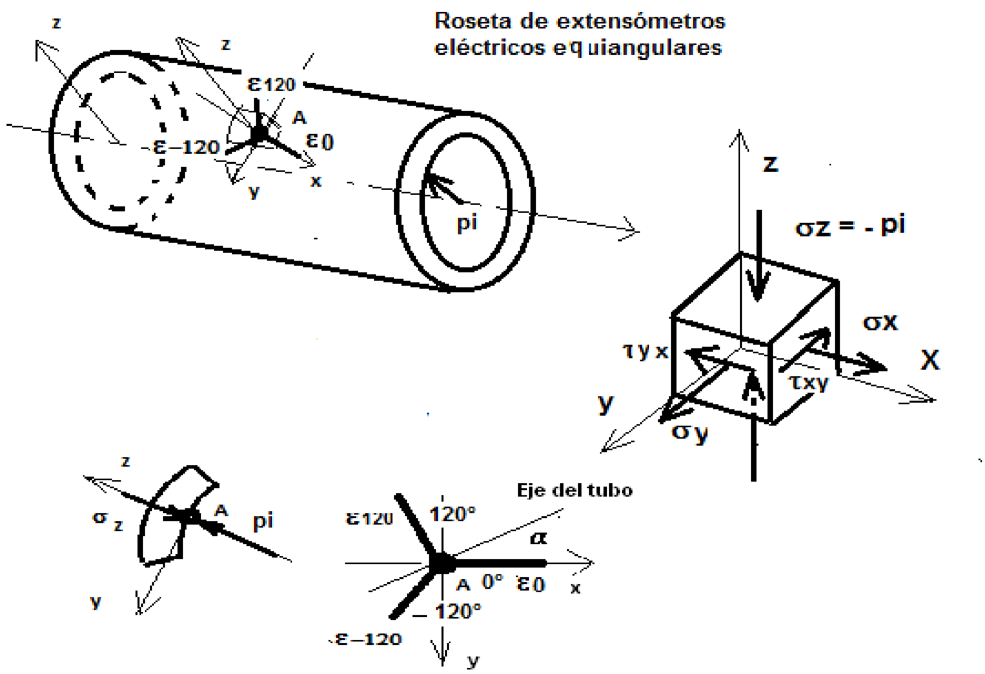
Análisis del E. de T. y de D. de un punto en la superficie interior de un tubo sometido a una presión interior pi.: Unidades homogeneas MN, m, MPa.

Se midieron tres deformaciones específicas longitudinales del lado interior del tubo con tres extensómetros eléctricos (roseta de galgas extensométricas), orientadas entre si a 120°.
Se adopta una terna con eje radial z y dos ejes xy cualquiera en el plano tangente al cilindro de la superficie interior. El eje x no tiene por que coincidir con el eje del tubo.
Se midieron las siguientes deformaciones específicas: (ver figura de análisis)



$\varepsilon 0 := 23\cdot 10^{-4}$ $\quad\varepsilon 120 := 14.5\cdot 10^{-4}$ $\quad\varepsilon\_120 := 10.3\cdot 10^{-4}$

Las constantes del material acero son: $E := 2\cdot 10^{5}$ $\quad\mu := 0.3$

$G := \dfrac{E}{2\cdot(1+\mu)}$ $\quad G = 7.692\times 10^{4}$ La presión en el tubo es: $pi := -15$

Del cubo elemental de tensiones se obtiene el Tensor de Tensiones donde se evidencian las componentes datos e incógnitas del problema según el enunciado. De igual manera se plantea el Tensor de Deformaciones donde se introducen las incógnitas y datos de nuestro problema.

