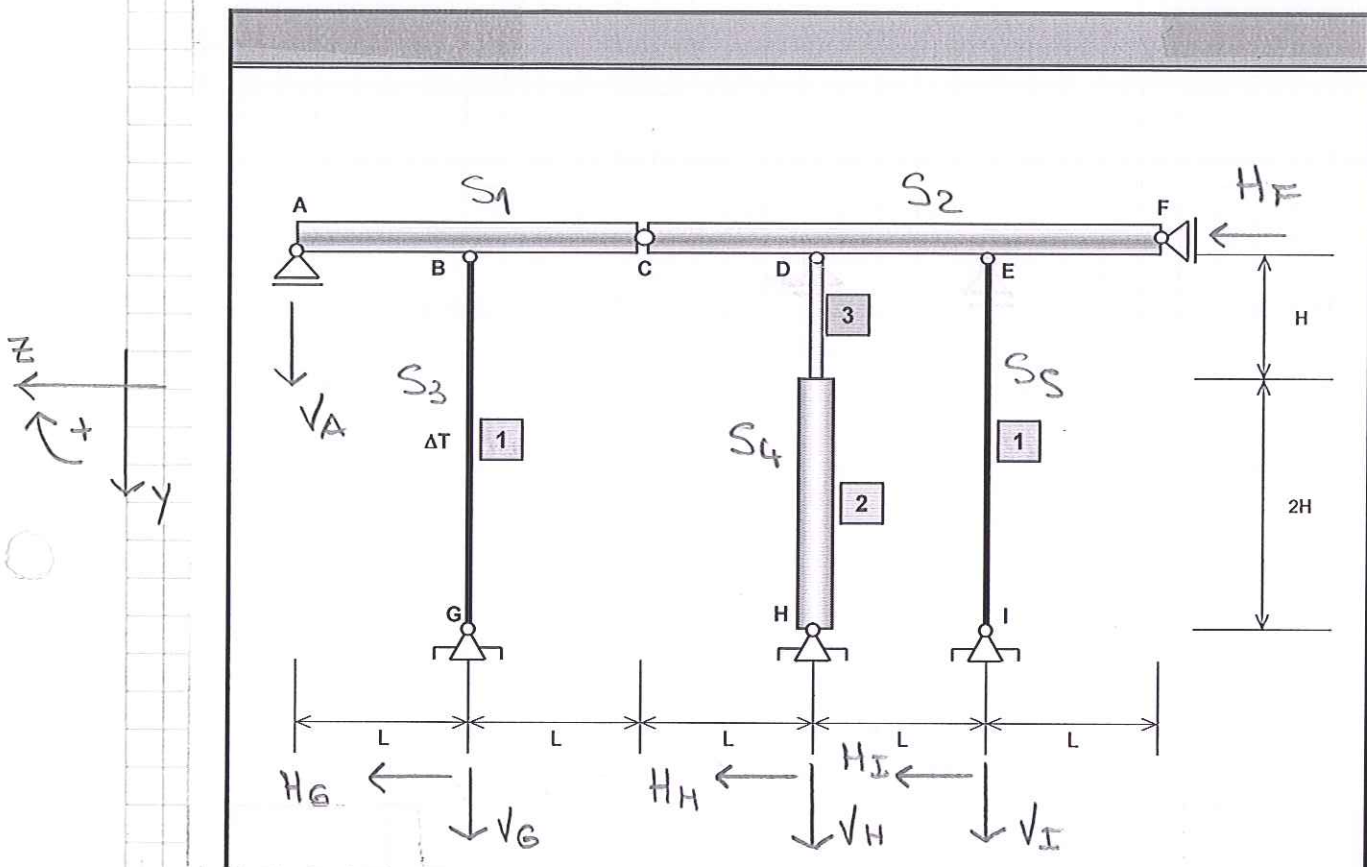
Las barras "AC" y "CF" son infinitamente rígidas

**ACCIONES:**

$P = 250.0 \text{ kN}$   
 $\Delta = 1.28 \text{ mm}$

TP-04	PARCIALITO TP N° 04 – "SA"	2012	1º	001	Pág.: 1
PA N°	DENOMINACION	AÑO	CUATRIM.	CURSO	de: 1





91) - ÍNDICE DE VINCULACIÓN:

$$\begin{array}{l}
 IVE = 8 \\
 IVI = 0 \\
 \hline
 IE = 8
 \end{array}
 \rightarrow
 \left.
 \begin{array}{l}
 A \rightarrow 1 \\
 F \rightarrow 1 \\
 G \rightarrow 2 \\
 H \rightarrow 2 \\
 I \rightarrow 2 \\
 \hline
 8
 \end{array}
 \right\}$$

$$\begin{array}{l}
 EEA = 3 \\
 EER = 4 \\
 \hline
 EE = 7
 \end{array}
 \rightarrow
 \left\{
 \begin{array}{l}
 B, C, D, E \rightarrow \Sigma M = 0.
 \end{array}
 \right.$$

$$I_v = IE - EE = 8 - 7 = 1 = GH$$



b) - RESOLUCIÓN DEL HIPERESTÁTICO: CAUSA FUERZA:

EEA:

"EQUILIBRIO"

$$\sum F_z = 0 \quad H_F + H_G + H_H + H_I = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad P + V_A + V_B + V_H + V_I = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{F_i}^A = 0 \quad 2LP + LV_B + 3HH_G + 3LV_H + 3HH_H + 4LV_I + 3HH_I = 0 \quad (3)$$

EER

$$\sum M_{F_i}^{B,120} = 0 \quad 3H \cdot H_G = 0 \rightarrow \underline{H_G = 0} \quad (4)$$

$$\sum M_{F_i}^{D,120} = 0 \quad 3H \cdot H_H = 0 \rightarrow \underline{H_H = 0} \quad (5)$$

$$\sum M_{F_i}^{E,120} = 0 \quad 3H \cdot H_I = 0 \rightarrow \underline{H_I = 0} \quad (6)$$

$$\sum M_{F_i}^{C,120} = 0 \quad -2LV_A - LV_B = 0 \rightarrow \underline{V_B = -2V_A} \quad (7A)$$

$$\sum M_{F_i}^{C,den} = 0 \quad LV_H + 2LV_I = 0 \rightarrow \underline{V_H = -2V_I} \quad (7B)$$

(7A) y (7B) son linealmente dependientes (LD), y se usa 1 u otra. Se muestran para dar 1 idea de cómo deben ser.

Reemplazando (4), (5) y (6) en (1) y (3) nos queda:

$$\underline{H_F = 0} \quad (1)$$

$$2P + V_B + 3V_H + 4V_I = 0 \quad (3)$$

## Resumen ecuaciones de la estática:

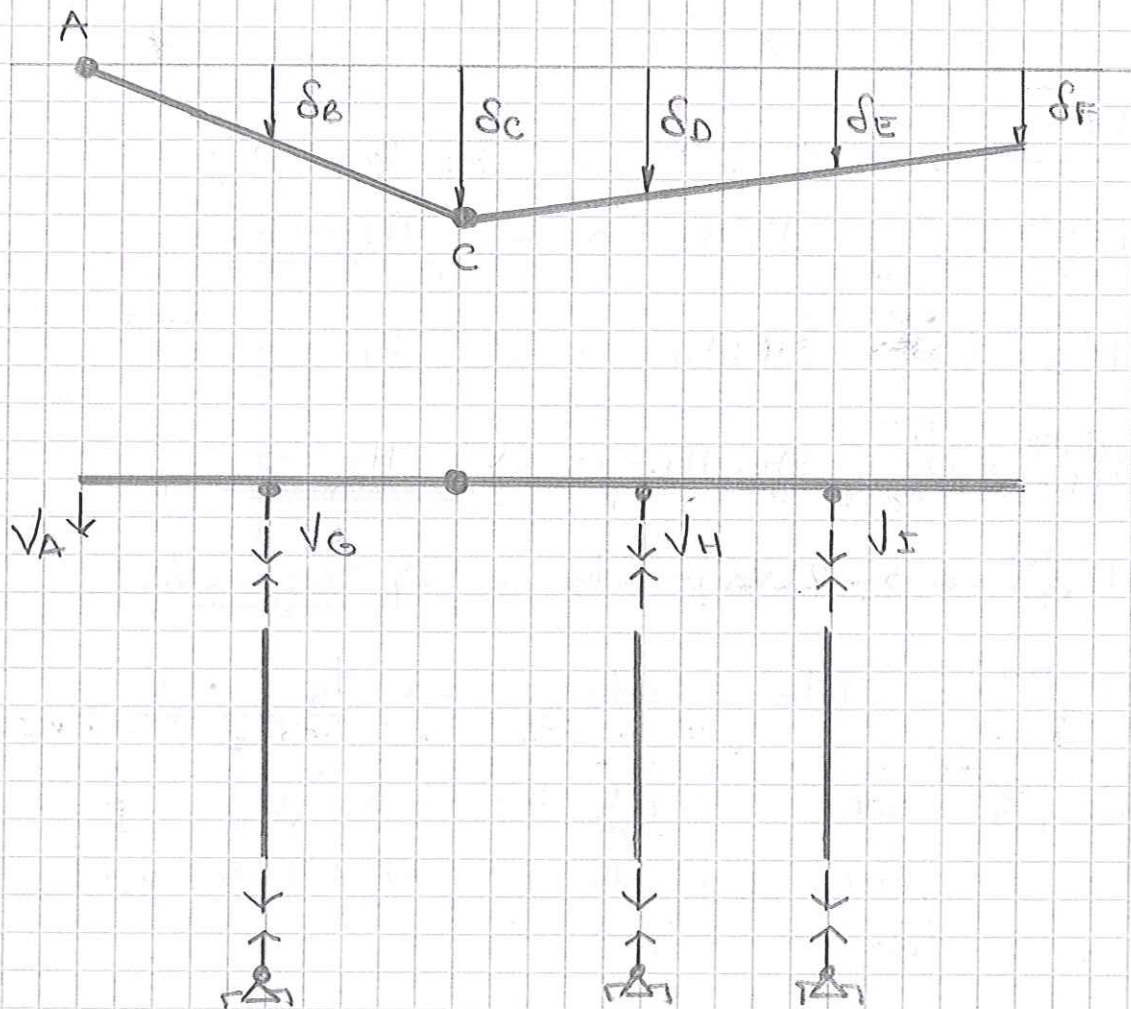
$$P + V_A + V_G + V_H + V_I = 0 \quad (2)$$

