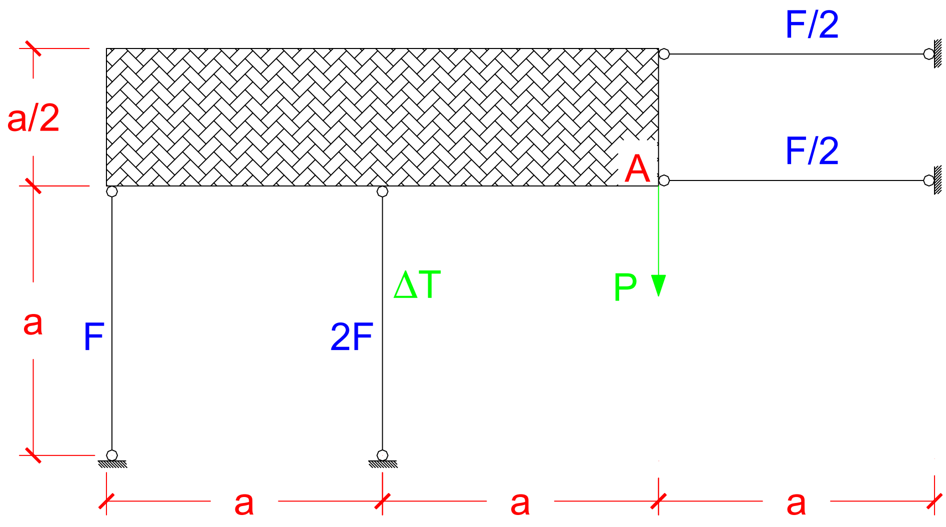
Ejercicio resuelto - Solicitación axil:



Datos: Longitud de las barras: $a := 2m$

Área (Las barras tienen distintas áreas, proporcionales a F): $F := 4cm^2$

Diferencia de temperatura: $\Delta T := -50 \cdot ºC$

Coeficiente de dilatación térmico: $\lambda := 1 \cdot 10^{-5}$

Tensión máxima admisible: $\sigma_{adm} := 240MPa$

Módulo de elasticidad longitudinal: $E := 210000MPa$

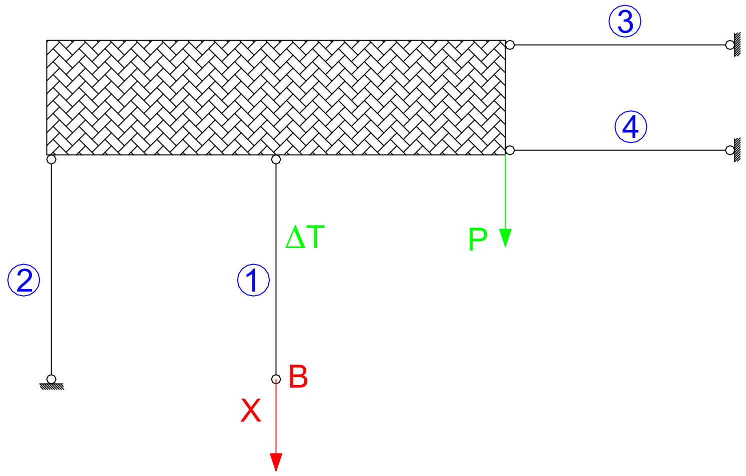
- Calcule la carga máxima P que puede soportar la estructura.

- Calcule el desplazamiento vertical del punto A para dicha carga.

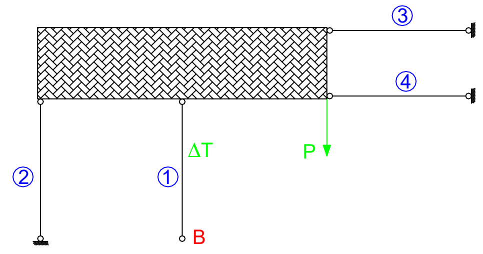
Resolución:

La estructura presenta un grado de hiperestaticidad, por el lado de las incógnitas estáticas (fuerzas y tensiones) nos encontramos con un sistema compatible indeterminado, por lo cual deberemos utilizar la compatibilidad de desplazamientos para poder encontrar la solución.