En la cara interna no hay razón para que existan tensiones tangenciales, solo existe aplicada la tensión derivada de la presión interior del tubo. Consecuentemente será tensión principal y podemos expresar lo siguiente:

$\tau zx := 0$ $\quad\tau zy := 0$ $\quad\boxed{\sigma z := pi}$ (esta coincidirá con una tensión principal, el plano tangente es plano principal asociado)

$\tau xz := \tau zx$ $\quad\tau yz := \tau zy$

$\tau xy = \tau yx \neq 0$ **(No conocemos sus valores)**

Consecuentemente:

$$\gamma zx := 0 \qquad \gamma zy := 0 \qquad \gamma xy = \gamma yx \qquad \gamma xy = \frac{\tau xy}{G}$$

$$\gamma xz := \gamma zx \qquad \gamma yz := \gamma zy$$

De acuerdo con el desarrollo de los conceptos teóricos cada una de las deformaciones específicas longitudinales medidas corresponden a las proyecciones de los módulos de los vectores deformaciones específicas asociadas a cada una de las direcciones de los ejes de referencia (x,y,z):

Tensor Deformación

$$Td = \begin{pmatrix} \varepsilon x & \frac{\gamma yx}{2} & \frac{\gamma zx}{2} \\ \frac{\gamma xy}{2} & \varepsilon y & \frac{\gamma zy}{2} \\ \frac{\gamma xz}{2} & \frac{\gamma yz}{2} & \varepsilon z \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

(Versor de la dirección asociada a la deformación específica εn cuyas componentes son los cosenos directores.)

El vector deformación específica asociado a n es: $\varepsilon n = Td \cdot n$

El módulo en la ,dirección longitudinal es:

$$|\varepsilon nn| = \varepsilon n \cdot n$$ (producto escalar de los vectores εn y n) $$n := \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|\varepsilon nn| = n^T \cdot Td \cdot n}$$

$$Td := \begin{pmatrix} \varepsilon x & \frac{\gamma yx}{2} & \frac{\gamma zx}{2} \\ \frac{\gamma xy}{2} & \varepsilon y & \frac{\gamma zy}{2} \\ \frac{\gamma xz}{2} & \frac{\gamma yz}{2} & \varepsilon z \end{pmatrix} \qquad \varepsilon n := Td \cdot n \rightarrow \begin{pmatrix} l \cdot \varepsilon x + \frac{m \cdot \gamma yx}{2} \\ \frac{l \cdot \gamma xy}{2} + m \cdot \varepsilon y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon nn := n^T \cdot Td \cdot n \rightarrow l \cdot \left(l \cdot \varepsilon x + \frac{m \cdot \gamma xy}{2} \right) + m \cdot \left(\frac{l \cdot \gamma yx}{2} + m \cdot \varepsilon y \right)$$

$$\varepsilon nn = n^T \cdot Td \cdot n \qquad \varepsilon nn = \varepsilon x \cdot l^2 + \frac{(\gamma xy \cdot l \cdot m)}{2} + \frac{(\gamma yx \cdot m \cdot l)}{2} + \varepsilon y \cdot m^2$$

$$\boxed{\varepsilon nn = \varepsilon x \cdot l^2 + \gamma xy \cdot l \cdot m + \varepsilon y \cdot m^2}$$

Aplicamos tres veces esta ecuación una para cada dato de medición de las deformaciones específicas longitudinales dadas para cada dirección:

$$n0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n120 := \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n\_120 := \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon x := 0 \qquad \varepsilon y := 0 \qquad \gamma xy := 0$

Given

$\varepsilon 0 = \varepsilon x \cdot 1 \qquad \varepsilon 0 = \varepsilon x$

$$\varepsilon 120 = \varepsilon x \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \gamma xy \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon y \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

(Tres Ecuaciones con Tres Incógnitas,εx (inmediata),εy y γxy)

$$\varepsilon\_120 = \varepsilon x \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \gamma xy \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \varepsilon y \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\text{Find}(\varepsilon x, \varepsilon y, \gamma xy) = \begin{pmatrix} 2.3 \times 10^{-3} \\ 8.867 \times 10^{-4} \\ -4.85 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$\varepsilon x := 0.0023$

$\varepsilon y := 8.867 \times 10^{-4}$

$\gamma xy := -4.85 \times 10^{-4}$

$\gamma yx := \gamma xy$

Por lo tanto nuestro Tensor de Deformación sera:

$$Td := \begin{pmatrix} \varepsilon x & \frac{\gamma yx}{2} & 0 \\ \frac{\gamma xy}{2} & \varepsilon y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon z \end{pmatrix}$$