$$2P + V_G + 3V_H + 4V_I = 0 \quad (3)$$

$$V_G = -2V_A \quad (7A) \quad \text{y} \quad V_H = -2V_I \quad (7B) \quad (4)$$

$$M_F = M_G = M_H = M_I = 0$$

## COMPATIBILIDAD:



$$\frac{\delta_c}{2L} = \frac{\delta_B}{L} \rightarrow \underline{\delta_c = 2\delta_B} \quad (8A)$$

$$\delta_B = \frac{\sqrt{G} \cdot 3H}{EF_1} \rightarrow \delta_c = \frac{6\sqrt{G}H}{EF_1}$$

$$\frac{\delta_c - \delta_F}{3L} = \frac{\delta_D - \delta_F}{2L} \rightarrow 2(\delta_c - \delta_F) = 3(\delta_D - \delta_F) \rightarrow$$

$$2\delta_c - 2\delta_F = 3\delta_D - 3\delta_F$$

$$\underline{\delta_F = 3\delta_D - 2\delta_c} \quad (8B)$$

$$\frac{\delta_D - \delta_F}{2L} = \frac{\delta_E - \delta_F}{L} \rightarrow \delta_D - \delta_F = 2(\delta_E - \delta_F)$$

$$\underline{\delta_F = 2\delta_E - \delta_D} \quad (8C)$$

De 8B y 8C:

$$3\delta_D - 2\delta_c = 2\delta_E - \delta_D$$

$$4\delta_D = 2(\delta_E + \delta_c)$$

$$\delta_c = 2\delta_D - \delta_E$$

$$\underline{\delta_c = 2\delta_D - \delta_E} = \underline{\delta_c = 2\delta_B} \rightarrow 2\delta_B = 2\delta_D - \delta_E$$

(8B) y (8C)

(8A)

$$\delta_D = \frac{\sqrt{H}}{E} \left( \frac{2H}{F_2} + \frac{H}{F_3} \right) ;$$

$$\delta_E = \frac{\sqrt{I} \cdot 3H}{E F_1}$$

$$\frac{6\sqrt{G}H}{EF_1} = \frac{2\sqrt{H}H}{E} \left( \frac{2}{F_2} + \frac{1}{F_3} \right) - \frac{3\sqrt{I}H}{EF_1}$$

$$\frac{6V_G}{F_1} = \frac{2V_H}{F_2 \cdot F_3} (F_2 + 2F_3) - \frac{3V_I}{F_1} \quad (8)$$

De (2) y (7A):

$$P + V_A + V_G + V_H + V_I = 0$$

$$P + V_A - 2V_A + V_H + V_I = 0$$

$$\underline{V_I = V_A - P - V_H}$$

De (3):

$$2P + V_G + 3V_H + 4V_I = 0$$

$$2P - 2V_A + 3V_H + 4(V_A - P - V_H) = 0$$

$$2P - 2V_A + 3V_H + 4V_A - 4P - 4V_H = 0$$

$$2V_A - 2P - V_H = 0$$

$$\underline{V_H = 2V_A - 2P}$$

$$V_I = V_A - P - 2V_A + 2P \rightarrow \underline{V_I = P - V_A}$$

Reemplazando todo en (8):

$$\frac{6 \cdot (-2V_A)}{F_1} = \frac{2F_2 + 4F_3}{F_2 F_3} \cdot 2V_A - \frac{2F_2 + 4F_3}{F_2 F_3} \cdot 2P - \frac{3P}{F_1} + \frac{3V_A}{F_1}$$

$$-\frac{12V_A}{17} = \frac{2 \cdot 20 + 4 \cdot 16}{20 \cdot 16} \cdot 2V_A - \frac{2 \cdot 20 + 4 \cdot 16}{20 \cdot 16} \cdot 2 \cdot 250 - \frac{3 \cdot 250}{17} + \frac{3V_A}{17}$$

$$-0.706V_A = 0.65V_A - 0.65 \cdot P - 0.1765P + 0.1765V_A$$

$$0.8265P = 1.5325V_A$$

$$V_A = \frac{0.8265 \cdot P}{1.5325}$$

$$\rightarrow \underline{V_A = 134,83 \text{ KN}} \quad \downarrow$$

$$V_G = -2V_A$$

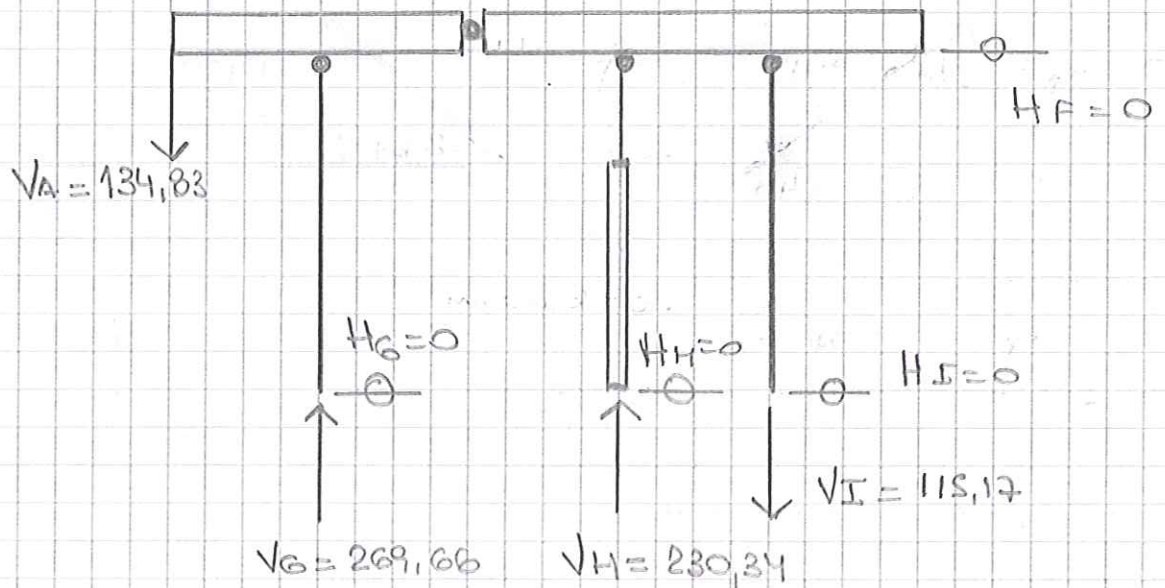
$$\rightarrow \underline{V_G = -269,66 \text{ KN}} \quad \uparrow$$



$$V_H = 2 \cdot 134,83 - 2 \cdot 250 \rightarrow \underline{\underline{V_H = -230,34}} \uparrow$$

$$V_I = 250 - 134,83 \rightarrow \underline{\underline{V_I = 115,17}} \downarrow$$

BARNA	N [kN]	T/C	G [kN/cm <sup>2</sup> ]	Reacción
BG	- 269,66	C	- 15,86	V <sub>G</sub>
DH2	- 230,34	C	- 11,52	V <sub>H</sub>
DH3	- 230,34	C	- 14,40	V <sub>H</sub>
EI	+ 115,17	T	+ 6,77	V <sub>I</sub>
	+ 134,83	---	---	V <sub>A</sub>



CALCULO DE DESPLAZAMIENTOS DEBIDOS A LA CAUSA 'P':

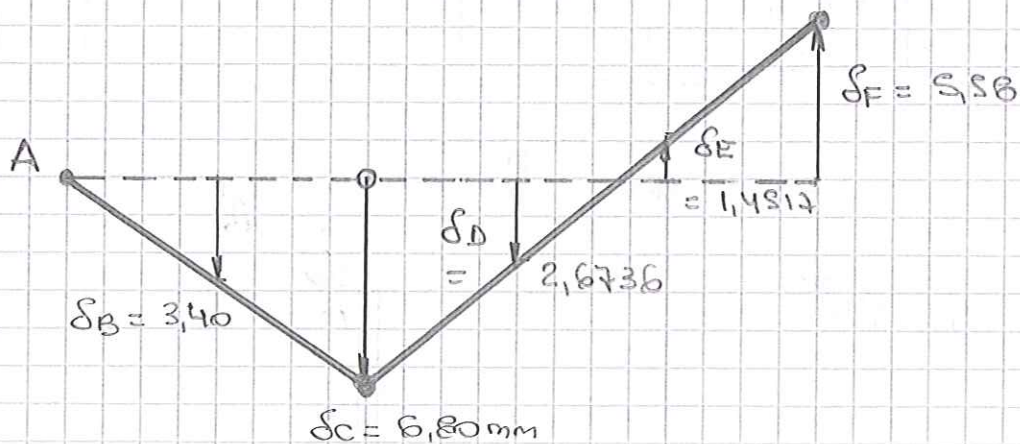
$$\delta_B = \frac{3HV_e}{EF_1} = \frac{3 \cdot 1500 \cdot (-269,66)}{21000 \cdot 17} = -3,40 \text{ mm.}$$

$$\delta_C = 2 \cdot \delta_B = 2 \cdot (-3,40) = -6,80 \text{ mm.}$$

$$\delta_D = \frac{VH}{E} \left( \frac{2H}{F_2} + \frac{H}{F_3} \right) = \frac{(-230,34)}{21000} \left( \frac{2 \cdot 1500}{20} + \frac{1500}{16} \right) = -2,6736 \text{ mm.}$$

$$\delta_E = \frac{3HV_I}{EF_1} = \frac{3 \cdot 1500 \cdot (+119,17)}{21000 \cdot 17} = +1,4517 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \delta_F &= 3\delta_D - 2\delta_C = 2\delta_E - \delta_D = \\ &= 3 \cdot (-2,6736) - 2 \cdot (-6,80) = 2 \cdot (1,4517) - (-2,6736) \\ &= 5,5792 = 5,577 \approx 5,58 \text{ mm.} \end{aligned}$$



$$[\delta] = \text{mm}$$

b) Variación de Temperatura Para montar la barra "BG":

$$L_{TOT} = H + 2H = 3H = 3 \cdot 1,50m = 4,50m.$$

$$A_1 = 17cm^2.$$

$$E = 21000 \text{ kn/acm}^2.$$

$$\alpha = 1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ C}$$

$$\Delta L = 1,28mm.$$

$$\Delta T = ?$$

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha \cdot L}$$

$$\Delta T = \frac{1,28mm}{1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ C} \cdot 4500mm} = 28,44^\circ C.$$

$$\underline{\underline{\Delta T = +28,44^\circ C}}$$

Para resolver la estructura se utilizarán las mismas ecuaciones de la estática que para el problema anterior, con la diferencia que aquí  $P=0$ . Por lo tanto, quedan:

$$\textcircled{2} \quad V_A + V_B + V_H + V_I = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad V_B + 3V_H + 4V_I = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \textcircled{4A} \quad V_B = -2V_A$$

$$\textcircled{5} \quad \textcircled{5B} \quad V_H = -2V_I.$$

$$H_A = H_B = H_H = H_I = 0.$$

Las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones se mantienen de la siguiente manera:

$$\textcircled{8A} \quad \delta_c = 2\delta_B.$$

$$\delta_B = \delta_{B|B} + \delta_{B|\Delta t} = \underbrace{\frac{3HV_B}{EF_1}}_{>0} + \underbrace{\alpha 3H\Delta t}_{<0, \Delta t < 0}.$$

$$\delta_c = 2\delta_B = \frac{6HV_B}{EF_1} + 6H\alpha\Delta t$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{8B} \quad \delta_F = 3\delta_D - 2\delta_c. \\ \textcircled{8C} \quad \delta_F = 2\delta_E - \delta_D. \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\delta_D - 2\delta_c = 2\delta_E - \delta_D. \\ 4\delta_D - 2\delta_c = 2\delta_E \\ \underline{\underline{\delta_c = 2\delta_D - \delta_E}} \end{array}$$

y de  $\textcircled{8A}$  :  $\rightarrow \underline{\underline{\delta_c = 2\delta_B = 2\delta_D - \delta_E}} \quad \textcircled{8D}$ .

