

The main body of the page is a large grid of graph paper. The grid lines are faint and the paper shows signs of age, including some brownish stains and discoloration. There are some very faint, illegible markings scattered across the grid, but no clear text or data is visible.

NOTA

1) → Ecuaciones de Equilibrio: 'EE':

EE GLOBAL: $M_{xA} + M_{xB} + M_T = 0$ (1)

EE PARCIAL: $M_{xA} = M_{xA1} + M_{xA2}$ (2a)

$M_{xB} = M_{xB1} + M_{xB2}$ (2b)

2) → Ecuaciones de Desplazamiento:

$\phi_{BA} = \phi_B - \phi_A = 0$ (3)

$\phi_{CA} = \phi_C - \phi_A = \phi_C - 0 = \phi_C$ (4a)

$\phi_{BC} = \phi_B - \phi_C = 0 - \phi_C = -\phi_C$ (4b)

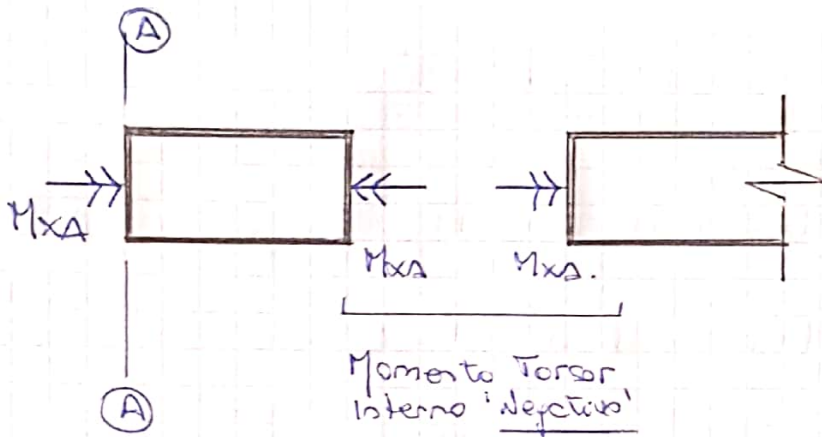
3) → Compatibilidad de Desplazamiento Interno:

Para toda la longitud de la pieza, vale:

$$\phi(x) = \underbrace{\phi_1(x)}_{\substack{\text{Angulo de} \\ \text{Torsión de} \\ \text{la Pieza (1)}}} = \underbrace{\phi_2(x)}_{\substack{\text{Angulo de} \\ \text{Torsión de} \\ \text{la Pieza (2)}}} \quad (5)$$

Para el trazo 'a' o trazado de la pieza (ver FIG. 3), y en función de la forma de ambos ejes sujeta su torsión:

3a) → Trata 'a' o Parte Izquierda:



ANÁLISIS RECONIENDO
LA ESTRUCTURA DE
IZQUIERDA A DERECHA

Momento Torsor
Interno 'negativo'

$$M_x(x) < 0 \text{ válido por } 0 \leq x \leq a$$

$$\rightarrow \phi(x) < 0.$$

Luzes:

$$\phi_{c,12a} = \phi_{c,12a,1} = \phi_{c,12a,2} \quad (6)$$

Donde:

$$\phi_{c,12a,1} = - \frac{M_{xA1} \cdot a}{G_1 \cdot J_{P1}} \quad (7a)$$

$$\phi_{c,12a,2} = - \frac{M_{xA2} \cdot a}{G_2 \cdot J_{P2}} \quad (7b)$$

Nota 01:

EL SIGNO (-) TIENE QUE VER CON QUE SI AL CONSIDERAR $M_{xA} > 0 \rightarrow$ PROVOCA ESTIRAMIENTOS INTERNOS $M_x(x) < 0$ Y POR LO TANTO $\rightarrow \phi(x) < 0$.

ENTONCES SI LOS MOMENTOS EXTREMOS (REACCIÓN EN EL APOYO 'A') SE INTRODUCEN CON SU SIGNO, LAS EXPRESIONES (7) DEBEN ESTAR PRECEDIDAS DEL SIGNO (-).

