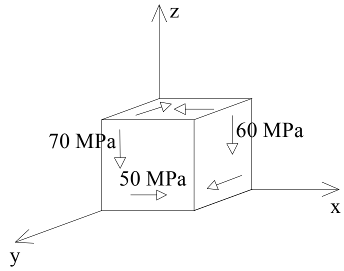
Dado el siguiente estado de tensión se pide:



Calcular las direcciones y tensiones principales, indicando que estado de tensión se tiene.-
Calcular el tensor de deformación, decir que estado de deformación se tiene, e indicar el tensor de deformación esférico y el desviador.-
Para la dirección normal (**n**) al plano octaédrico, ubicado en el primer octante, calcular el vector **n** y sus componentes **n** y **n** asociadas a dicha normal pasante por A y calculando, además, **n** y **n**, deformación específica a la dirección de n y deformación angular de la recta n respectivamente.-
Representar todos los valores calculados antes, en las circunferencias de tensiones, incluso el punto 3, e indicar donde se encuentran ubicados los puntos que representan a los vectores asociados a los ejes x, y, z.-
Representar en las circunferencias de deformación, idem anterior, aprovechando las de tensión.- En el cubo de deformación indicar el plano n y su vector asociado con componentes.-
Dibujar el cubo deformado y sin deformar.-

Datos

$\mathbf{KN} := 10^3 \mathbf{N}$ $\qquad \mathbf{MN} := 10^3 \mathbf{KN}$ $\qquad \mathbf{MPa} := \dfrac{\mathbf{MN}}{\mathbf{m}^2}$

$\sigma\mathbf{x} := 0 \cdot \mathbf{MPa}$ $\qquad \sigma\mathbf{y} := 0 \cdot \mathbf{MPa}$ $\qquad \sigma\mathbf{z} := 0 \cdot \mathbf{MPa}$ $\qquad \mu := .25$ $\qquad \mathbf{E} := 2.1 \cdot 10^5 \cdot \mathbf{MPa}$

$\tau\mathbf{xy} := 50 \cdot \mathbf{MPa}$ $\qquad \tau\mathbf{yz} := -70 \cdot \mathbf{MPa}$ $\qquad \tau\mathbf{zx} := -60 \cdot \mathbf{MPa}$

1. Calcular las direcciones y tensiones principales, indicando que estado de tensión se tiene.-

$$\mathbf{Tt} := \begin{pmatrix} \sigma\mathbf{x} & \tau\mathbf{xy} & \tau\mathbf{zx} \\ \tau\mathbf{xy} & \sigma\mathbf{y} & \tau\mathbf{yz} \\ \tau\mathbf{zx} & \tau\mathbf{yz} & \sigma\mathbf{z} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Tt} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & -60 \\ 50 & 0 & -70 \\ -60 & -70 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{MPa}$$

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \sigma\mathbf{x} \\ \sigma\mathbf{y} \\ \sigma\mathbf{z} \\ \tau\mathbf{xy} \\ \tau\mathbf{yz} \\ \tau\mathbf{zx} \end{pmatrix} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ -70 \\ -60 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{MPa}$$

Determinamos los valores propios de la matriz Tt

$$\mathbf{eigenvals}(\mathbf{Tt}) = \begin{pmatrix} 120.371 \\ -48.649 \\ -71.722 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{MPa} \qquad \begin{pmatrix} \sigma\mathbf{1} \\ \sigma\mathbf{2} \\ \sigma\mathbf{3} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 120.371 \\ -48.649 \\ -71.722 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{MPa} \qquad \mathbf{Ttp} := \begin{pmatrix} \sigma\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma\mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Estado triple de tensión

Determinamos los vectores propios normalizados al valor propio z de la matriz Tt

$$\mathbf{eigenvec}\left(\frac{\mathbf{Tt}}{\mathbf{MPa}}, 120.371\right) = \begin{pmatrix} -0.543 \\ -0.579 \\ 0.608 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{eigenvec}\left(\frac{\mathbf{Tt}}{\mathbf{MPa}}, -48.649\right) = \begin{pmatrix} -0.806 \\ 0.562 \\ -0.185 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{eigenvec}\left(\frac{\mathbf{Tt}}{\mathbf{MPa}}, -71.722\right) = \begin{pmatrix} -0.235 \\ -0.59 \\ -0.772 \end{pmatrix}$$