(solo desconocemos εz)

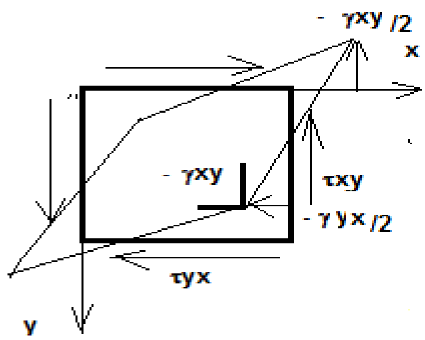
El Tensor de Tensiones será: siendo σz=pi y γxy= -4.85×10^{-4}

$$Tt := \begin{pmatrix} \sigma x & \tau yx & \tau zx \\ \tau xy & \sigma y & \tau zy \\ \tau xz & \tau yz & \sigma z \end{pmatrix} \qquad Tt := \begin{pmatrix} \sigma x & \tau yx & 0 \\ \tau xy & \sigma y & 0 \\ 0 & 0 & pi \end{pmatrix} \qquad Tt := \begin{pmatrix} \sigma x & \gamma xy \cdot G & 0 \\ \tau xy \cdot G & \sigma y & 0 \\ 0 & 0 & pi \end{pmatrix}$$

$\tau xy := \gamma xy \cdot G \qquad \tau xy = -37.308 \qquad \sigma z = -15$

(solo desconocemos en Tt: σx y σy)

Distorsión asociada a las τxy



Consecuentemente, de la relación entre los tensores Tensión y Deformación (Ley de Hooke Generalizada), obtenemos un sistema de tres ecuaciones con las tres únicas incógnitas que resultan del planteo σx,σy,εz sera:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon x \\ \varepsilon y \\ \sigma z \\ \gamma xy \\ \gamma yz \\ \gamma zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau xy}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\tau yz}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\tau zx}{G} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma x \\ \sigma y \\ \sigma z \\ \tau xy \\ \tau yz \\ \tau zx \end{pmatrix}$$

De estas relaciones obtenemos el siguiente sistema: **(De incognitas σx,σy,εz)**

$$\sigma x := 0 \quad \sigma y := 0 \quad \varepsilon z := 0$$

Given

$$\varepsilon x = \frac{\sigma x}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma y}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma z}{E}$$

$$\varepsilon y = \frac{\sigma y}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma z}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma x}{E}$$

$$\varepsilon z = \frac{\sigma z}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma x}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma y}{E}$$

$$v0 := \begin{pmatrix} \sigma x \\ \sigma y \\ \varepsilon z \end{pmatrix} \qquad v0 := \mathrm{Find}(\sigma x, \sigma y, \varepsilon z) = \begin{pmatrix} 557.53 \\ 340.099 \\ -1.421 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\sigma x := 557.53 \qquad \sigma y := 340.099 \qquad \varepsilon z := -1.421 \times 10^{-3}$$

(ver figura de análisis)

Cálculo de las Deformaciones Específicas Longitudinales Principales y las Tensiones Principales con sus direcciones asociadas:

Sabemos que los vectores representativos de las direcciones principales en tensiones y deformaciones específicas son los mismos, por lo tanto los podemos obtener indistintamente por el análisis de tensiones principales o de deformaciones específicas principales.

$$Td := \begin{pmatrix} \varepsilon x & \frac{\gamma xy}{2} & 0 \\ \frac{\gamma xy}{2} & \varepsilon y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon z \end{pmatrix} \qquad Td = \begin{pmatrix} 2.3\times 10^{-3} & -2.425\times 10^{-4} & 0 \\ -2.425\times 10^{-4} & 8.867\times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -1.421\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$Tt := \begin{pmatrix} \sigma x & \tau xy & 0 \\ \tau xy & \sigma y & 0 \\ 0 & 0 & pi \end{pmatrix} \qquad Tt = \begin{pmatrix} 557.53 & -37.308 & 0 \\ -37.308 & 340.099 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \qquad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho n = Tt\cdot n \qquad \varepsilon n = Td\cdot n$$