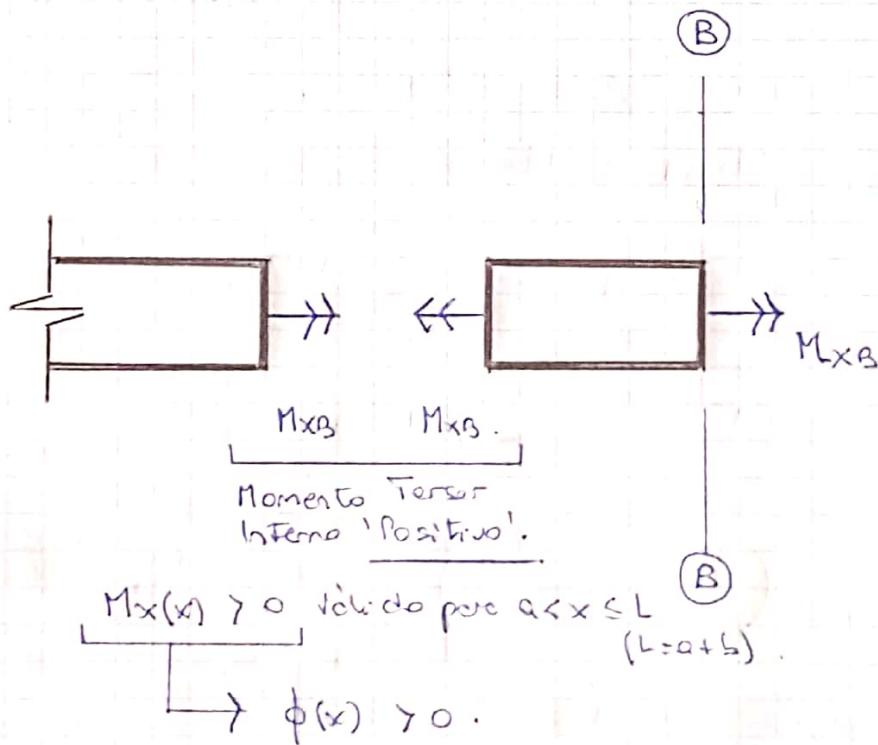
REEMPLAZANDO LAS (7a) Y (7b) EN LA (6) NOS OBTENEMOS:

$$\rightarrow \frac{M_{XA1} \cdot \alpha}{G_1 \cdot J_{P1}} = \rightarrow \frac{M_{XA2} \cdot \alpha}{G_2 \cdot J_{P2}}$$

$$M_{XA2} = \frac{G_2 \cdot J_{P2}}{G_1 \cdot J_{P1}} \cdot M_{XA1} \quad (8)$$

3b) \rightarrow TRAMO 'b' O PARTE DERECHA:

ANÁLISIS RESOLVIENDO LA ESTRUCTURA DE DERECHA A IZQUIERDA:



límite:

$$\phi_{c,der,1} = \phi_{c,der,1} = \phi_{c,der,2} \quad (9)$$

donde:

$$\phi_{c,der,1} = + \frac{M_{XB1} \cdot b}{G_1 \cdot J_{P1}} \quad (10a)$$

$$\phi_{e,DIR,2} = + \frac{M_{XB2} \cdot b}{G_2 \cdot J_{P2}} \quad (10b)$$

NOTA 02:

ESERNO NOTA 01, PERO CON $M_{XB} > 0$.

REEMPLAZANDO (10a) y (10b) en (9), nos queda:

$$\frac{M_{XB1} \cdot b}{G_1 \cdot J_{P1}} = \frac{M_{XB2} \cdot b}{G_2 \cdot J_{P2}}$$

$$M_{XB2} = \frac{G_2 \cdot J_{P2}}{G_1 \cdot J_{P1}} \cdot M_{XB1} \quad (11)$$

REEMPLAZANDO LA (8) en la (2a):

$$M_{XA} = M_{XA1} + M_{XA2}$$

$$M_{XA} = M_{XA1} + \frac{G_2 \cdot J_{P2}}{G_1 \cdot J_{P1}} \cdot M_{XA1}$$

$$M_{XA} = \left(1 + \frac{G_2 \cdot J_{P2}}{G_1 \cdot J_{P1}} \right) M_{XA1}$$

$$M_{XA} = \left(\frac{G_1 \cdot J_{P1} + G_2 \cdot J_{P2}}{G_1 \cdot J_{P1}} \right) \cdot M_{XA1} = K_1 \cdot M_{XA1} \quad (12)$$

y REEMPLAZANDO LA (11) en LA (2b):

$$M_{XB} = M_{XB1} + M_{XB2}$$

$$M_{XB} = M_{XB1} + \frac{G_2 \cdot J_{P2}}{G_1 \cdot J_{P1}} M_{XB1} = \left(1 + \frac{G_2 \cdot J_{P2}}{G_1 \cdot J_{P1}} \right) M_{XB1}$$

$$M_{XB} = \left(\frac{G_1 \cdot J_{P1} + G_2 \cdot J_{P2}}{G_1 \cdot J_{P1}} \right) \cdot M_{XB1} = K_1 \cdot M_{XB1} \quad (13)$$