$$\delta_D = \frac{V_H}{E} \left( \frac{2H}{F_2} + \frac{H}{F_3} \right)$$

$$\delta_E = \frac{3HV_I}{EF_1}$$

reemplazo en  $\textcircled{8D}$ .

$$\frac{6HV_B}{EF_1} + 6H\alpha\Delta t = \frac{2HV_H}{E} \left( \frac{2}{F_2} + \frac{1}{F_3} \right) - \frac{3HV_I}{EF_1}$$

$$\frac{6V_B}{EF_1} + 6\alpha\Delta t = \frac{2V_H}{EF_2 F_3} (F_2 + 2F_3) - \frac{3V_I}{EF_1} \quad \textcircled{9}$$

Reemplazo (7a) en (2):

$$V_A - 2V_A + V_H + V_I = 0.$$

$$\underline{V_I = V_A - V_H.}$$

Lo reemplazo en (3):

$$-2V_A + 3V_H + 4(V_A - V_H) = 0.$$

$$-2V_A + 3V_H + 4V_A - 4V_H = 0.$$

$$\underline{V_H = 2V_A.}$$

$$V_I = V_A - V_H = V_A - 2V_A \rightarrow \underline{V_I = -V_A.}$$

Resumiendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_G = -2V_A \\ V_H = 2V_A \\ V_I = -V_A \end{array} \right.$$

Los cuales son reemplazados en (9):

$$\frac{6 \cdot (-2V_A)}{EF_1} + 6\alpha \Delta t = \frac{2(2V_A)}{EF_2 F_3} (F_2 + 2F_3) - \frac{3(-V_A)}{EF_1}$$

$$\frac{-12V_A}{EF_1} + 6\alpha \Delta t = \frac{4V_A}{EF_2 F_3} (F_2 + 2F_3) + \frac{3V_A}{EF_1}$$

reemplazando por los valores:

$$-3.3613 \cdot 10^{-5} V_A - 1.7064 \cdot 10^{-3} = 3.0952 \cdot 10^{-4} V_A + 8.4034 \cdot 10^{-6} V_A.$$

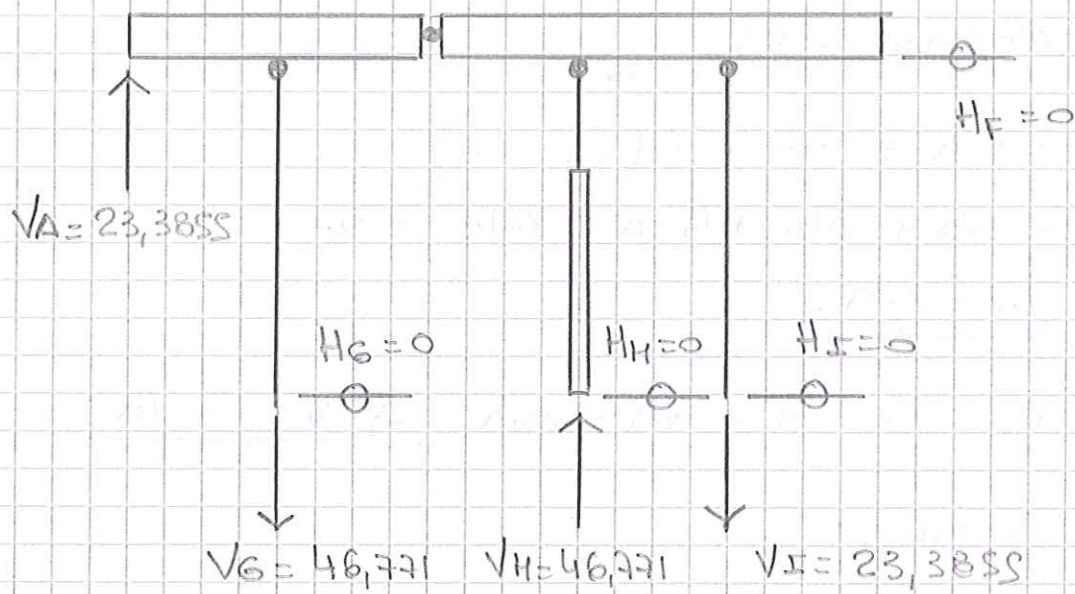
$$-1.7064 \cdot 10^{-3} = 7.2968 \cdot 10^{-5} V_A$$

$$\underline{V_A = -23.3855 \text{ KN } \uparrow}$$

$$V_G = -2 \cdot V_A = -2 \cdot (-23,3855) = +46,771 \quad \downarrow$$

$$V_H = 2 \cdot V_A = 2 \cdot (-23,3855) = -46,771 \quad \uparrow$$

$$V_I = -V_A = -(-23,3855) = +23,3855 \quad \downarrow$$



BARRA	N [KN]	T/C	$\sigma$ [KN/cm <sup>2</sup> ]	Reacción
BG	+46,771	T	+2,751	$V_G$
DH2	-46,771	C	-2,339	$V_H$
DH3	-46,771	C	-2,923	$V_H$
EI	+23,3855	T	+1,376	$V_I$
	-23,3855	- - -	- - -	$V_A$

CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS DEBIDOS A LA CAUSA  $\Delta T$ :

$$\delta_B = \delta_{B_{V_B}} + \delta_{B_{\Delta T}} = \frac{3HV_B}{EF_1} + 3H\alpha\Delta t = \frac{3 \cdot 1500 \cdot 46,771}{21000 \cdot 17} + 3 \cdot 11000 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot (-28,24)$$

$$\delta_B = 0,59 - 1,2798 = -0,6902 \text{ mm}$$

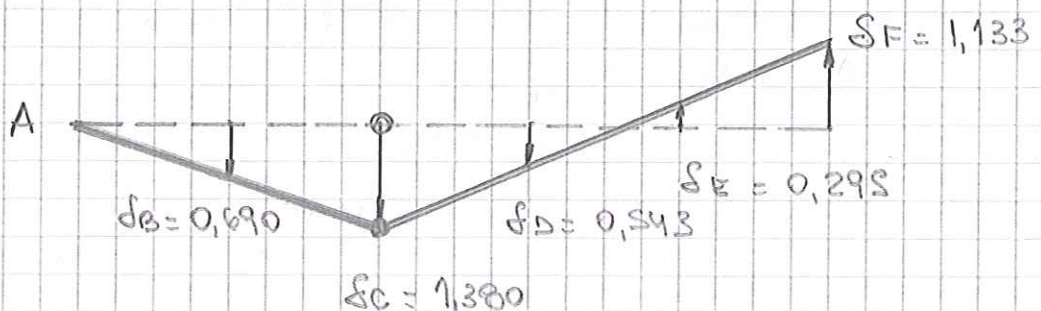
$$\delta_D = \frac{VH}{E} \left( \frac{2H}{F_2} + \frac{H}{F_3} \right) = \frac{(-46,771)}{21000} \left( \frac{2 \cdot 11000}{20} + \frac{1500}{16} \right) = -0,5429 \text{ mm}$$

$$\delta_E = \frac{3HV_E}{EF_1} = \frac{3 \cdot 1500 \cdot 23,3855}{21000 \cdot 17} = 0,2948 \text{ mm}$$

$$\delta_C = 2\delta_B = 2 \cdot (-0,6902) = -1,3804 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \delta_F &= 3\delta_D + 2\delta_C = 2\delta_E - \delta_D \\ &= 3(-0,5429) - 2(1,3804) = 2 \cdot 0,2948 - (-0,5429) \\ &= 1,1321 = 1,1325 \end{aligned}$$

$[\delta] = \text{mm}$



Cálculo de los desplazamientos totales debidos a  
la causa PUNDA } a la variación de temperatura:

$$\delta_i = \delta_{i,P} + \delta_{i,\Delta t} \quad \text{Expresión General.}$$

$$\delta_B = -3,40 - 0,6902 = -4,0902 \text{ mm}$$

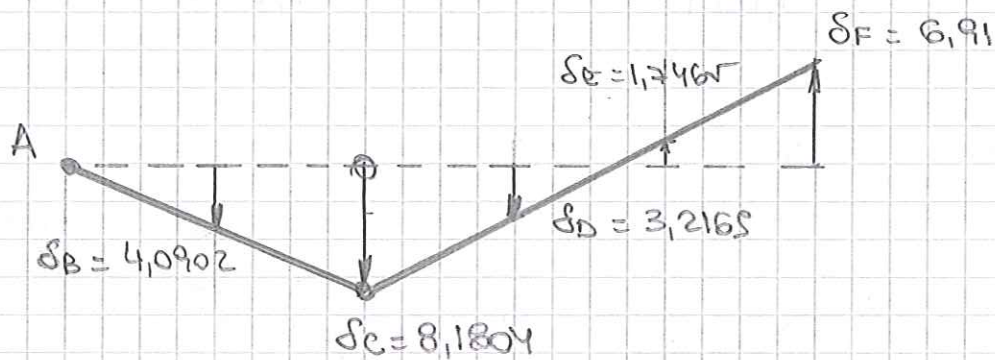
$$\delta_C = -6,80 - 1,3804 = -8,1804 \text{ mm}$$