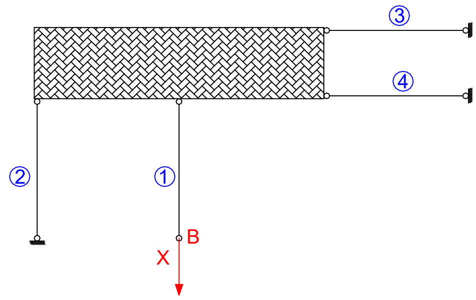
Lo que hacemos es en nuestra estructura original quitar un vinculo y poner en su lugar la reacción de este. De esta manera los sistemas son estáticamente equivalentes:



En este caso elegimos retirar el vínculo de la barra que tiene la carga térmica, que en general resulta en un sistema más simple para resolver, pero podríamos haber removido cualquier vinculo que quisiéremos. Este nuevo sistema lo podemos plantear como la suma de dos sistemas, uno que tenga las cargas y otro que tenga la incógnita:



+

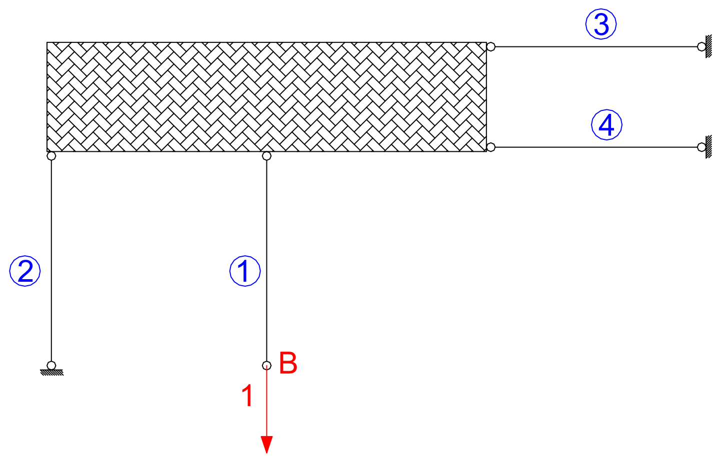


Nuestro propósito ahora va a ser resolver cuál es el valor de nuestra incógnita 'X'. Para poder determinar este valor vamos a requerir una ecuación de compatibilidad. En este caso dicha ecuación es que el desplazamiento del punto extremo de la barra 1, el punto B, es nulo en mi estructura original. Esto se traduce en que la suma de los desplazamientos de cada sistema, el sistema con cargas más el sistema de la incógnita, tiene que ser nulo. Es decir, cada isoestático tendrá un desplazamiento, pero X será tal que genere un desplazamiento igual en módulo pero en sentido contrario al otro.

Planteamos entonces $\eta_X + \eta_C = 0$

Lo que debemos hacer ahora es hallar esos desplazamientos para igualarlos a cero y despejar X. Para hallar estos desplazamientos utilizaremos el teorema de los trabajos virtuales (Notemos que hasta no se menciono T.T.V., es simplemente una herramienta que usamos para calcular dos desplazamientos)

En primer lugar vamos a calcular el desplazamiento vertical del punto B debido a la reacción incógnita X. Para esto vamos a elegir (inventar) un Sistema Equilibrado que nos sea útil. Este SE lo vamos a armar poniendo una fuerza unitaria en el punto y dirección que queramos calcular el desplazamiento:



Buscamos las solicitaciones que equilibren el sistema:

$N_{1se} := 1$ $\quad N_{2se} := -1$ $\quad N_{3se} := -2$ $\quad N_{4se} := 2$

Las fuerzas y tensiones de este SE las vamos a hacer trabajar con los desplazamientos y deformaciones de nuestro sistema con carga X que llamaremos Deformación Virtual 1.

