Parcialito Estado de Tensiones y Estado de deformaciones

Tema 4:

Para el estado de tensión representado en el cubo elemental de la figura y referido a la terna (O,X,Y,Z) se pide::

a) – Hallar las tensiones principales y las direcciones principales en forma analítica;

b) – Hallar las deformaciones principales y las direcciones principales en forma analítica;

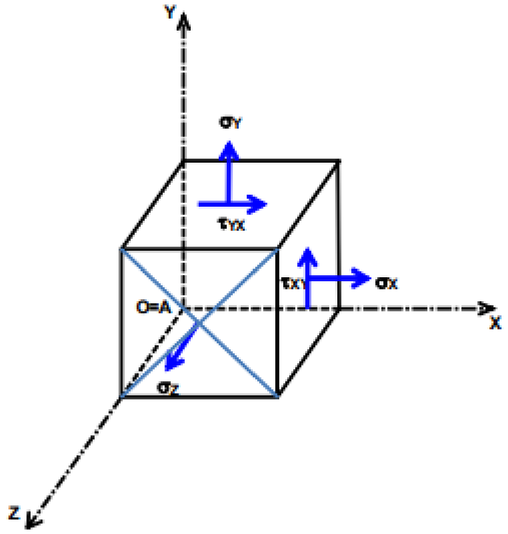
c) – Clasificar los estados de tensión (ET) y de deformación (ED);

d) – Para el plano “π” caracterizado por su normal “n” y que forma los ángulos α, β y γ con los ejes X, Y y Z respectivamente, calcular el vector tensión “ρ” y sus componentes “σ” y “τ”. Expresarlos en forma vectorial y proporcionar sus módulos;

e) – Verificar los puntos anteriores (a, b y d) mediante la utilización de la Circunferencia de Mohr;

f) – Expresar el vector tensión “ρ” asociado al plano “π” en la términos de la terna (O,U,V,W).

Datos:



Tensiones:

$\sigma_x := -100\text{MPa}$ $\sigma_y := -100\text{MPa}$ $\sigma_z := 60\text{MPa}$

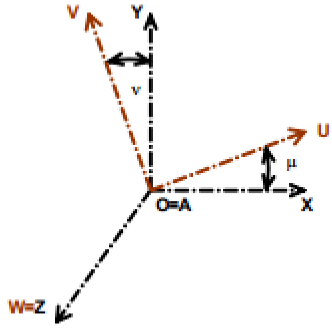
$\tau_{xy} := -100\text{MPa}$ $\tau_{xz} := 0\cdot\text{MPa}$ $\tau_{yz} := 0\cdot\text{MPa}$

Propiedades del material:

$E := 2\cdot 10^5\cdot\text{MPa}$ $G := 8\cdot 10^4\cdot\text{MPa}$

Angulo que forma la normal del plano π con X, Y, Z:

$\alpha := 45\text{deg}$ $\beta := 45\text{deg}$ $\gamma := 90\text{deg}$



Angulo que forma U con X: $\mu := 30\text{deg}$

Angulo que forma V con Y: $\upsilon := 30\text{deg}$

Angulo que forma V con Y: $\omega := 0\text{deg}$

a) Hallar las tensiones principales y las direcciones principales en forma analítica;

$$T_T := \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \qquad T_T = \begin{pmatrix} -100 & -100 & 0 \\ -100 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{MPa}$$

Calculo las tensiones principales (autovalores):

$$\sigma_{p_1} := \max(\mathrm{eigenvals}(T_T)) = 60 \cdot \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\sigma_{p_3} := \min(\mathrm{eigenvals}(T_T)) = -200 \cdot \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\sigma_{p_2} := \begin{array}{|l} \mathrm{eigenvals}(T_T)_1 \ \text{ if } \ \sigma_{p_1} \neq \mathrm{eigenvals}(T_T)_1 \wedge \sigma_{p_3} \neq \mathrm{eigenvals}(T_T)_1 \\ \mathrm{eigenvals}(T_T)_2 \ \text{ if } \ \sigma_{p_1} \neq \mathrm{eigenvals}(T_T)_2 \wedge \sigma_{p_3} \neq \mathrm{eigenvals}(T_T)_2 \\ \mathrm{eigenvals}(T_T)_3 \ \text{ otherwise} \end{array} = 0 \cdot \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}^2}$$

Tensor de tensiones en coordenadas principales:

$$T_p := \begin{pmatrix} \sigma_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{p_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{p_3} \end{pmatrix} \qquad T_p = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -200 \end{pmatrix} \cdot \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}^2}$$

Calculo direcciónes principales (autovectores)

$$d_1 := \mathrm{eigenvec}(T_T, \sigma_{p_1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_2 := \mathrm{eigenvec}(T_T, \sigma_{p_2}) = \begin{pmatrix} -0.707107 \\ 0.707107 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_3 := \mathrm{eigenvec}(T_T, \sigma_{p_3}) = \begin{pmatrix} -0.707107 \\ -0.707107 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Hallar las deformaciones principales y las direcciones principales en forma analítica.