$$\delta_D = -2,6736 - 0,5429 = -3,2165 \text{ mm.}$$

$$\delta_E = +1,4517 + 0,2948 = +1,7465 \text{ mm.}$$

$$\delta_F = +5,58 + 1,33 = +6,9100 \text{ mm.}$$

$$[\delta] = \text{mm}$$

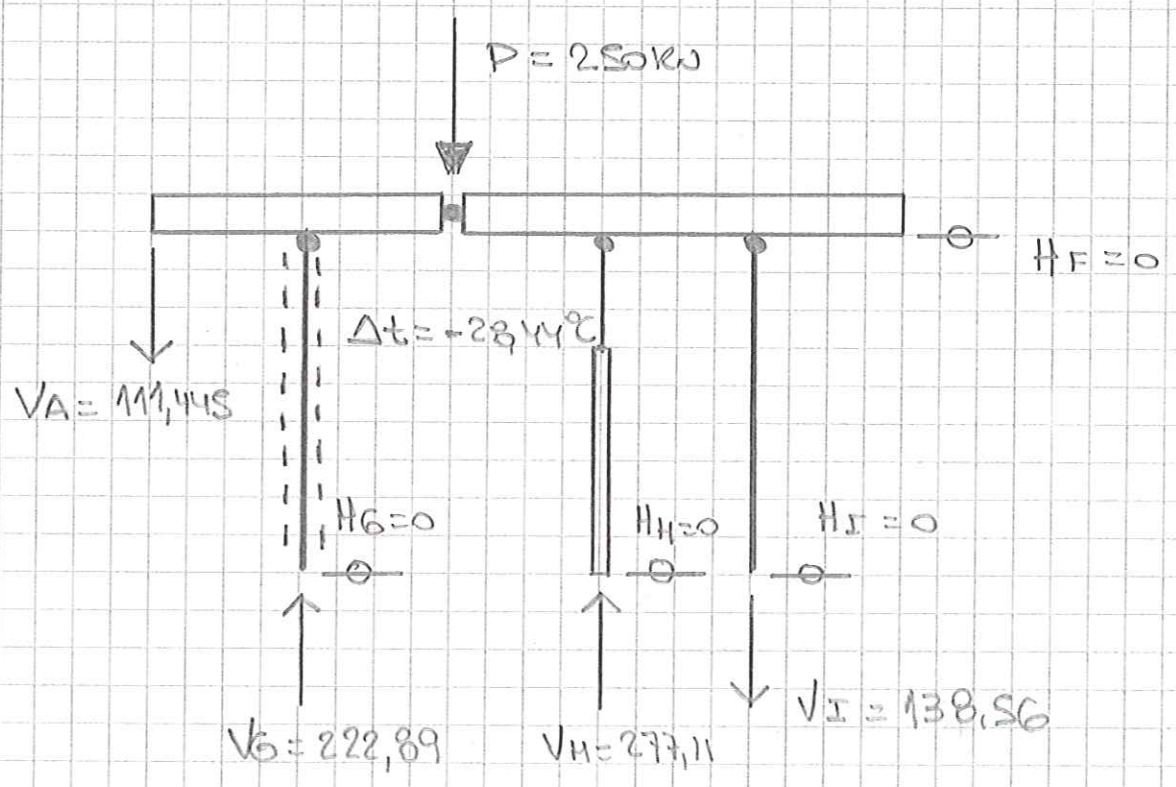




c) → ESFUERZOS Y TENSIONES EN LAS BARRAS

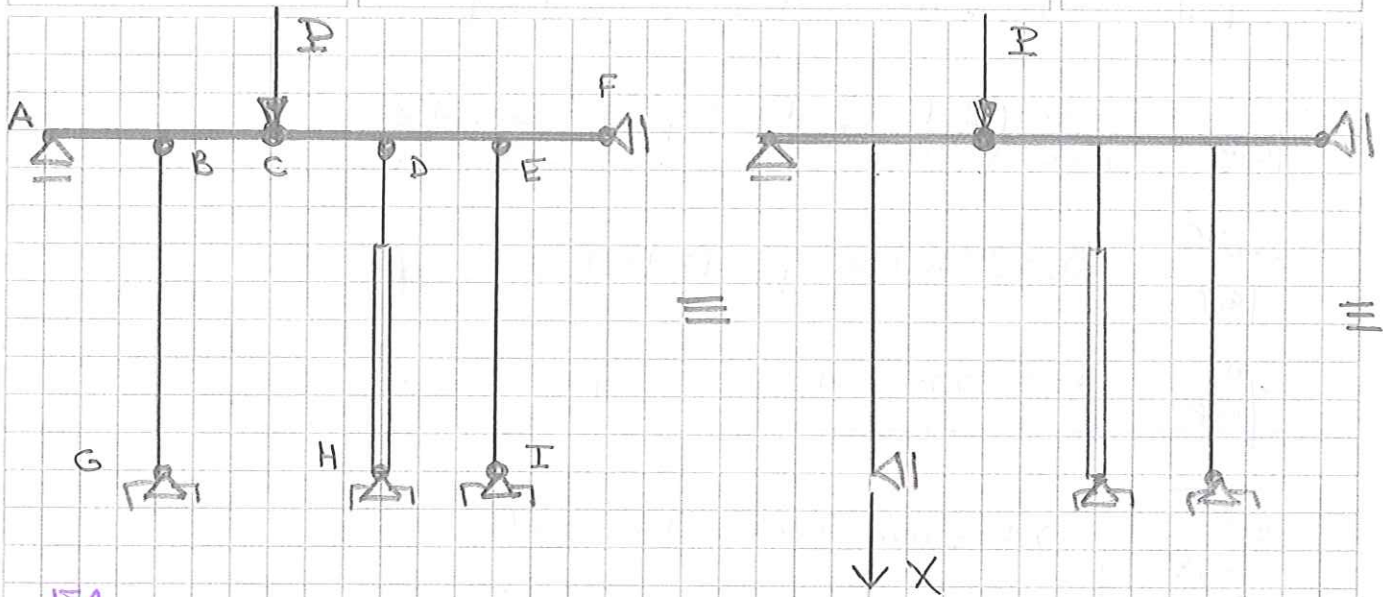
REACCIONES DE VÍNCULO:

BARRA	N [kN]	T/C	$\sigma$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	Reacción
BG	-222,89	C	-13,11	V <sub>G</sub>
DH2	-277,11	C	-13,86	V <sub>H</sub>
DH3	-277,11	C	-17,32	V <sub>H</sub>
EI	+ <del>111,45</del> 138,56	T	+ 8,49	V <sub>I</sub>
	411,445	-.-	-.-	V <sub>A</sub>

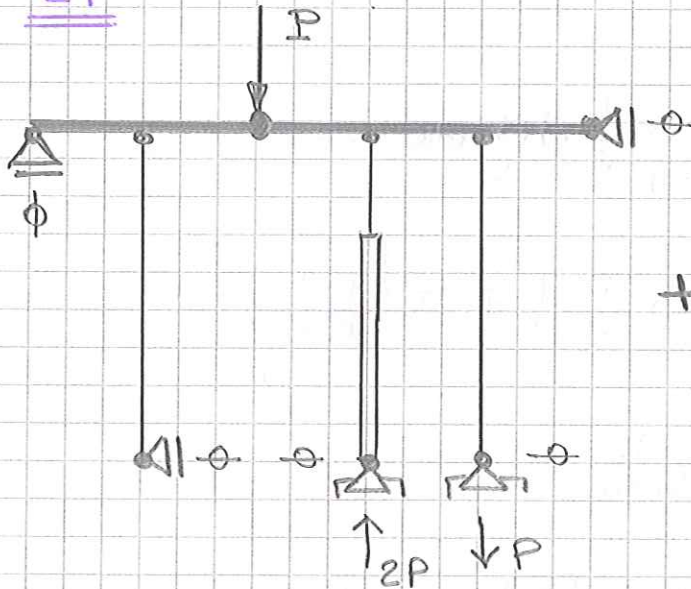


$[P] = \text{kN}$   
 $[T] = ^\circ\text{C}$

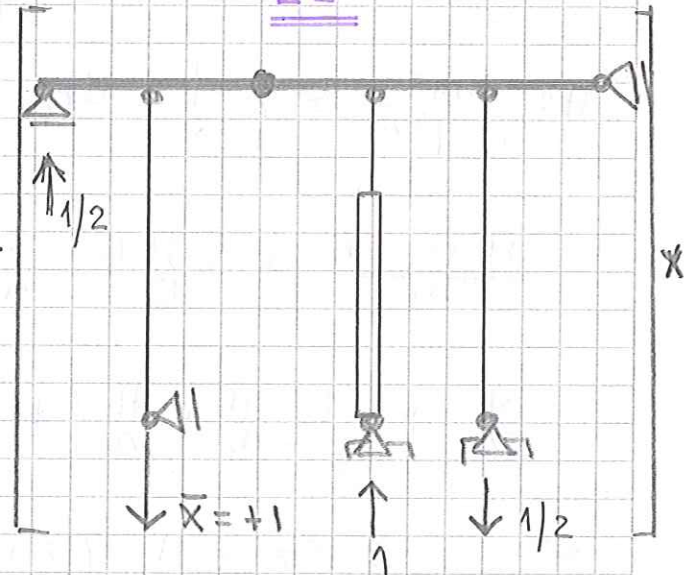




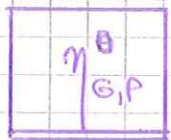
E1



E2



$$\eta_{G,P}^H = \eta_{G,P}^0 + \eta_{G,\bar{X}}^0 \cdot X$$



Esquema real  $\equiv E1 \equiv DV$   
 " Virtual  $\equiv E2 \equiv SE$   
 o Invertidos

$$(+1) \cdot \eta_{G,P}^0 = \sum_1^3 \int N \cdot dn \equiv \sum_1^3 \int \frac{N \cdot N}{EA} dx =$$

$$= \frac{0 \cdot +1 \cdot 3H}{EA_1} + \frac{(-2P)(-1)}{E} \left[ \frac{2H}{A_2} + \frac{H}{A_3} \right] + (+P)(+1/2) \frac{3H}{EA_1} =$$

$$\eta_{G,P}^0 = \frac{2P}{E} \left( \frac{2H}{A_2} + \frac{H}{A_3} \right) + \frac{3}{2} \frac{PH}{EA_1}$$

$$\eta_{G,P}^0 = \frac{2 \cdot 250}{21000} \left( \frac{2 \cdot 150}{20} + \frac{150}{16} \right) + \frac{3}{2} \frac{250 \cdot 150}{21000 \cdot 17}$$

$$\eta_{G,P}^0 = 0,58036 \text{ cm} + 0,15756 \text{ cm}$$

$$\eta_{G,P}^0 = 0,73792 \text{ cm}$$

$\eta_{G,\bar{X}}^0$

→ Esquema Real  $\equiv E2 \equiv DV^r$   
 ↳ " Virtual  $\equiv E2 \equiv SE$   
 o Imposible.