$$\sigma i\cdot n = Tt\cdot n = \sigma i\cdot n\cdot I \qquad \varepsilon i\cdot n = Td\cdot n = \varepsilon i\cdot n\cdot I$$

$$Tt\cdot n - \sigma i\cdot n\cdot I = 0 \qquad Td\cdot n - \varepsilon i\cdot n\cdot I = 0$$

$$(Tt - \sigma i\cdot I)\cdot n \qquad (Td - \varepsilon i\cdot I)\cdot n$$

Como Autovalores y autovectores:

$$\text{eigenvals}(Tt) = \begin{pmatrix} 563.753 \\ 333.876 \\ -15 \end{pmatrix} \qquad \text{eigenvecs}(Tt) = \begin{pmatrix} 0.986 & 0.165 & 0 \\ -0.165 & 0.986 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(Td) = \begin{pmatrix} 2.34\times 10^{-3} \\ 8.462\times 10^{-4} \\ -1.421\times 10^{-3} \end{pmatrix} \qquad \text{eigenvecs}(Td) = \begin{pmatrix} 0.986 & 0.165 & 0 \\ -0.165 & 0.986 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma 1 := 563.753 \qquad \sigma 2 := 333.876 \qquad \sigma 3 := -15 \qquad \sigma 3 = pi$$

$$\varepsilon 1 := 2.34\times 10^{-3} \qquad \varepsilon 2 := 8.462\times 10^{-4} \qquad \varepsilon 3 := -1.421\times 10^{-3} \qquad \varepsilon 3 = \varepsilon z$$

Otra forma es resolviendo la ecuación polinómica de Lagrange, de la nulidad del determinante de la matriz de Tt:

$$Tt := \begin{pmatrix} 557.53 - \sigma i & -37.308 & 0 \\ -37.308 & 340.099 - \sigma i & 0 \\ 0 & 0 & -15 - \sigma i \end{pmatrix}$$

$$|Tt| \rightarrow 882.629 \cdot \sigma i^2 - 1.0 \cdot \sigma i^3 - 174759.073606 \cdot \sigma i - 2.82335262909e6$$

$$p(\sigma i) := 882.629 \cdot \sigma i^2 - 1.0 \cdot \sigma i^3 - 174759.073606 \cdot \sigma i - 2.82335262909e6$$

$$v := p(\sigma i) \text{ coeffs } \rightarrow \begin{pmatrix} -2.82335262909e6 \\ -174759.073606 \\ 882.629 \\ -1.0 \end{pmatrix}$$

$$r := \text{polyroots}(v)$$

$$\boxed{r^T = (-15 \quad 333.876 \quad 563.753)}$$

$$Td := \begin{pmatrix} 2.3 \times 10^{-3} - \varepsilon i & -2.425 \times 10^{-4} & 0 \\ -2.425 \times 10^{-4} & 8.867 \times 10^{-4} - \varepsilon i & 0 \\ 0 & 0 & -1.421 \times 10^{-3} - \varepsilon i \end{pmatrix}$$

$$|Td| \rightarrow 0.0017657 \cdot \varepsilon i^2 - 1.0 \cdot \varepsilon i^3 + 0.00000254769695 \cdot \varepsilon i - 2.81443792875e\text{-}9$$

$$p(\varepsilon i) := 0.0017657 \cdot \varepsilon i^2 - 1.0 \cdot \varepsilon i^3 + 0.00000254769695 \cdot \varepsilon i - 2.81443792875e\text{-}9$$

$$v := p(\varepsilon i) \text{ coeffs } \rightarrow \begin{pmatrix} -2.81443792875e\text{-}9 \\ 0.00000254769695 \\ 0.0017657 \\ -1.0 \end{pmatrix}$$

$$r := \text{polyroots}(v)$$

$$\boxed{r^T = \left(-1.421 \times 10^{-3} \quad 8.462 \times 10^{-4} \quad 2.34 \times 10^{-3}\right)}$$