4) → COMPATIBILIDAD DE DESPLAZAMIENTOS:

Para cada sección, el ángulo de torsión visto desde la izquierda o desde la derecha, debe ser el mismo, es decir, el cálculo de $\phi(x)$ debe dar el mismo valor y el mismo sentido de giro.

De acuerdo a las convenciones y planteos previos, en función de los ejes expresados a través de M_{xA} , M_{xA1} , M_{xA2} , M_{xB} , M_{xB1} y M_{xB2} , se observa que si la barra es recorrida de izquierda a derecha, los giros son negativos, mientras que si es recorrida de derecha a izquierda son positivos.

Por lo tanto, como deben ser iguales, la compatibilidad queda expresada de la siguiente manera:

$$\phi_{C,izq} = -\phi_{C,der} \quad (14a)$$

$$\phi_{C,izq,1} = -\phi_{C,der,1} \quad (14b)$$

$$\phi_{C,izq,2} = -\phi_{C,der,2} \quad (14c)$$

Las cuales por (5) se pueden expresar:

$$\phi_{C,izq} = \phi_{C,izq,1} = \phi_{C,izq,2} = -\phi_{C,der} = -\phi_{C,der,1} = -\phi_{C,der,2} \quad (15)$$

La (15) expresada para el material (1) queda:

$$\phi_{c,12a,1} = -\phi_{c,2a,1}$$

$$-\frac{M_{x\Delta 1} \cdot a}{G_1 \cdot J_{\phi 1}} = -\frac{M_{x\beta 1} \cdot b}{G_1 \cdot J_{\phi 1}}$$

$$\underline{M_{x\beta 1} = \frac{a}{b} M_{x\Delta 1}} \quad (16a)$$

La (15) expresada para el material (2) queda:

$$\phi_{c,12a,2} = -\phi_{c,2a,2}$$

$$-\frac{M_{x\Delta 2} \cdot a}{G_2 \cdot J_{\phi 2}} = -\frac{M_{x\beta 2} \cdot b}{G_2 \cdot J_{\phi 2}}$$

$$\underline{M_{x\beta 2} = \frac{a}{b} M_{x\Delta 2}} \quad (16b)$$

Finalmente, y teniendo en cuenta las (1), (12), (13) y (16a) y (16b) se tiene:

$$M_{x\alpha} + M_{x\beta} + M_T = 0 \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_{x\alpha} &= K_1 \cdot M_{x\Delta 1} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_{x\beta} &= K_1 \cdot M_{x\beta 1} = \frac{a}{b} \cdot K_1 \cdot M_{x\Delta 1} \end{aligned} \right. \quad (13) \quad (16a)$$

$$K_1 \cdot M_{x\Delta 1} + \frac{a}{b} K_1 M_{x\Delta 1} + M_T = 0 \quad (17)$$

$$\left(K_1 + \frac{a}{b} K_1 \right) M_{XA1} + M_T = 0.$$

$$\left(\frac{a+b}{b} \right) \cdot K_1 \cdot M_{XA1} + M_T = 0.$$

$$M_{XA1} = - \left(\frac{b}{a+b} \right) \cdot \frac{M_T}{K_1} = - \frac{b}{L} \frac{M_T}{K_1} \quad (18)$$

lo que también se puede expresar como

$$M_{XA1} = - \frac{b}{L} \cdot \frac{G_1 J_{p1}}{G_1 J_{p1} + G_2 J_{p2}} M_T \quad (19)$$

Calculando M_{XA1} , luego se podrá determinar:

→ M_{XA2} a través de (8)

→ M_{XA} ' ' ' (12)

→ M_{XB1} ' ' ' (10a)

→ M_{XB2} ' ' ' (11)

→ M_{XB} ' ' ' (13)

y todos los ángulos de torsión, tensiones y ángulos específicos de torsión para toda la longitud de la estructura.