Primero debemos calcular el coeficiente de Poisson: $\mu := \frac{E}{2G} - 1 = 0.25$

Aca existe mas de una forma de hayarlas. Se podria calcular el tensor de deformaciones en coordenadas X, Y, Z y volver a calcular autovalores y autovectores, pero es mas facil usar coordenadas principales. Sabiendo que las direcciones principales de tension son las mismas que las de deformacion entonces:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{p_1} \\ \varepsilon_{p_2} \\ \varepsilon_{p_3} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} \\ \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} \\ \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{p_1} \\ \sigma_{p_2} \\ \sigma_{p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 \times 10^{-4} \\ 1.75 \times 10^{-4} \\ -1.075 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Y las direcciones son las mismas que calculadas para tensiones.

Calcularemos la otra forma (usando coordenadas X, Y, Z) de todas formas para ver que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} \\ \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} \\ \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{x} \\ \sigma_{y} \\ \sigma_{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.5 \times 10^{-4} \\ -4.5 \times 10^{-4} \\ 5.5 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.25 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tensor de deformaciones en coordenadas X, Y, Z:

$$T_D := \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \qquad T_D = \begin{pmatrix} -4.5 \times 10^{-4} & -6.25 \times 10^{-4} & 0 \\ -6.25 \times 10^{-4} & -4.5 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 5.5 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Calculo las deformaciones principales (autovalores):

$$\varepsilon_{p_1} := \max\left(\text{eigenvals}\left(T_D\right)\right) = 5.5 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{p_3} := \min\left(\text{eigenvals}\left(T_D\right)\right) = -1.075 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{p_2} := \left| \begin{array}{ll} \text{eigenvals}\left(T_D\right)_1 & \text{if } \varepsilon_{p_1} \neq \text{eigenvals}\left(T_D\right)_1 \wedge \varepsilon_{p_3} \neq \text{eigenvals}\left(T_D\right)_1 \\ \text{eigenvals}\left(T_D\right)_2 & \text{if } \varepsilon_{p_1} \neq \text{eigenvals}\left(T_D\right)_2 \wedge \varepsilon_{p_3} \neq \text{eigenvals}\left(T_D\right)_2 \\ \text{eigenvals}\left(T_D\right)_3 & \text{otherwise} \end{array} \right. = 1.75 \times 10^{-4}$$

Calculo direcciónes principales (autovectores)

$$d_1 := \text{eigenvec}\left(T_D, \varepsilon_{p_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_2 := \text{eigenvec}\left(T_D, \varepsilon_{p_2}\right) = \begin{pmatrix} -0.707107 \\ 0.707107 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_3 := \text{eigenvec}\left(T_D, \varepsilon_{p_3}\right) = \begin{pmatrix} 0.707107 \\ 0.707107 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver por ambos caminos llegamos al mismo resultado, obviamente, pero el primero fue bastante mas corto.

c) Clasificar los estados de tensión (ET) y de deformación (ED);

- El estado de tension es doble, pues una de las tensiones principales es igual a 0.
- El estado de deformacion es triple, pues las tres deformaciones principales son distintas de 0.

d) – Para el plano “π” caracterizado por su normal “n” y que forma los ángulos α, β y γ con los ejes X, Y y Z respectivamente, calcular el vector tensión “ρ” y sus componentes “σ” y “τ”. Expresarlos en forma vectorial y proporcionar sus módulos;

Usaremos coordenadas X, Y, Z pues es mas directo:

Normal del plano en coordenadas X, Y, Z:
$$n := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707107 \\ 0.707107 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tensor de tensiones en coordenadas X, Y, Z:
$$T_T = \begin{pmatrix} -100 & -100 & 0 \\ -100 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{MPa}$$