2.- Calcular el tensor de deformación, decir que estado de deformación se tiene, e indicar el tensor de deformación esférico y el desviador.-

Determinamos las deformaciones principales partiendo de las tensiones principales

$$\mathbf{F}\varepsilon := \begin{pmatrix} 1 & -\mu & -\mu \\ -\mu & 1 & -\mu \\ -\mu & -\mu & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\mathbf{E}} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon\mathbf{1} \\ \varepsilon\mathbf{2} \\ \varepsilon\mathbf{3} \end{pmatrix} := \mathbf{F}\varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \sigma\mathbf{1} \\ \sigma\mathbf{2} \\ \sigma\mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon\mathbf{1} \\ \varepsilon\mathbf{2} \\ \varepsilon\mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.165 \times 10^{-4} \\ -2.896 \times 10^{-4} \\ -4.269 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Tdp} := \begin{pmatrix} \varepsilon\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Tdp} = \begin{pmatrix} 7.165 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -2.896 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -4.269 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Estado triple de deformación

Determinamos las deformaciones asociadas a la terna x,y, z

$$\mathbf{F}\varepsilon\gamma := \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot(1+\mu) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\mathbf{E}}$$

$$\Psi := \begin{pmatrix} \varepsilon x \\ \varepsilon y \\ \varepsilon z \\ \gamma xy \\ \gamma yz \\ \gamma zx \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon x \\ \varepsilon y \\ \varepsilon z \\ \gamma xy \\ \gamma yz \\ \gamma zx \end{pmatrix} := \mathbf{F}\varepsilon\gamma \cdot \Gamma \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon x \\ \varepsilon y \\ \varepsilon z \\ \gamma xy \\ \gamma yz \\ \gamma zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5.952\times 10^{-4} \\ -8.333\times 10^{-4} \\ -7.143\times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Determinamos el tensor de deformaciones

$$\mathbf{Td} := \begin{pmatrix} \varepsilon x & \frac{\gamma xy}{2} & \frac{\gamma zx}{2} \\ \frac{\gamma xy}{2} & \varepsilon y & \frac{\gamma yz}{2} \\ \frac{\gamma zx}{2} & \frac{\gamma yz}{2} & \varepsilon z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Td} = \begin{pmatrix} 0 & 2.976\times 10^{-4} & -3.571\times 10^{-4} \\ 2.976\times 10^{-4} & 0 & -4.167\times 10^{-4} \\ -3.571\times 10^{-4} & -4.167\times 10^{-4} & 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos la deformación específica volumétrica

$$\varepsilon v := \frac{\varepsilon x + \varepsilon y + \varepsilon z}{3} \qquad \varepsilon v = 0$$

Tensor esférico

$$\mathbf{Tde} := \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon v}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon v}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon v}{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Tde} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tensor desviador

$$\mathbf{Tdd} := \begin{pmatrix} \varepsilon x - \frac{\varepsilon v}{3} & \frac{\gamma xy}{2} & \frac{\gamma zx}{2} \\ \frac{\gamma xy}{2} & \varepsilon y - \frac{\varepsilon v}{3} & \frac{\gamma yz}{2} \\ \frac{\gamma zx}{2} & \frac{\gamma yz}{2} & \varepsilon z - \frac{\varepsilon v}{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Tdd} = \begin{pmatrix} 0 & 2.976\times 10^{-4} & -3.571\times 10^{-4} \\ 2.976\times 10^{-4} & 0 & -4.167\times 10^{-4} \\ -3.571\times 10^{-4} & -4.167\times 10^{-4} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Para la dirección normal (n) al plano octaédrico, ubicado en el primer octante, calcular el vector n y sus componentes n y n asociadas a dicha normal pasante por A y calculando, además, n y n, deformación específica a la dirección de n y deformación angular de la recta n respectivamente.-