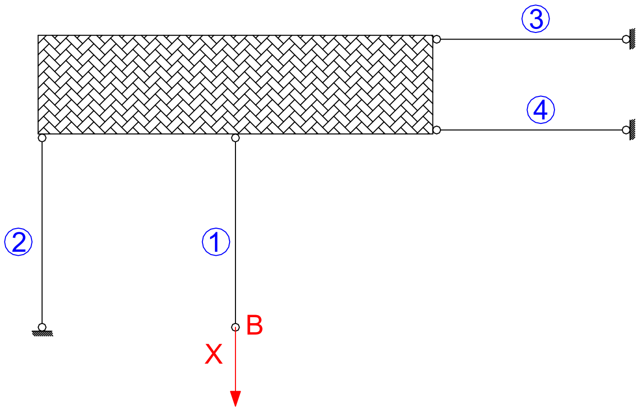
Calculamos los esfuerzos de nuestro DV 1:

$N_{1dv1}(X) := X$

$N_{2dv1}(X) := -X$

$N_{3dv1}(X) := -2X$

$N_{4dv1}(X) := 2X$



Conociendo los esfuerzos de ambos sistemas planteamos el T.T.V. que nos dice:

Trabajo de las fuerzas exteriores = Trabajo de las fuerzas interiores

La única fuerza exterior de nuestro SE es la carga +1, que trabaja con el desplazamiento η_p

Trabajo de las fuerzas exteriores = $1 \cdot \eta_X$

El trabajo de las fuerzas interiores es la sumatoria para cada barra de los esfuerzos axiales de nuestro SE por los desplazamientos del DV.

De forma genérica para una sola barra esto es: $N_{SE} \cdot \left(\frac{N_{DV}}{E \cdot A} + \Delta T_{DV} \cdot \lambda \right) \cdot L$

En este caso resulta: Trabajo de las fuerzas interiores = $\sum_{i=1}^{4} \frac{N_{ise} \cdot N_{idv1} \cdot L_i}{E_i \cdot A_i}$

Por lo tanto: $\eta_X(X) := \frac{N_{1se} \cdot N_{1dv1}(X)}{E \cdot 2F} \cdot a + \frac{N_{2se} \cdot N_{2dv1}(X)}{E \cdot F} \cdot a + \frac{N_{3se} \cdot N_{3dv1}(X)}{E \cdot 0.5F} \cdot a + \frac{N_{4se} \cdot N_{4dv1}(X)}{E \cdot 0.5F} \cdot a$

Repetimos el mismo procedimiento para calcular η_C:

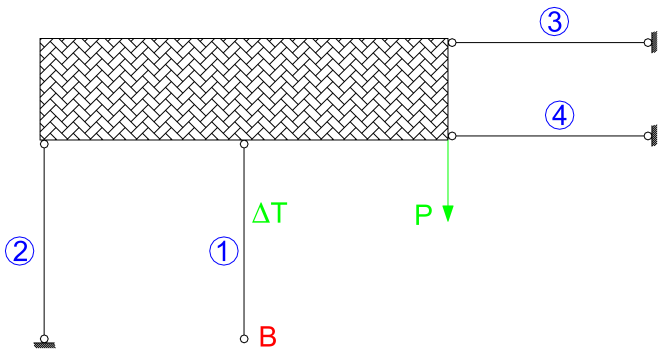
Calculamos los esfuerzos de nuestro DV 2:

$N_{1dv2}(P) := 0$

$N_{2dv2}(P) := -P$

$N_{3dv2}(P) := -4P$

$N_{4dv2}(P) := 4P$



Haciendo la igualdad de trabajos resulta

$$\eta_C(P) := N_{1se} \cdot \lambda \cdot \Delta T \cdot a + \frac{N_{2se} \cdot N_{2dv2}(P)}{E \cdot F} \cdot a + \frac{N_{3se} \cdot N_{3dv2}(P)}{E \cdot 0.5F} \cdot a + \frac{N_{4se} \cdot N_{4dv2}(P)}{E \cdot 0.5F} \cdot a$$

Notemos que en este caso la barra 1 no tiene deformación debido a la carga (el término $N_{1dv2}(P)$ es igual a cero) pero si lo tiene debido a la temperatura, y no debemos olvidar ese término.