S) → EJEMPLO NUMÉRICO :

• DATOS:

$M_T = - 8 \text{ kNm.}$

$a = 1 \text{ cm}$

$b = 2.00 \text{ m.}$

$D = 75 \text{ mm}$

$d = 50 \text{ mm.}$

• MATERIAL ① ≡ ALUMINIO

$$E_{AL} = E_1 = \left. \begin{array}{l} 28000 \text{ MPa} \\ (= 28000 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}) \end{array} \right\}$$

$$\sigma_{ADM}_{AL} = \sigma_{ADM}_1 = \left. \begin{array}{l} 100 \text{ MPa} \\ 10 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2} \end{array} \right\}$$

MATERIAL 2 ≡ BRONCE.

$$E_{BR} = E_2 = \left. \begin{array}{l} 36000 \text{ MPa} \\ 3600 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2} \end{array} \right\}$$

$$\sigma_{ADM}_{BR} = \sigma_{ADM}_2 = \left. \begin{array}{l} 40 \text{ MPa} \\ 4 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2} \end{array} \right\}$$

• CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS:

↳ MATERIAL ① ≡ ALUMINIO:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (7.5^2 - 5^2) = 24.54 \text{ cm}^2$$

$$J_{P1} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} (7.5^4 - 5^4) = 249.27 \text{ cm}^4$$

↳ MATERIAL (2) = BRONCE

$$A_2 = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 = 19,63 \text{ cm}^2$$

$$J_{p2} = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} \cdot 5^4 = 61,36 \text{ cm}^4$$

↳ CONSTANTE K₁:

$$K_1 = \frac{G_1 J_{p1} + G_2 J_{p2}}{G_1 J_{p1}} = \frac{2800 \cdot 249,27 + 3600 \cdot 61,36}{2800 \cdot 249,27}$$

$$\underline{K_1 = 1,3165}$$

• DETERMINACIÓN DE REACCIONES DE VINCULO Y DEFLEXIONES:

$$M_{xA1} = -\frac{b}{a+b} \cdot \frac{M_T}{K_1} = -\frac{2\text{m}}{1\text{m}+2\text{m}} \cdot \frac{(-8\text{kJm})}{1,3165} = \underline{\underline{+4,051\text{kJm}}}$$

$$M_{xA2} = \frac{G_2 J_{p2}}{G_1 J_{p1}} \cdot M_{xA1} = \frac{3600 \cdot 61,36}{2800 \cdot 249,27} \cdot 4,051 = \underline{\underline{+1,282\text{kJm}}}$$

$$M_{xA} = M_{xA1} + M_{xA2} = 4,051 + 1,282 = \underline{\underline{+5,333\text{kJm}}}$$

$$M_{xB1} = \frac{a}{b} M_{xA1} = \frac{1}{2} \cdot 4,051 = \underline{\underline{+2,0255\text{kJm}}}$$

$$M_{xB2} = \frac{a}{b} M_{xB1} = \frac{1}{2} \cdot 1,282 = \underline{\underline{+0,641\text{kJm}}}$$

$$M_{xB} = M_{xB1} + M_{xB2} = 2,0255 + 0,641 = \underline{\underline{+2,6665\text{kJm}}}$$

• DIAGRAMA DE ESFUERZOS INTERNOS:

para $0 \leq x \leq a$:

$$M_{x1}^a(x) = -M_{xA1} = -(+4,051) = -4,051 \text{ kNm}$$

$$M_{x2}^a(x) = -M_{xA2} = -(+1,282) = -1,282 \text{ kNm}$$

$$M_x^a(x) = -M_{xA} = -(+5,333) = -5,333 \text{ kNm}$$

para $a \leq x \leq a+b$:

$$M_{x1}^b(x) = + (M_{xB1}) = +2,026 \text{ kNm}$$

$$M_{x2}^b(x) = + (M_{xB2}) = +0,641 \text{ kNm}$$

$$M_x^b(x) = - (M_{xA} + M_T) = - [5,333 + (-8)] = +2,667 \text{ kNm}$$

• TENSIONES TANGENCIALES MÁXIMAS:

$$\tau_{max,1}^a = \frac{M_{x1}^a}{J_{p1}} \cdot R_1 = \frac{-4,051 \text{ kNm}}{249,27 \text{ cm}^4} \cdot 3,75 \text{ cm} = -6,094 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \checkmark$$

$$\tau_{min,1}^a = \frac{M_{x1}^a}{J_{p1}} \cdot r_1 = \frac{-4,051}{249,27} \cdot 2,5 = -4,063 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \checkmark$$

$$\tau_{max,2}^a = \frac{M_{x2}^a}{J_{p2}} \cdot r_1 = \frac{-1,282}{61,36} \cdot 2,5 = -5,223 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \times$$

$$\tau_{max,1}^b = \frac{M_{x1}^b}{J_{p1}} \cdot R_1 = \frac{+2,026 \cdot 3,75}{249,27} = +3,048 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \checkmark$$

$$\tau_{min,1}^b = \frac{M_{x1}^b}{J_{p1}} \cdot r_1 = \frac{2,026 \cdot 2,5}{249,27} = +2,032 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \checkmark$$

$$\tau_{\max, 2}^b = \frac{M_{x2}^b}{J_{p2}} r_1 = \frac{0,641 \cdot 2,5}{61,36} = + 2,612 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad \checkmark$$

• ÁNGULOS ABSOLUTOS O GIROS ABSOLUTOS DE TORSIÓN:

$$\phi_1^a(x) = \int_0^a \frac{M_{x1}^a(x)}{J_{p1} G_1} dx = \frac{M_{x1}^a}{J_{p1} G_1} \cdot x$$

$$\phi_1^a(x=a) = \frac{M_{x1}^a \cdot a}{J_{p1} \cdot G_1} = \frac{-4,051 \cdot 1}{249,27 \cdot 2800} = \underline{\underline{-0,058 \text{ rad.}}}$$

$$\phi_2^a(x) = \int_0^a \frac{M_{x2}^a(x)}{J_{p2} G_2} dx = \frac{M_{x2}^a}{J_{p2} G_2} \cdot x$$

$$\phi_2^a(x=a) = \frac{M_{x2}^a \cdot a}{J_{p2} G_2} = \frac{-1,282 \cdot 1}{61,36 \cdot 3600} = \underline{\underline{-0,058 \text{ rad.}}}$$

$$\phi_1^b(x) = \phi_1^a(a) + \int_a^{a+b} \frac{M_{x1}^b}{J_{p1} G_1} \cdot dx = \phi_1^a(a) + \frac{M_{x1}^b}{J_{p1} G_1} \cdot x$$

$$\phi_1^b(x=a+b) = \phi_1^a(a) + \frac{M_{x1}^b \cdot b}{J_{p1} G_1} = -0,058 + \frac{2,026 \cdot 2}{249,27 \cdot 2800}$$

$$\phi_1^b(x=a+b) = -0,058 + 0,058 = \underline{\underline{0 \text{ rad.}}}$$

$$\phi_2^b(x) = \phi_2^a(a) + \int_a^{a+b} \frac{M_{x2}^b}{J_{p2} G_2} \cdot dx = \phi_2^a(a) + \frac{M_{x2}^b}{J_{p2} G_2} \cdot x$$

$$\phi_2^b(x=a+b) = \phi_2^a(a) + \frac{M_{x2}^b \cdot b}{J_{p2} G_2} = -0,058 + \frac{0,641 \cdot 2}{61,36 \cdot 3600}$$

$$\phi_2^b(x=a+b) = -0,058 + 0,058 = \underline{\underline{0 \text{ rad.}}}$$

• ANGELOS ESPECÍFICAS DE TORSIÓN:

$$\alpha_1^a(x) = \frac{d\phi_1^a(x)}{dx} = \frac{M_{x1}^a}{J_{P1} G_1} = \frac{-4,047}{249,27 \cdot 2800} = \underline{\underline{-5,80 \cdot 10^{-4}}}$$