$$\mathbf{nn} := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \qquad \rho\mathbf{n} := \mathbf{Ttp}\cdot\mathbf{nn} \qquad \rho\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 69.496 \\ -28.088 \\ -41.409 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{MPa} \qquad |\rho\mathbf{n}| = 85.635\cdot\mathbf{MPa}$$

$$\sigma\mathbf{n} := \rho\mathbf{n}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{nn} \qquad \sigma\mathbf{n} = 0\,\mathbf{Pa}$$

$$\tau\mathbf{n} := |\rho\mathbf{n}| - \sigma\mathbf{n} \qquad \tau\mathbf{n} = 8.563\times 10^{7}\,\mathbf{Pa}$$

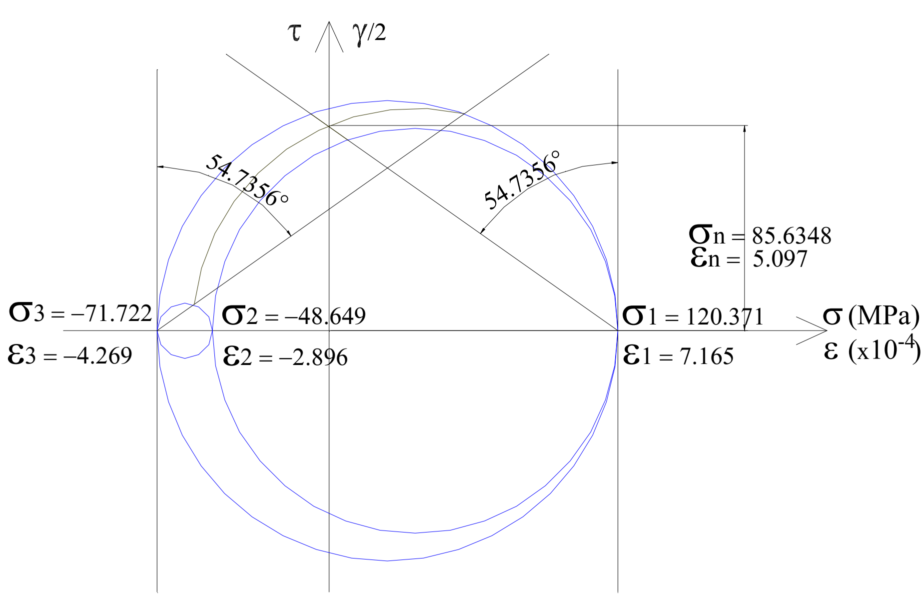
$$\delta\mathbf{n} := \mathbf{Tdp}\cdot\mathbf{nn} \qquad \delta\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4.137\times 10^{-4} \\ -1.672\times 10^{-4} \\ -2.465\times 10^{-4} \end{pmatrix} \qquad |\delta\mathbf{n}| = 5.097\times 10^{-4}$$

$$\varepsilon\mathbf{n} := \delta\mathbf{n}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{nn} \qquad \varepsilon\mathbf{n} = 0$$

$$\gamma\mathbf{n} := |\delta\mathbf{n}| - \varepsilon\mathbf{n} \qquad \gamma\mathbf{n} = 5.097\times 10^{-4}$$

4. Representar todos los valores calculados antes, en las circunferencias de tensiones, incluso el punto 3, e indicar donde se encuentran ubicados los puntos que representan a los vectores asociados a los ejes x, y, z.-

Circunferencia de Mohr para la dirección normal al plano octaédrico



El ángulo que forma la dirección normal n del plano octaédrico, con respecto a los ejes principales 1 y 3 es:

$$\mathbf{acos}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 54.736\cdot\mathbf{deg}$$

ver circunferencia de Mohr anterior

Aplicando la circunferencia de Mohr determinamos las tensiones y deformaciones correspondientes a los planos cuya normal esta asociada a los ejes x, y, z