$$(+1) \cdot \eta_{G,\bar{X}}^0 = \sum_1^3 \int N \cdot d\theta = \sum_1^3 \int \frac{NN}{EA} dx =$$

$$= \frac{(+1)(+1)3H}{EA_1} + \frac{(-1)(-1)}{E} \left[ \frac{2H}{A_2} + \frac{H}{A_3} \right] + \frac{(+1/2)(+1/2)3H}{EA_1} =$$

$$= \frac{3H}{EA_1} + \frac{1}{E} \left[ \frac{2H}{A_2} + \frac{H}{A_3} \right] + \frac{3H}{4EA_1}$$

$$\eta_{G,\bar{X}}^0 = \frac{3 \cdot 150}{21000 \cdot 17} + \frac{1}{21000} \left( \frac{2 \cdot 150}{20} + \frac{150}{16} \right) + \frac{3 \cdot 150}{4 \cdot 21000 \cdot 17}$$

$$\eta_{G,\bar{X}}^0 = 1,2605 \cdot 10^{-3} + 1,1607 \cdot 10^{-3} + 3,1513 \cdot 10^{-4}$$

$$\eta_{G,\bar{X}}^0 = 2,73633 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

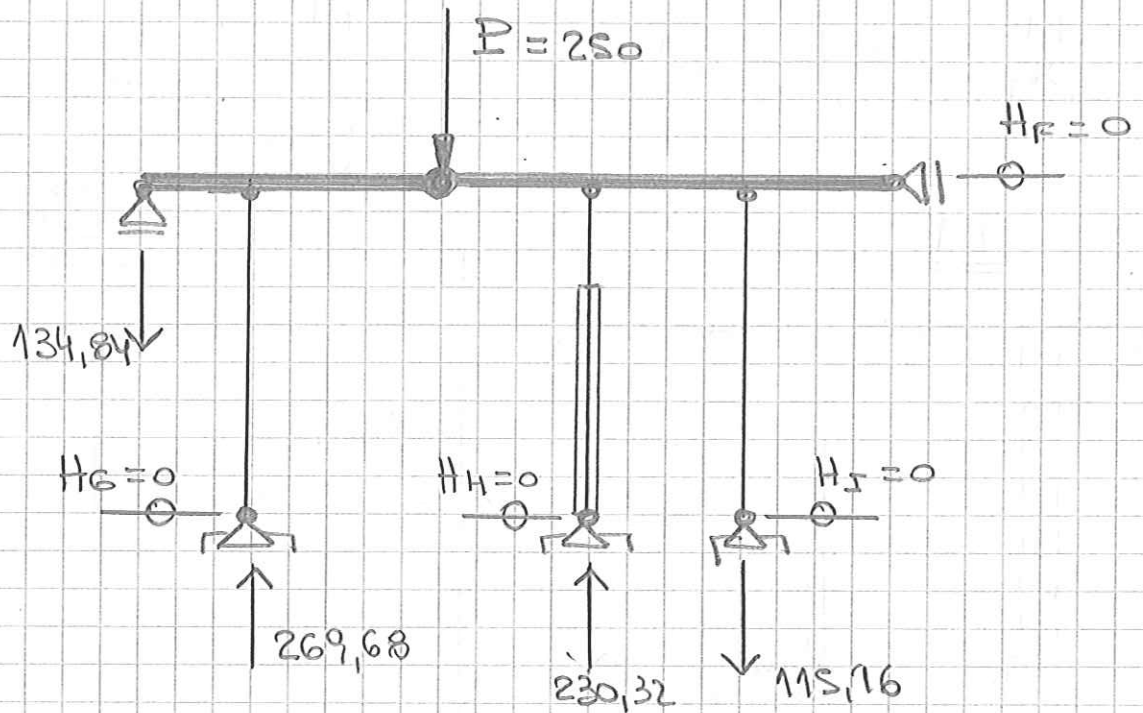
De la ecuación de compatibilidad:

$$0,73792 + 2,73633 \cdot 10^{-3} \cdot X = 0.$$

$$\underline{\underline{X = -269,68 \text{ kN}}}$$

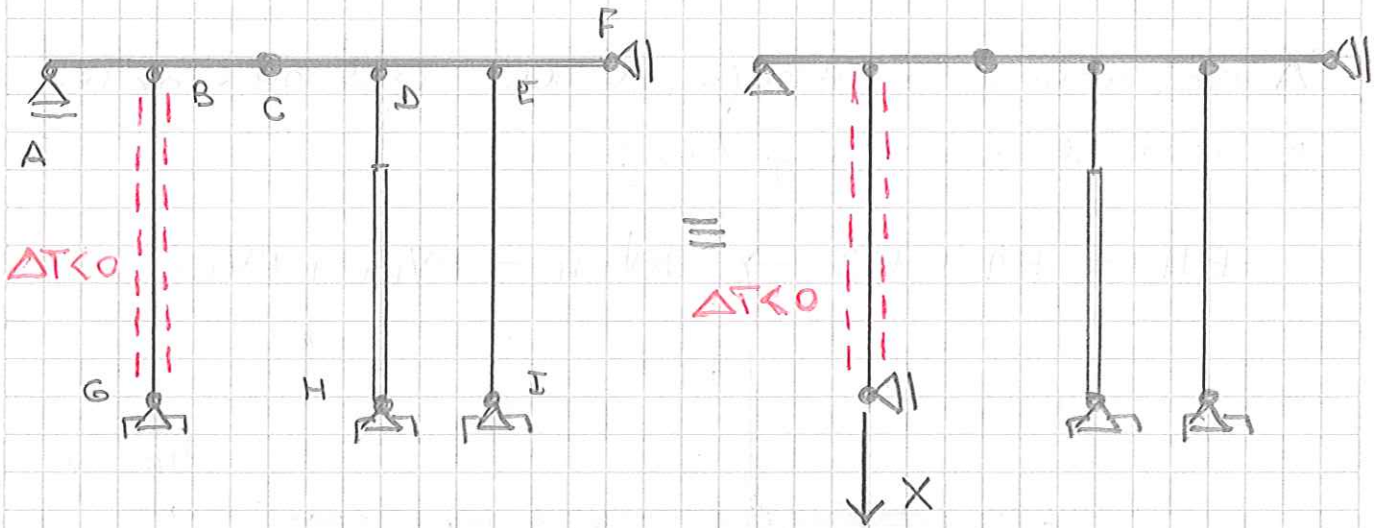
A continuación se dibuja el DCLE con uno de los miembros de estos esquemas:

$$EH = E1 + E2 \rightarrow RV_{EH} = RV_{E1} + RV_{E2}$$



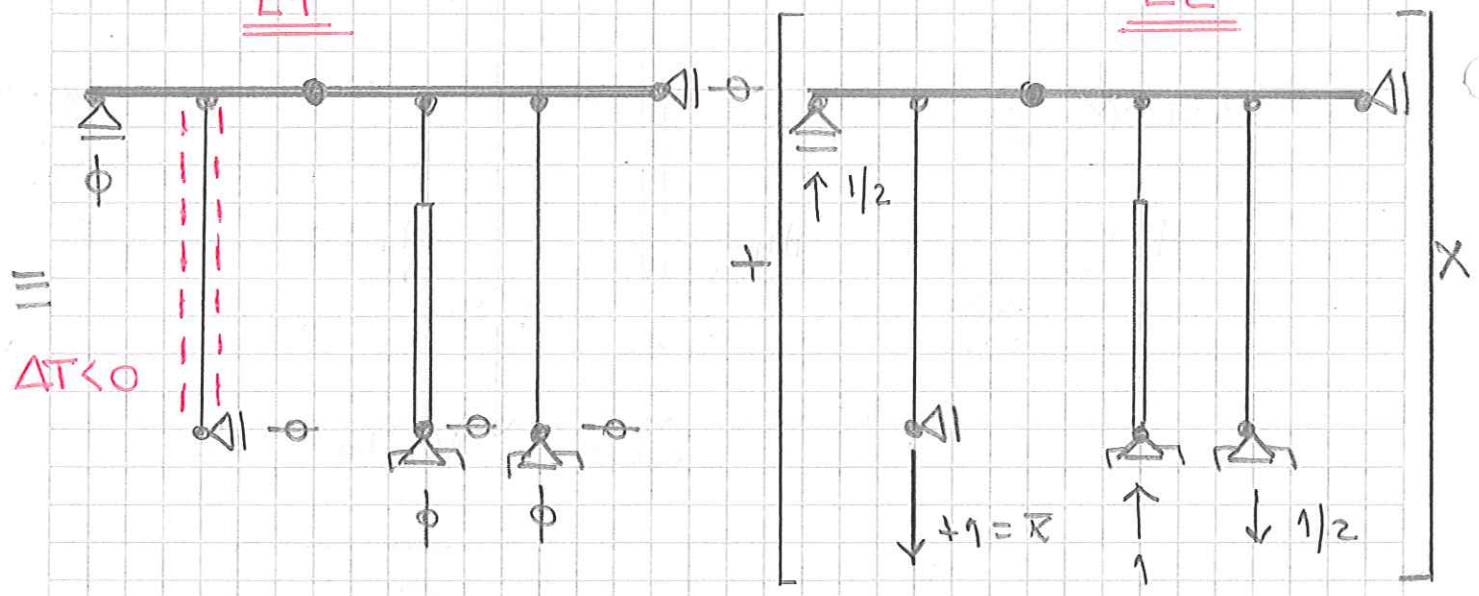
DCLE<sub>SH</sub>

$\Delta T = -28,44^\circ C$

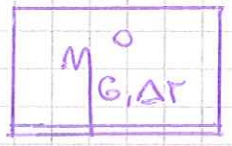


E1

E2



$$M_{G,\Delta T}^H = M_{G,\Delta T}^0 + M_{G,\bar{x}}^0 \cdot X$$



→ Esquema real ≡ E1 ≡ DV  
 ↳ " virtual ≡ E2 ≡ SE  
 o inventado

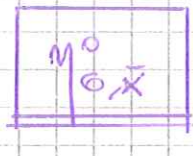
$$(+1) \cdot M_{G,\Delta T}^0 = \sum_1^3 \int_{SE} n \cdot d\bar{\omega} = \sum_1^3 \int_{SE} (\lambda \Delta T) n \cdot dx$$

$$M_{G,\Delta T}^0 = +(+1) \lambda \Delta T 3H + (-1) \cdot 0 + (+1/2) \cdot 0$$

↑  
con su signo < 0.