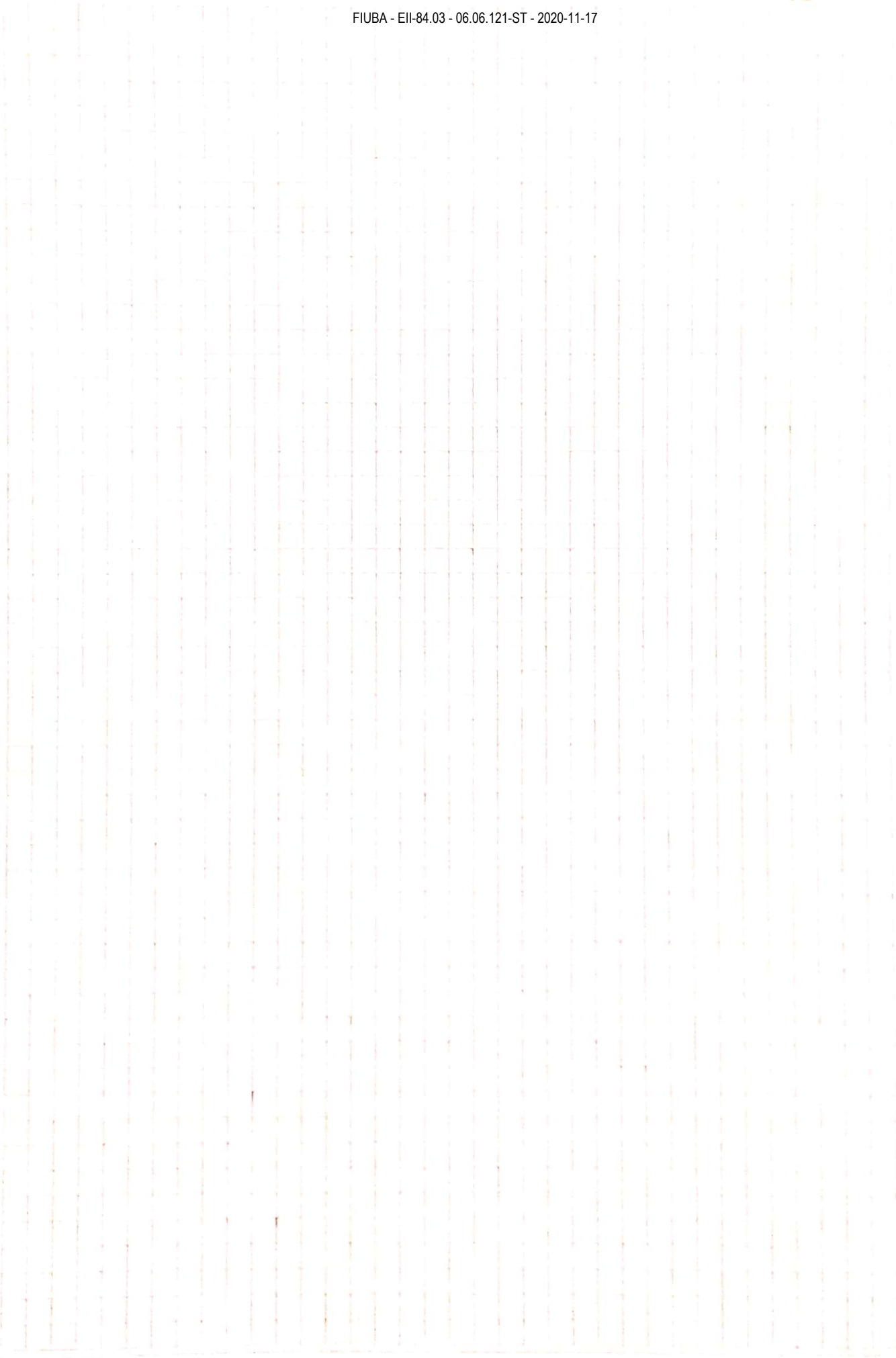
$$\alpha_2^a(x) = \frac{d\phi_2^a(x)}{dx} = \frac{M_{x2}^a}{J_{P2} G_2} = \frac{-1,282}{61,36 \cdot 3600} = \underline{\underline{-5,80 \cdot 10^{-4}}}$$

$$\alpha_1^b(x) = \frac{d\phi_1^b(x)}{dx} = \frac{M_{x1}^b}{J_{P1} G_1} = \frac{2,026}{249,27 \cdot 2800} = \underline{\underline{+2,90 \cdot 10^{-4}}}$$

$$\alpha_2^b(x) = \frac{d\phi_2^b(x)}{dx} = \frac{M_{x2}^b}{J_{P2} G_2} = \frac{0,641}{61,36 \cdot 3600} = \underline{\underline{+2,90 \cdot 10^{-4}}}$$

• NOTAS:

I) → SE OBSERVA QUE LAS TENSIONES DEL MATERIAL (2), EN EL MATERIAL DE BRONCE, SON MAYORES QUE LAS OBSERVADAS EN EL MATERIAL 'a' O EL MATERIAL.