Conforme a los valores determinados anteriormente, los cosenos directores de los planos principales respecto de los ejes x,y,z son los siguientes:

$$\mathbf{eigenvec}\left(\frac{\mathbf{Tt}}{\mathbf{MPa}}, 120.371\right) = \begin{pmatrix} -0.543 \\ -0.579 \\ 0.608 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{eigenvec}\left(\frac{\mathbf{Tt}}{\mathbf{MPa}}, -71.722\right) = \begin{pmatrix} -0.235 \\ -0.59 \\ -0.772 \end{pmatrix}$$

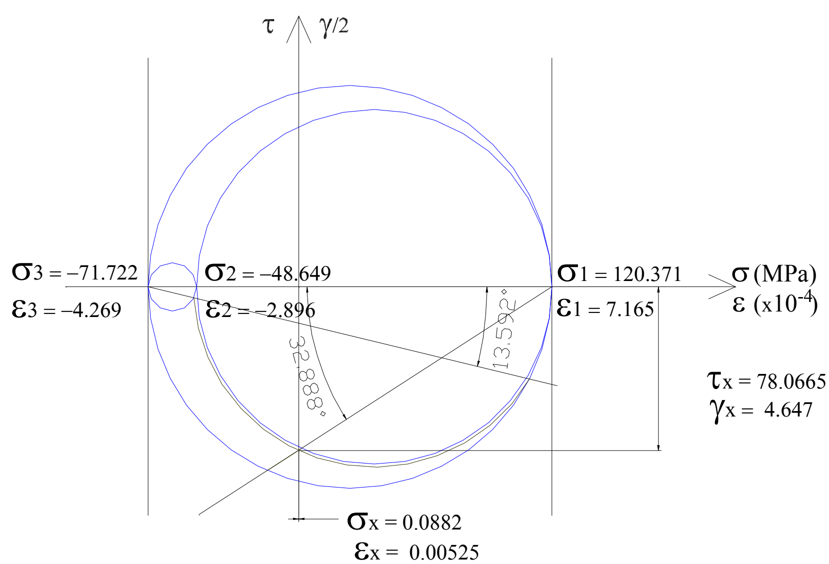
El ángulo que forma los ejes x, y, z respecto de las direcciones principales 1 y 3 son:

según **x** $\quad \mathbf{acos}(-0.543) = 122.888\cdot\mathbf{deg} \qquad \mathbf{acos}(-0.235) = 103.592\cdot\mathbf{deg}$

analíticamente $\quad \tau\mathbf{x} := \sqrt{\tau\mathbf{xy}^2 + \tau\mathbf{zx}^2} \qquad \tau\mathbf{x} = 78.102\cdot\mathbf{MPa}$

$$\gamma\mathbf{x} := \frac{\sqrt{\gamma\mathbf{xy}^2 + \gamma\mathbf{zx}^2}}{2} \qquad \gamma\mathbf{x} = 4.649\times 10^{-4}$$