Una vez calculados los desplazamientos el labor del T.T.V. ya concluyo y volvemos a plantear nuestra ecuación de compatibilidad que mencionamos anteriormente: $\eta_X + \eta_C = 0$

$$\eta_X(X) + \eta_C(P) = \left(\frac{X}{E \cdot F} \cdot a \cdot \frac{35}{2} \right) + \left(\frac{P \cdot a}{E \cdot F} \cdot 33 + \lambda \cdot \Delta T \cdot a \right) = 0$$

De donde despejamos la incógnita X en función de P. $X(P) := -P \cdot \frac{66}{35} - \lambda \cdot \Delta T \cdot E \cdot F \cdot \frac{2}{35}$

Una vez obtenido el valor de X, en función de P, podemos determinar las solicitaciones de la estructura, en función de P. Por superposición de efectos que enunciamos al principio del ejercicio:

$$N_1(P) := N_{1dv1}(X(P)) + N_{1dv2}(P) \rightarrow -\frac{66 \cdot P}{35} - \frac{2 \cdot E \cdot F \cdot \lambda \cdot \Delta T}{35}$$

$$N_2(P) := N_{2dv1}(X(P)) + N_{2dv2}(P) \rightarrow \frac{31 \cdot P}{35} + \frac{2 \cdot E \cdot F \cdot \lambda \cdot \Delta T}{35}$$

$$N_3(P) := N_{3dv1}(X(P)) + N_{3dv2}(P) \rightarrow \frac{4 \cdot E \cdot F \cdot \lambda \cdot \Delta T}{35} - \frac{8 \cdot P}{35}$$

$$N_4(P) := N_{4dv1}(X(P)) + N_{4dv2}(P) \rightarrow \frac{8 \cdot P}{35} - \frac{4 \cdot E \cdot F \cdot \lambda \cdot \Delta T}{35}$$

Por lo que las tensiones resultan:

$$\sigma_1(P) := \frac{N_1(P)}{2 \cdot F} \qquad \sigma_2(P) := \frac{N_2(P)}{F} \qquad \sigma_3(P) := \frac{N_3(P)}{0.5 \cdot F} \qquad \sigma_4(P) := \frac{N_4(P)}{0.5 \cdot F}$$

La máxima P que puede resistir la estructura es la P que genera que mi primer barra alcance la tensión admisible. Esta es la menor de la cargas P que hacen que cada barra tenga dicha tensión.

Nota: Cuando calculamos la carga admisible para cada barra tenemos que verificar que la tensión de la barra en módulo no supere nuestro valor admisible en módulo. Por lo que si vamos a trabajar con signos tenemos que tener cuidado con el signo de nuestras tensiones. Planteo entonces:

$|\sigma_1(P)| = \sigma_{adm}$ $\quad -\frac{66 \cdot P}{35} - \frac{2 \cdot E \cdot F \cdot \lambda \cdot \Delta T}{35} = -2 \cdot F \cdot \sigma_{adm}$ $\quad$ Despejo: $P_1 := 103.091 \text{ kN}$

$|\sigma_2(P)| = \sigma_{adm}$ $\quad \frac{31 \cdot P}{35} + \frac{2 \cdot E \cdot F \cdot \lambda \cdot \Delta T}{35} = F \cdot \sigma_{adm}$ $\quad$ Despejo: $P_2 := 111.097 \text{ kN}$

$|\sigma_3(P)| = \sigma_{adm}$ $\quad \frac{4 \cdot E \cdot F \cdot \lambda \cdot \Delta T}{35} - \frac{8 \cdot P}{35} = -0.5 \cdot F \cdot \sigma_{adm}$ $\quad$ Despejo: $P_3 := 189 \text{ kN}$