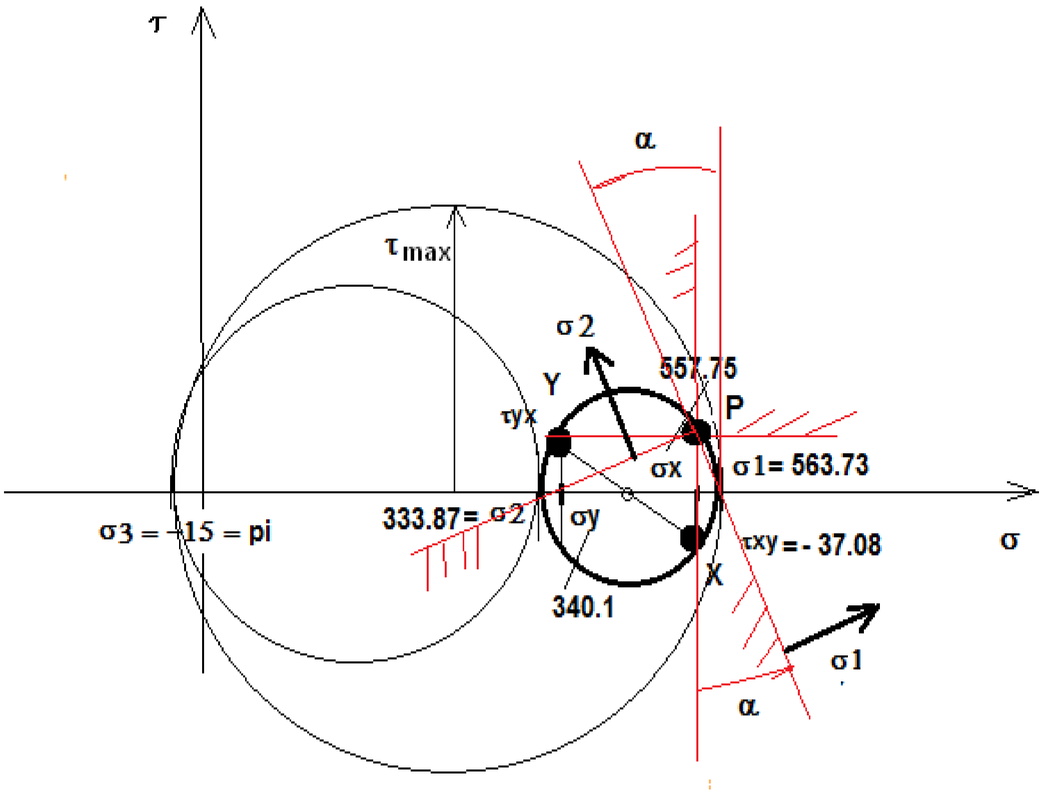
Cálculo analítico de los ángulos de los planos principales respecto del eje de referencia x del cubo elemental

$$\tan\left(2\cdot\alpha\cdot\frac{\pi}{180}\right) := \frac{(2\cdot\tau xy)}{\sigma x - \sigma y} \qquad \alpha := \frac{1}{2}\cdot \operatorname{atan}\left[\frac{(2\cdot\tau xy)}{\sigma x - \sigma y}\right]\cdot\frac{180}{\pi} = -9.47$$

$\alpha = -9.47$ y $\alpha = -99.47$

<u>Gráfico de la Circunferencia de Mohr de Tensiones del problema analizado para el haz de planos de eje sosten z =3:</u>

Se evidencian las Trazas de los planos X,Y y los principales de σ1 y σ2



<u>Cálculo de la Máxima Tensión tangencial:</u>

$$\tau max := \frac{(\sigma 1 - \sigma 3)}{2} \qquad \tau max = 289.377$$

(Esta se encuentra en plano de eje sosten 2)

- Los planos principales serán aquellos cuyas normales coincidan con, el eje del tubo (sección transversal del tubo), el eje radial perpendicular (plano tangencial a la superficie lateral interna y/o externa) y el eje perpendicular a ambos (plano de corte longitudinal radial del tubo).Estos se obtienen girando los ejes el ángulo α.