$$\eta_{\theta, \Delta T}^0 = 3\lambda \Delta T H = 3 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (-28,44^\circ\text{C}) \cdot 150 \text{ cm}$$

$$\eta_{\theta, \Delta T}^0 = -0,12798 \text{ cm.}$$



Esquema Real  $\equiv E2 \equiv DV$

" Virtual  $\equiv E1 \equiv SE$   
o Imaginado

YA CALCULADO  
PARA LA CAUSA  
FUERZA.

$$\eta_{\theta, X}^0 = 2,73633 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

De la ecuación de compatibilidad:

$$-0,12798 + 2,73633 \cdot 10^{-3} X = 0$$

$$X = 46,77 \text{ kN}$$

NOTA:

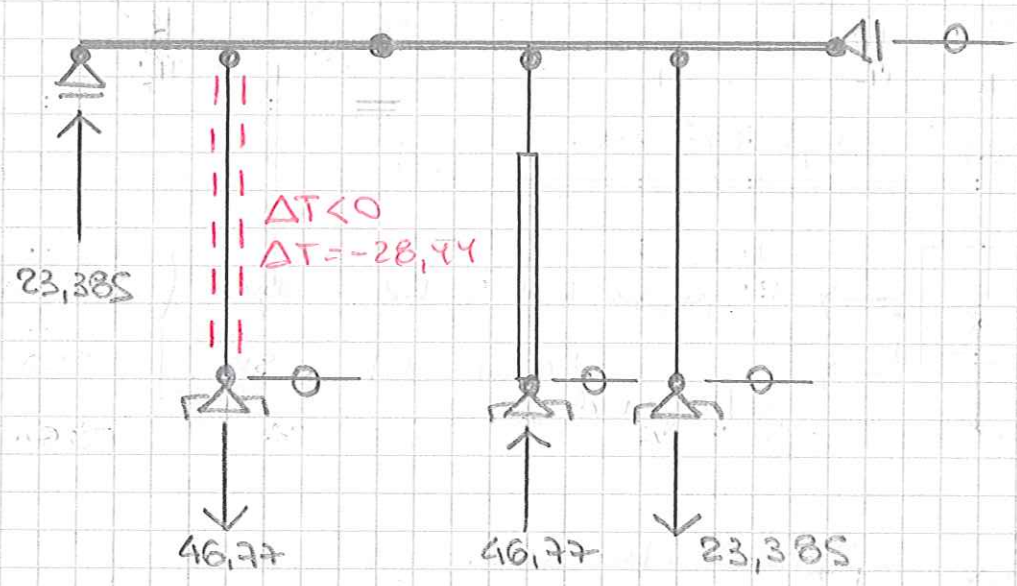
El cálculo de  $\eta_{\theta, \Delta T}^0$  podría haberse realizado por compatibilidad de las deformaciones al observar cómo se deforma la estructura isostática.

En este caso, el punto G se puede dilatar o contraer libremente:

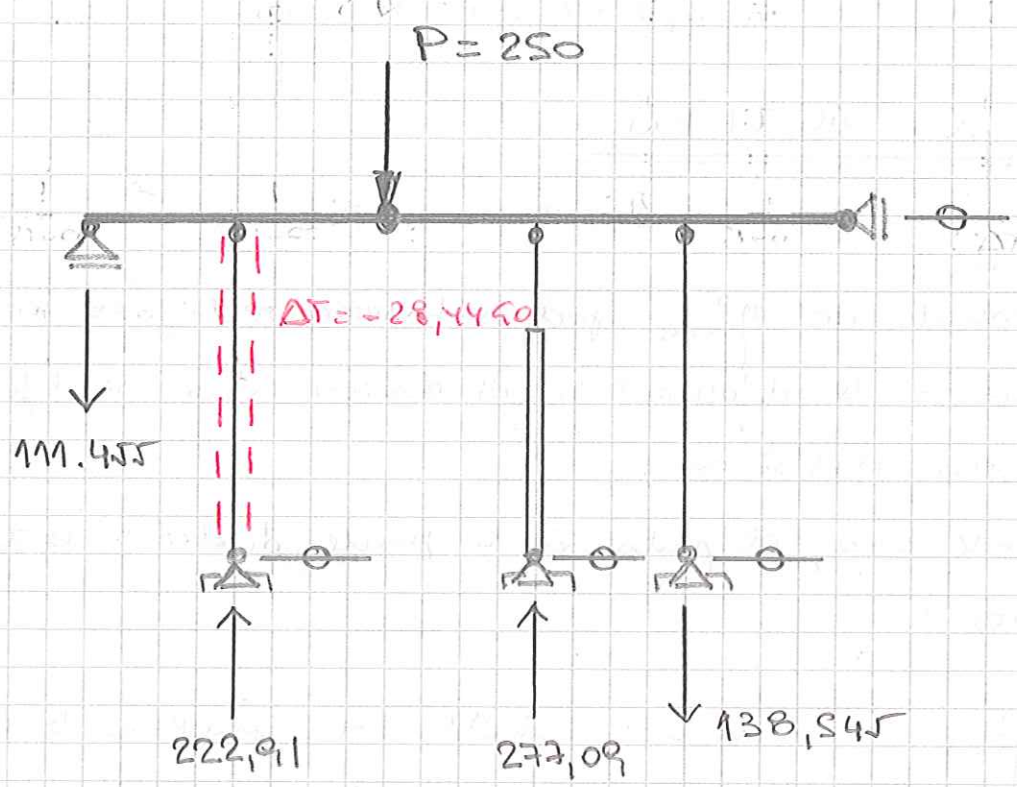
$$\eta_{\theta, \Delta T}^0 = \lambda \Delta T L = \lambda \Delta T \cdot 3H \text{ igual a lo calculado}$$

mediante trabajos virtuales.

El siguiente diagrama resume los RV originados por  $\Delta T$  en el sistema hiperestático.



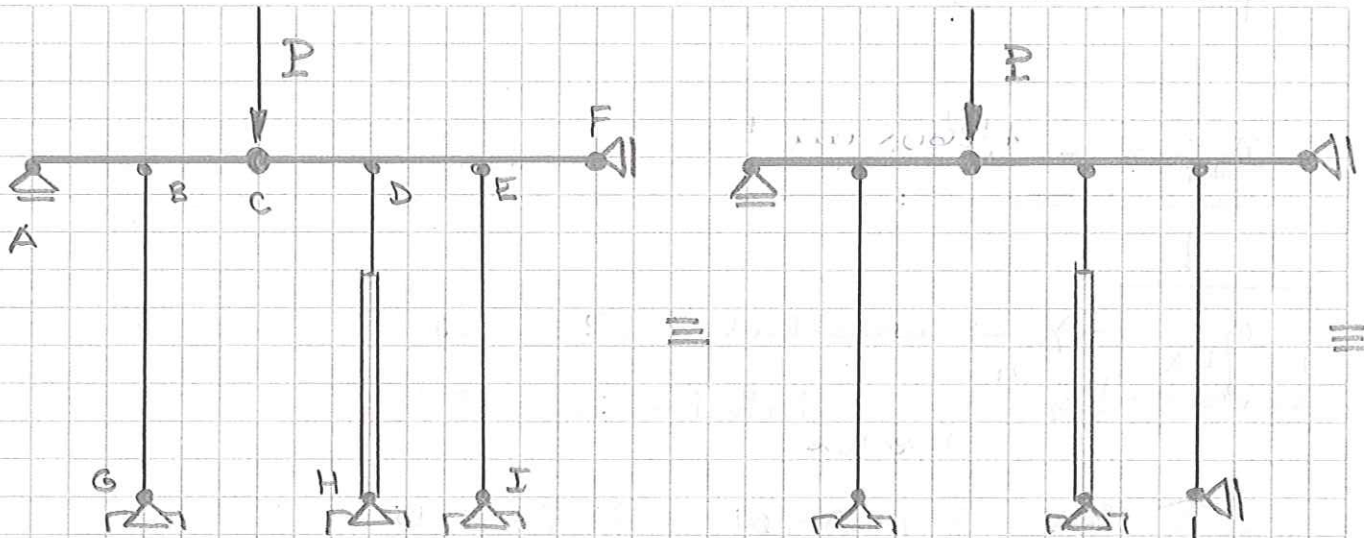
El siguiente diagrama resume los RV originados por  $P_j$  por  $\Delta T$  en el sistema hiperestático.



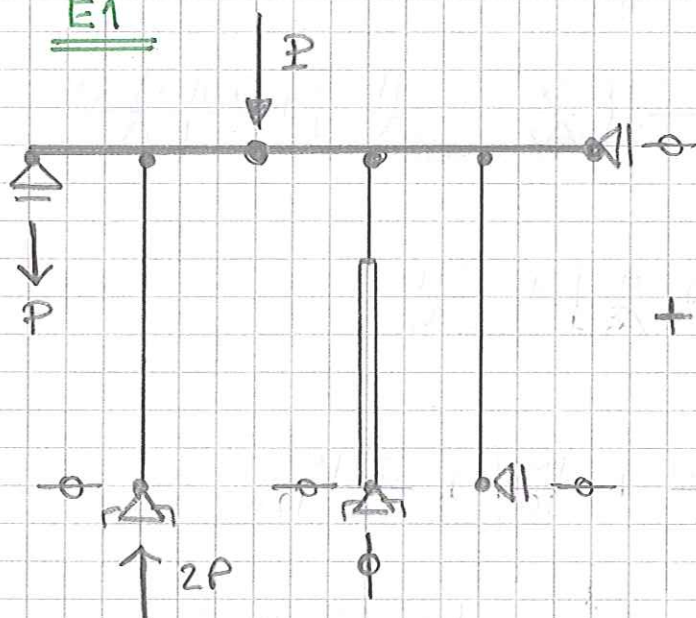
Así los RV se obtuvieron como suma de los RV provocados por  $P_j$  por  $\Delta T$  en el SH.

$$RV_{P+\Delta T}^H = RV_P^H + RV_{\Delta T}^H \rightarrow \underline{\underline{PSE}}$$