graficamente

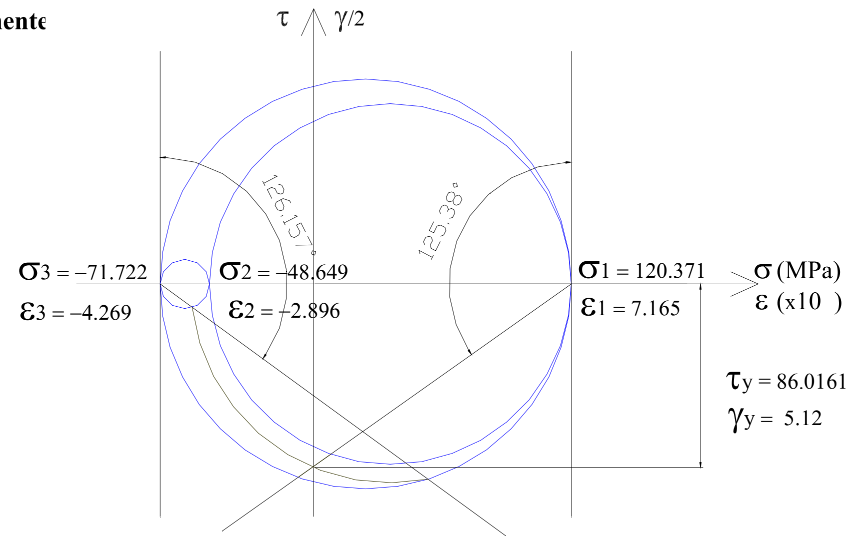


según **y** $\quad \mathbf{acos}(-0.579) = 125.38\cdot\mathbf{deg} \qquad \mathbf{acos}(-0.59) = 126.157\cdot\mathbf{deg}$

analíticamente $\quad \tau\mathbf{y} := \sqrt{\tau\mathbf{xy}^2 + \tau\mathbf{yz}^2} \qquad \tau\mathbf{y} = 86.023\cdot\mathbf{MPa}$

$$\gamma\mathbf{y} := \frac{\sqrt{\gamma\mathbf{xy}^2 + \gamma\mathbf{yz}^2}}{2} \qquad \gamma\mathbf{y} = 5.12\times 10^{-4}$$

graficamente

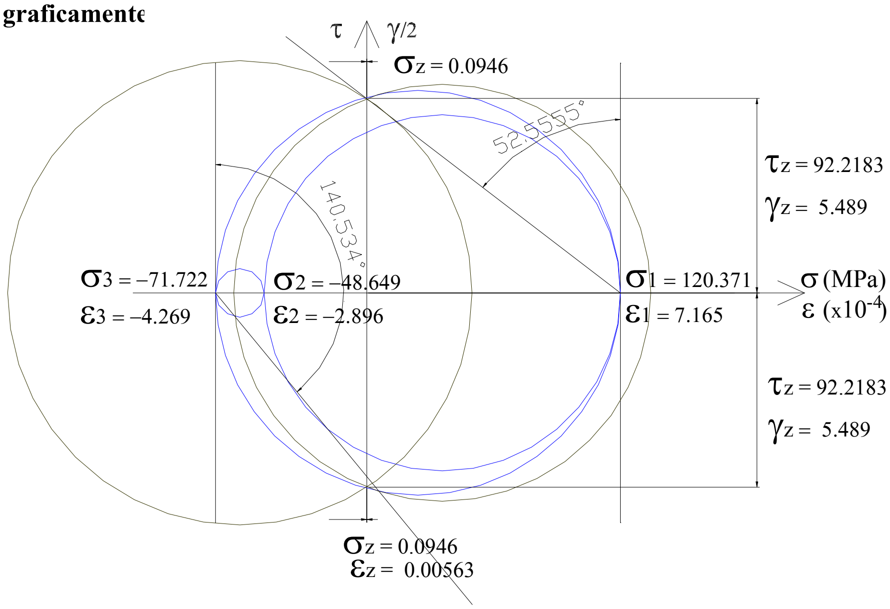


según **z** $\quad$ $\mathbf{acos}(0.608) = 52.555 \cdot \mathbf{deg}$ $\quad$ $\mathbf{acos}(-0.772) = 140.534\,\mathbf{deg}$

analíticamente $\quad$ $\tau\mathbf{z} := \sqrt{\tau\mathbf{zx}^2 + \tau\mathbf{yz}^2}$ $\quad$ $\tau\mathbf{z} = 92.195 \cdot \mathbf{MPa}$

$$\gamma\mathbf{z} := \frac{\sqrt{\gamma\mathbf{yz}^2 + \gamma\mathbf{zx}^2}}{2} \qquad \gamma\mathbf{z} = 5.488 \times 10^{-4}$$

graficamente



5. Representar en las circunferencias de deformación, idem anterior, aprovechando las de tensión.- En el cubo de deformación indicar el plano n y su vector asociado con componentes.-

Las representaciones de las circunferencias de deformaciones se realizaron conjuntamente con las de tensiones, ver graficos anteriores

6. Dibujar el cubo deformado y sin deformar.