NOTA

4.051



$M[x_1(x)]$
[kN.m]

2.026

+

1.282



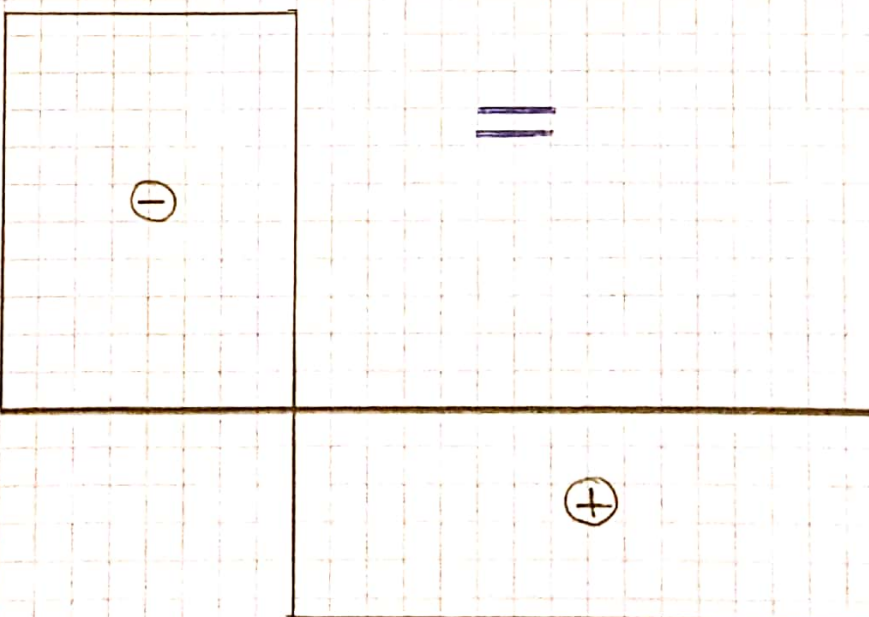
$M[x_2(x)]$

0.641

[kN.m]

=

5.333



$M[x(x)]$

[kN.m]

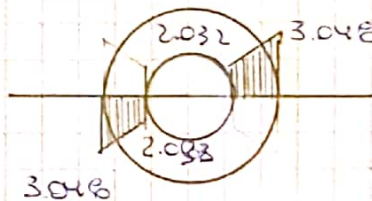
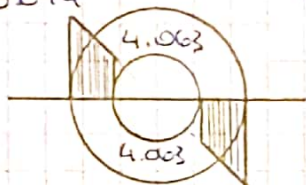
2.667

6.094



$$\frac{\tau_{max,1}}{[\tau]_{acc,2}}$$

6.094



3.048.

3.048.

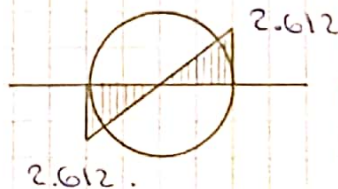
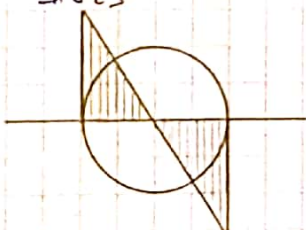
3.048

5.223



$$\frac{\tau_{max,2}}{[\tau]_{acc,2}}$$

5.223



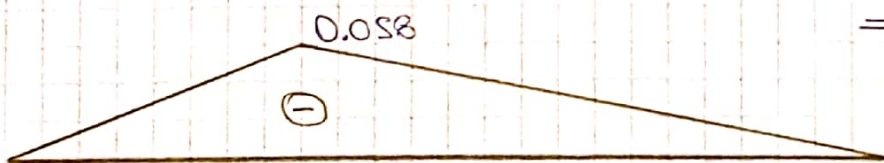
2.612

2.612

2.612.

5.223

$$\frac{\phi(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)}{[\text{red}]}$$



$-5.80 \cdot 10^{-4}$



$$\frac{\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x)}{}$$

$+2.90 \cdot 10^{-4}$