$|\sigma_4(P)| = \sigma_{adm}$ $\quad \frac{8 \cdot P}{35} - \frac{4 \cdot E \cdot F \cdot \lambda \cdot \Delta T}{35} = 0.5 \cdot F \cdot \sigma_{adm}$ $\quad$ Despejo: $P_4 := 189 \text{ kN}$

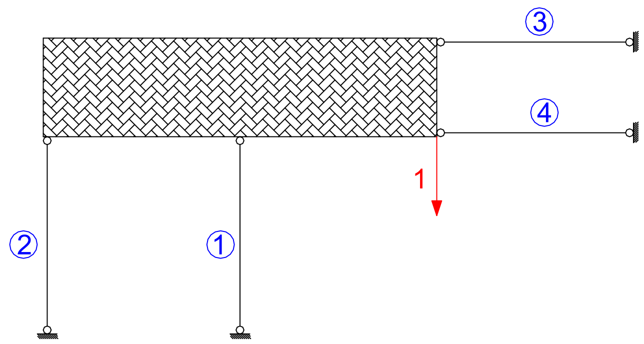
P_1 es la menor de las cargas, y por la tanto la solución de nuestro problema.

Ahora queremos hallar el desplazamiento vertical del punto A para dicha carga.

En primer lugar calculamos el valor de nuestros esfuerzos axiales para dicha carga:

$N_1(P_1) = -192\,\text{kN}$ $\quad N_2(P_1) = 88.909\,\text{kN}$ $\quad N_3(P_1) = -28.364\,\text{kN}$ $\quad N_4(P_1) = 28.364\,\text{kN}$

Como queremos calcular el desplazamiento vertical del punto A proponemos un SE que en dicho punto tenga una carga vertical unitaria +1.



En la demostración de T.T.V. se puede demostrar que nuestro SE con que esté en equilibrio nos es suficiente, las solicitaciones no deben cumplir compatibilidad alguna de desplazamientos Podemos entonces proponer las solicitaciones que queramos nosotros, sin necesidad de resolver el hiperestático 'real', con la única condición que las cargas y solicitaciones estén en equilibrio. Para poder validar esto vamos a proponer dos situaciones de equilibrio distintas y verificar que ambas dan el mismo resultado:

Planteamos primero un caso donde decidimos que una barra horizontal no toma esfuerzo, por lo que ambas barras horizontales no tienen esfuerzo axil y solo trabajan las barras verticales:

Los esfuerzos del isoestático son: $N_{1s1} := -2$ $\quad N_{2s1} := 1$ $\quad N_{3s1} := 0$ $\quad N_{4s1} := 0$

Por lo que el calculo del desplazamiento resulta en:

$$\eta_v := N_{1s1}\cdot\left(\frac{N_1(P_1)}{E\cdot 2F} + \lambda\cdot\Delta T\right)a + \frac{N_{2s1}\cdot N_2(P_1)\cdot a}{E\cdot F} = 8.688\cdot\text{mm}$$

Planteamos un segundo caso donde decidimos que la barra con la carga térmica no toma esfuerzo, por lo que obviamos el trabajo aportado por el esfuerzo axil y contracción térmica de esta barra:

Los esfuerzos del isoestático son: $N_{1s2} := 0$ $\quad N_{2s2} := -1$ $\quad N_{3s2} := -4$ $\quad N_{4s2} := 4$

Por lo que el calculo del desplazamiento resulta en:

$$\eta_v := \frac{N_{2s2}\cdot N_2(P_1)\cdot a}{E\cdot F} + \frac{N_{3s2}\cdot N_3(P_1)\cdot a}{E\cdot 0.5F} + \frac{N_{4s2}\cdot N_4(P_1)\cdot a}{E\cdot 0.5F} = 8.688\cdot\text{mm}$$

Por suerte ambos desplazamientos nos dieron exactamente iguales, por lo que el teorema de los trabajos virtuales se ve comprobado.