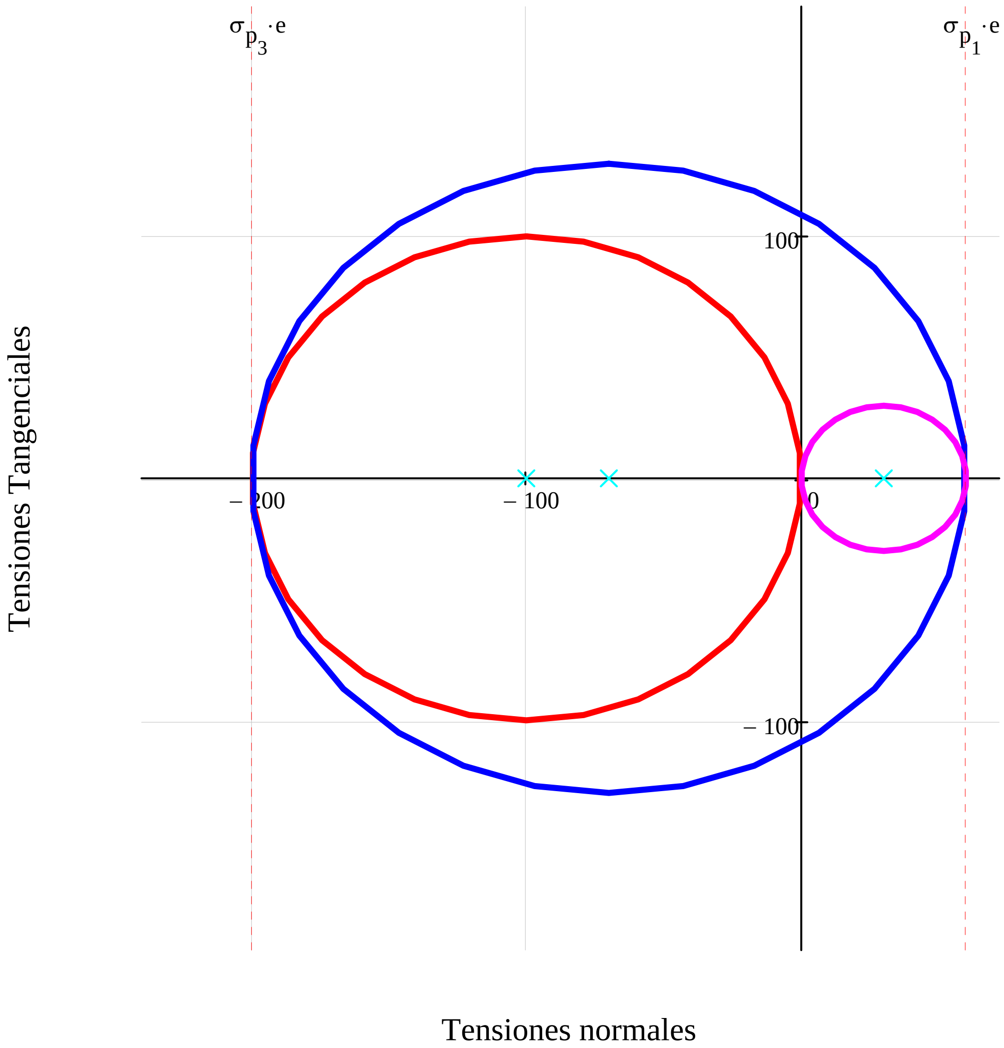
Vector tensión ρ asociado al plano:
$$\rho := T_T \cdot n = \begin{pmatrix} -141.421356 \\ -141.421356 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{MPa} \qquad |\rho| = 200 \cdot \mathrm{MPa}$$

Vector σ asociado al plano:
$$\sigma := \rho \cdot n \cdot n = \begin{pmatrix} -141.421356 \\ -141.421356 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{MPa} \qquad |\sigma| = 200 \cdot \mathrm{MPa}$$

Vector τ asociado al plano:
$$\tau := \rho - \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{MPa} \qquad |\tau| = 0 \cdot \mathrm{MPa}$$

e) Verificar los puntos anteriores (a, b y d) mediante la utilización de la Circunferencia de Mohr;

Circunferencia de Mohr



f) Expresar el vector tensión “ρ” asociado al plano “π” en la términos de la terna (O,U,V,W).

Nuevamente este punto tiene varias formas de realizarse. Veamos algunos:

f-1) Calculemos primero los versores con direcciones 'u' y 'v', en coordenadas X, Y, Z:

$$n_u := \begin{pmatrix} \cos(\mu) \\ \sin(\mu) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.866025 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_v := \begin{pmatrix} -\sin(\upsilon) \\ \cos(\upsilon) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.866025 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_w := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conociendo el vector 'p' su componente en 'u' no es nada mas que la proyeccion del vector sobre esa direccion, lo cual podemos calcular como el producto escalar entre esos dos vectores:

$$\rho_u := \rho \cdot n_u = -193.185165 \cdot \text{MPa}$$

Analogamente con 'v': $\rho_v := \rho \cdot n_v = -51.763809 \cdot \text{MPa}$

Por ultimo la componente en 'w' seria la misma que la componente en 'z' por ser el caso particular de que ambas son la misma dirección.

$$\rho_w := \rho \cdot n_w = 0 \cdot \text{MPa}$$

Entonces el vector en coordenadas U, V, W queda: $\rho_{uvw} := \begin{pmatrix} \rho_u \\ \rho_v \\ \rho_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -193.185165 \\ -51.763809 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{MPa}$

f-2) Una segunda forma de calcular el vector 'ρ' en coordenadas U, V, W es utilizar la matriz de cambio de base. Un cambio de base no es nada más que hacer lo mismo que recien hicimos, pero operando matricialmente.