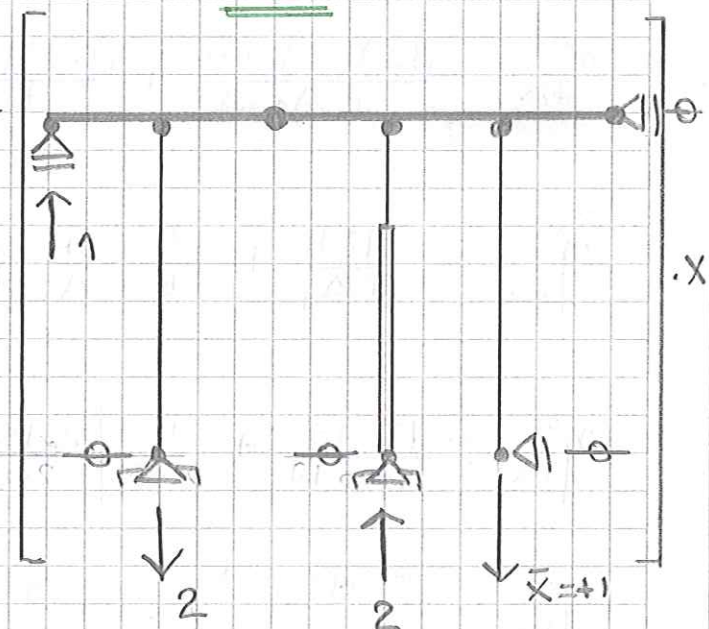




E1



E2



$$\eta_{I,P}^H = \eta_{I,P}^0 + \eta_{I,\bar{X}}^H \cdot X$$

$\eta_{I,P}^0$

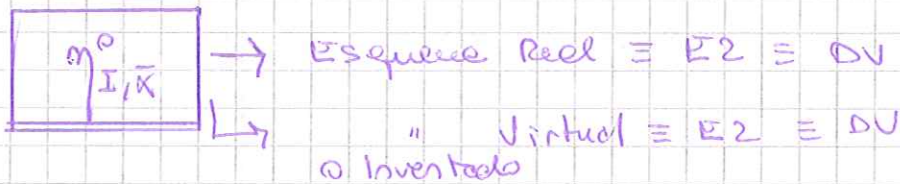
Esquema Real  $\equiv E1 \equiv DV$   
 " Virtual  $\equiv E2 \equiv SE$   
 o Inventado

$$(+1) \cdot \eta_{I,P}^0 = \sum_1^3 \int N \cdot dn^{SE DV} = \sum_1^3 \int N N \frac{dx}{EA}$$

$$\eta_{I,P}^0 = \frac{(-2P)(+2)3H}{EA_1} + (-2) \cdot 0 + (+1) \cdot 0 = -\frac{12PH}{EA_1}$$

$$\eta_{I,P}^0 = - \frac{12 \cdot 250 \text{ kN} \cdot 150 \text{ cm}}{21000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot 17 \text{ cm}}$$

$$\eta_{I,P}^0 = - 1,2605 \text{ cm}$$



$$(+1) \cdot \eta_{I,\bar{X}}^0 = \sum_1^3 \int N \cdot d\bar{n} = \sum_1^3 \int N \bar{N} \frac{dx}{EA}$$

$$\eta_{I,\bar{X}}^0 = \frac{(+2)(+2) 3H}{EA_1} + \frac{(-2)(-2)}{E} \left[ \frac{2H}{A_2} + \frac{H}{A_3} \right] + \frac{(+1)(+1) 3H}{EA_1}$$

$$\eta_{I,\bar{X}}^0 = \frac{12H}{EA_1} + \frac{4}{E} \left[ \frac{2H}{A_2} + \frac{H}{A_3} \right] + \frac{3H}{EA_1}$$

$$\eta_{I,\bar{X}}^0 = \frac{12 \cdot 150}{21000 \cdot 17} + \frac{4}{21000} \left[ \frac{2 \cdot 150}{20} + \frac{150}{16} \right] + \frac{3 \cdot 150}{21000 \cdot 17}$$

$$\eta_{I,\bar{X}}^0 = 5,042 \cdot 10^{-3} + 4,643 \cdot 10^{-3} + 1,2605 \cdot 10^{-3}$$

$$\eta_{I,\bar{X}}^0 = 0,01095 \text{ cm}$$

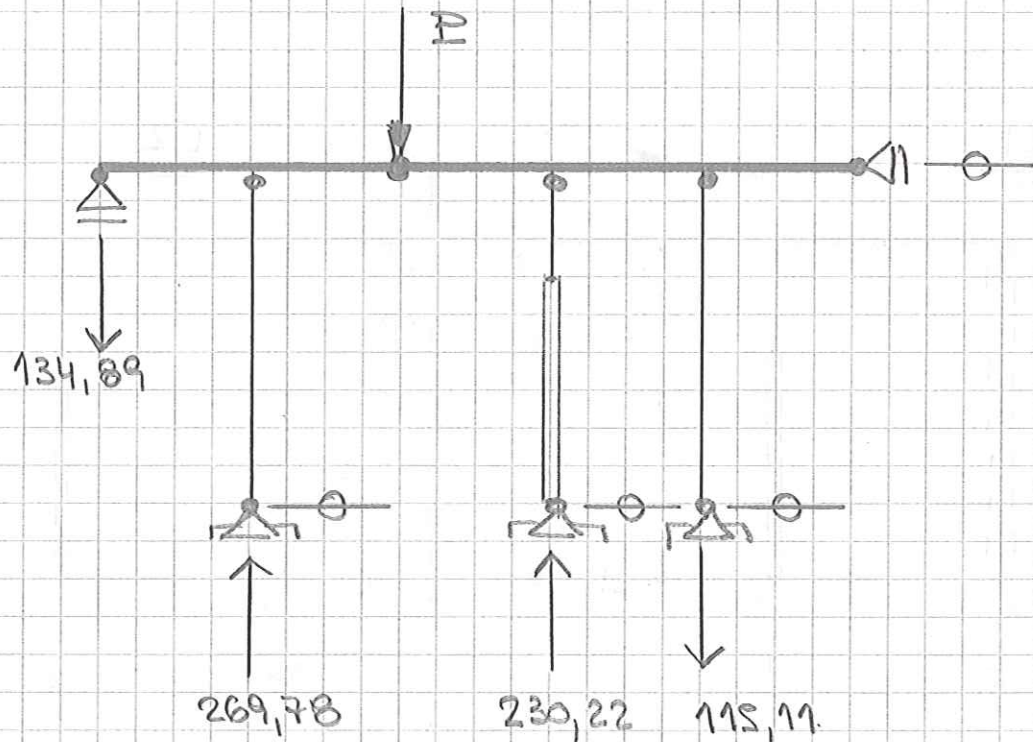
De la Ecuación de Compatibilidad:

$$-1,2605 + 0,01095 X = 0$$

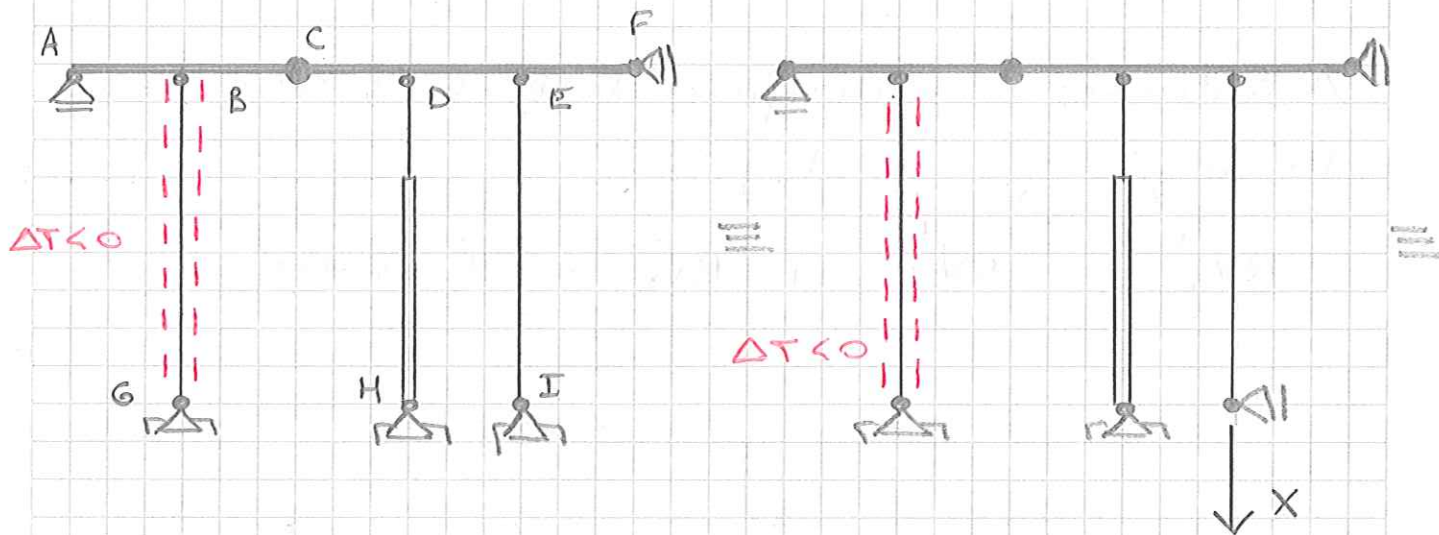
$$X = 115,11 \text{ kN}$$

A continuación se dibuja el DGLB como suma de los RV de los espues E1 y E2:

$$RV_P^H = RV_P^D + RV_X^O = RV_{E1}^O + RV_{E2}^O$$

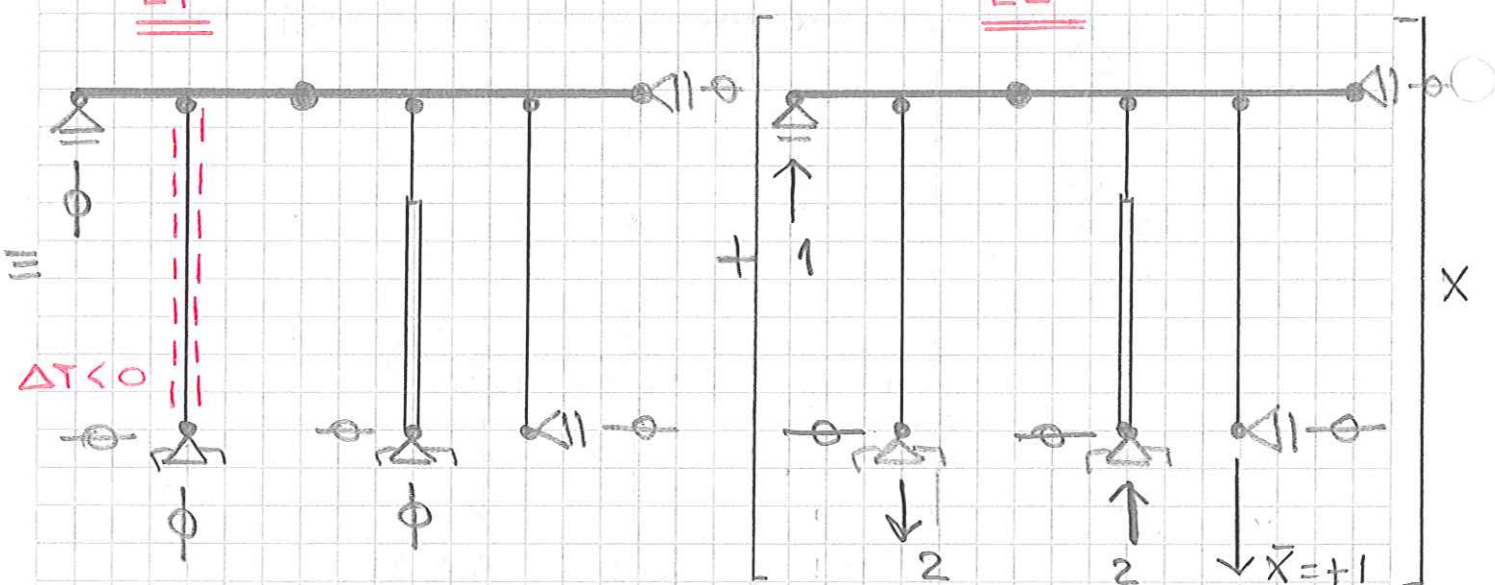


$\Delta T = -28,44^\circ C$



E1

E2



$$M_{I,\Delta T}^H = M_{I,\Delta T}^0 + M_{I,\bar{x}}^0 \cdot X$$

$$M_{I,\Delta T}^0$$

→ Esquema Real  $\equiv E1 \equiv DV$   
 ↳ " Virtual  $\equiv E2 \equiv SE$   
 o Impedido

$$(+1) \cdot M_{I,\Delta T}^0 = \sum_1^3 \int N \cdot dn^{SE DV} = \sum_1^3 \int N \cdot \lambda \Delta T \cdot dx^{DV}$$

$$M_{I,\Delta T}^0 = (+2) \lambda \cdot \Delta T \cdot 3H + (-2) \cdot 0 + (+1) \cdot 0$$

$$\eta_{I,\Delta T}^0 = 6\lambda\Delta TH = 6 \cdot 1.70 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (-28,44)^\circ\text{C} \cdot 155 \text{ cm}$$

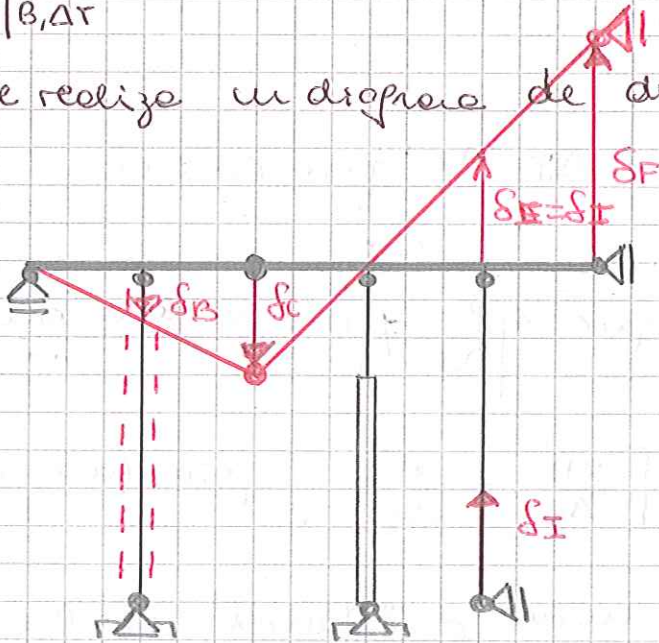
$$\underline{\underline{\eta_{I,\Delta T}^0 = -0.25596 \text{ cm}}}$$

NOTA:

El cálculo de  $\eta_{I,\Delta T}^0$  puede realizarse mediante compatibilidad de los desplazamientos. Para ello todos los elementos que sufren desplazamientos o desplazamientos, no pueden estar solicitados a esfuerzo alguno. Para ello asumamos que

$$\eta_{B,\Delta T}^0 = \lambda\Delta T 3H = 3\lambda\Delta TH$$

Se realiza un diagrama de desplazamientos:



El desplazamiento de cualquier punto se debe al producido por la variación de temperatura más el producido por la causa fuerza. Como esto es nulo y la única causa es  $\Delta T$ , y al ser el sistema un isostático, los esfuerzos internos serán nulos.

Es decir,

$$\eta_{i,D}^0 = \eta_{i,\Delta T}^0 + \eta_{i,P}^0$$

Veamos para cada punto:

$$\eta_B^0 = \eta_{B,\Delta T}^0 + \underbrace{\eta_{B,P}^0}_{=0} = \lambda \Delta T 3H = 3\lambda \Delta T H < 0.$$

$$\eta_C^0 = 2\eta_B^0 \quad \text{por semejanza de triángulos}$$

$$\frac{\eta_C^0}{2L} = \frac{\eta_B^0}{L}$$

$$\eta_D^0 = \underbrace{\eta_{D,\Delta T}^0}_{=0} + \underbrace{\eta_{D,P}^0}_{=0} = 0.$$

$$\eta_{D,\Delta T}^0 = 0 = \lambda \Delta T 3H \quad \text{pero } \Delta T = 0$$

Ahora si  $\eta_D^0 \neq 0$  porque  $\eta_{D,P}^0 \neq 0$  entonces sería:

$$\eta_{D,P}^0 = \frac{N}{E} \left[ \frac{2H}{A_2} + \frac{H}{A_3} \right] \text{ y para que se}$$

no anule, la única prohibición es que  $N \neq 0$ , con lo cual  $V_H \neq 0$ ; pero se demuestra que  $V_H = 0$ .

Con lo cual la única prohibición es que  $N = 0 \Rightarrow \eta_{D,P}^0 = 0$ .

Por esta razón, el punto 'D' queda en la misma posición en la que se encuentra, más de espesor  $\Delta T$ .

$$\eta_E^0 = \underbrace{\eta_{E,\Delta T}^0}_{\neq 0} + \underbrace{\eta_{E,P}^0}_{=0} = 0 \quad \text{solo se produce desplazamiento de cuerpo m\u00e1sido.}$$

$$|\eta_E^0| = |\eta_C^0| = 2 \cdot \eta_B^0 = 2 \cdot \lambda \Delta T \alpha H$$

$$\eta_{E,\Delta T}^0 = \eta_{I,\Delta T}^0 = \alpha \lambda \Delta T H = 6 \cdot 10^{-7} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (28,44) \cdot 150$$

$$\eta_{E,\Delta T}^0 = \eta_{I,\Delta T}^0 = -0,25596 \text{ cm.}$$

Nota:

$\eta$ : es desplazamiento de un punto. ( $= \delta$ )

$\Delta l$ : es deformación.

$\eta_{I,\bar{x}}^0$	}	$\rightarrow$ Esquema Real $\equiv E \Delta \equiv \Delta U$	} YA CALCULADO PARA LA CAUSA FUERZA
		$\rightarrow$ Esquema Virtual $\equiv E \delta \equiv \delta U$ o Inopinado	

$$\eta_{I,\bar{x}}^0 = 0,01095 \text{ cm}$$

De la Ecuación de Compatibilidad:

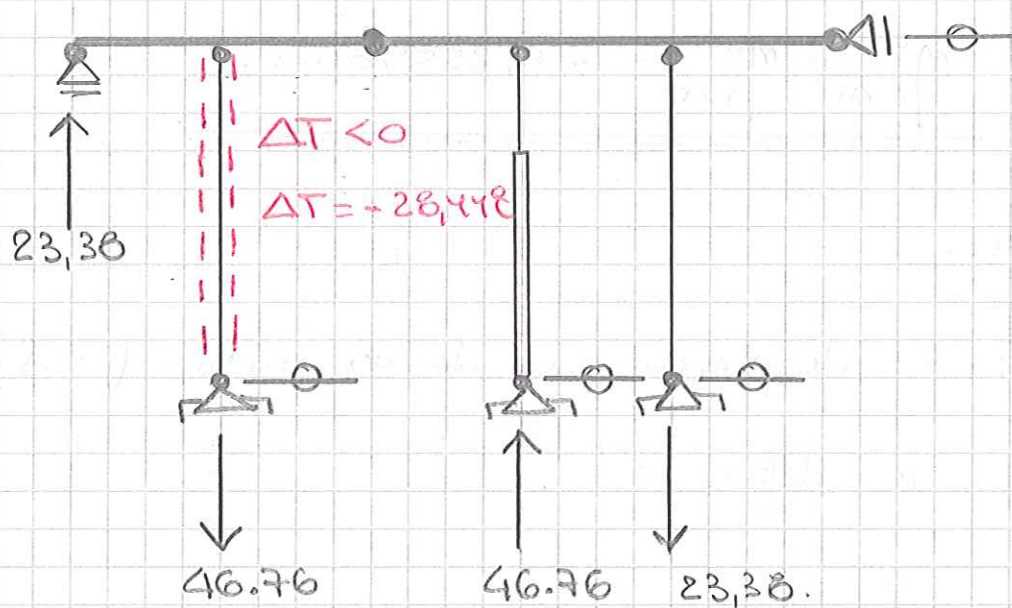
$$-0,25596 + 0,01095 X = 0$$

$$\underline{\underline{X = 23,38 \text{ kN.}}}$$

EL siguiente diagrama resume los RV originados por  $\Delta T$  en el sistema hiperestático:

$$RV^H = RV_{\Delta T}^0 + RV_X^0 = RV_{e1}^0 + RV_{e2}^0$$

como una de las reacciones obtenidas en el sistema fundamental SF debido a  $\Delta T$  y debido a X:





En el siguiente diagrama se muestran los RV originados por las cargas P y  $\Delta T$  en el sistema hiperestático.

Los valores de districen como suma de los RV producidos por P más los producidos por  $\Delta T$  en el hiperestático:

$$RV_{P+\Delta T}^H = RV_P^H + RV_{\Delta T}^H = \underbrace{(RV_P^o + RV_X^o)}_{RV_P^H} + \underbrace{(RV_{\Delta T}^o + RV_X^o)}_{RV_{\Delta T}^H}$$