La matriz de cambio de base de X, Y, Z a U, V, W es la matriz formada por los versores n_x, n_y, n_z en coordenadas U, V, W como columnas.

La matriz de cambio de base de U, V, W a X, Y, Z es la matriz formada por los versores n_u, n_v, n_w en coordenadas X, Y, Z como columnas.

Dichas matrices entre si es una la inversa de la otra. Aparte al ser matrices ortonormales la inversa es igual a la transpuesta, por lo cual de pasar de una a otra es tan solo transponer.

Queda entonces que la matriz que nosotros necesitamos, la de cambio de base de X, Y, Z a U, V, W resultan los vectores n_u, n_v, n_w en coordenadas X, Y, Z como filas:

$$M_{CB} := \begin{pmatrix} n_{u_1} & n_{u_2} & n_{u_3} \\ n_{v_1} & n_{v_2} & n_{v_3} \\ n_{w_1} & n_{w_2} & n_{w_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.866025 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866025 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces el vector en coordenadas U, V, W queda: $\rho_{uvw} := M_{CB} \cdot \rho = \begin{pmatrix} -193.185165 \\ -51.763809 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{MPa}$

f-3) Existe otra forma tambien de calcularlo, que es mucho mas larga y por lo tanto no recomendable.

Obviamente si yo me tomo el trabajo de calcular el tensor de tensiones en coordenadas U, V, W y a su vez hayar la normal del plano π en coordenadas U, V, W al multiplicarlos escalarmente entre si lo que resultaria seria el vector ρ en coordenadas U, V, W.

Tomemosnos el trabajo de hacerlo tan solo para ver como seria el procedimiento. Nuevamente este procedimiento seria mucho mas facil utilizando la matriz de cambio de base para obtener el Tensor de Tensiones y el versor de la normal del plano π en coordenadas U, V; pero hagamos de cuenta que no recordamos esto de algebra y calculemos de modo largo, manual y tedioso. Haremos el calculo de todas formas sabiendo que por suerte Z y W son la misma direccion, y es una direccion principal, sino seria aun mas complicado este método:

Recordamos que en coordenadas X, Y, Z: $T_T = \begin{pmatrix} -100 & -100 & 0 \\ -100 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} \cdot MPa$

Vector tensión ρ asociado a u: $\rho := T_T \cdot n_u = \begin{pmatrix} -136.60254 \\ -136.60254 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\qquad |\rho| = 193.185165 \cdot MPa$

Vector σ asociado a u: $\sigma := \rho \cdot n_u \cdot n_u = \begin{pmatrix} -161.60254 \\ -93.30127 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\qquad \sigma_u := -|\sigma| = -186.60254 \cdot MPa$

Vector τ asociado a u: $\tau := \rho - \sigma = \begin{pmatrix} 25 \\ -43.30127 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\qquad \tau_{uv} := -|\tau| = -50 \cdot MPa$

Vector tensión ρ asociado a v: $\rho := T_T \cdot n_v = \begin{pmatrix} -36.60254 \\ -36.60254 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\qquad |\rho| = 51.763809 \cdot MPa$

Vector σ asociado a v: $\sigma := \rho \cdot n_v \cdot n_v = \begin{pmatrix} 6.69873 \\ -11.60254 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\qquad \sigma_v := -|\sigma| = -13.39746 \cdot MPa$

Vector τ asociado a v: $\tau := \rho - \sigma = \begin{pmatrix} -43.30127 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\qquad \tau_{uv} := -|\tau| = -50 \cdot MPa$

Notemos que es muy importante que el τ_{uv} dio el mismo valor por ambos caminos recien hechos.

Vector tensión ρ asociado a w: $\rho := T_T \cdot n_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\qquad |\rho| = 60 \cdot MPa$

Vector σ asociado a w: $\sigma := \rho \cdot n_w \cdot n_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\qquad \sigma_w := |\sigma| = 60 \cdot MPa$

Entonces el Tensor de Tensiones en coordenadas U, V, W resulta:

$$T_{Tuvw} := \begin{pmatrix} \sigma_u & \tau_{uv} & 0 \\ \tau_{uv} & \sigma_v & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -186.60254 & -50 & 0 \\ -50 & -13.39746 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

Ahora debemos hayar la normal del plano π en coordenadas U, V, W:

$$n_{\pi uvw} := \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \mu) \\ \cos(\beta + \mu) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.965926 \\ 0.258819 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente: $\rho_{uvw} := T_{Tuvw} \cdot n_{\pi uvw} = \begin{pmatrix} -193.185165 \\ -51.763809 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$