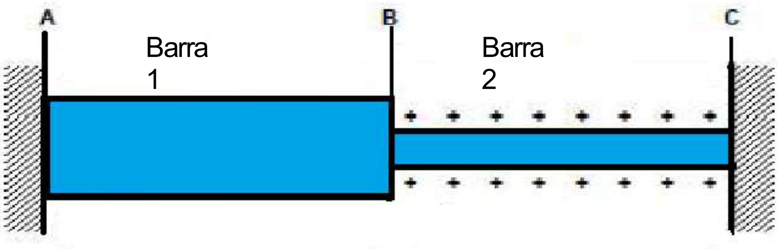
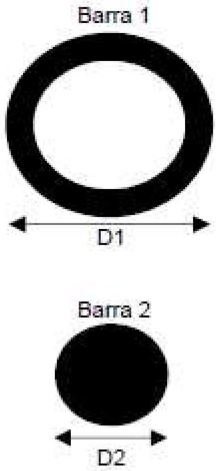
Para la estructura de la figura, la cuál está sometida a una variación de temperatura, se pide:

a) Cálculo de los esfuerzos en las barras 1 y 2, y las tensiones en cada una
b) Corrimiento horizontal de los puntos A, B y C
c) ¿Verifican las secciones? Justifique





Datos:

$L_1 := 1\text{m}$ $\qquad$ $L_2 := 1\text{m}$

$E_1 := 7\text{GPa}$ $\qquad$ $E_2 := 10\text{GPa}$

$D_1 := 60\text{mm}$ $\qquad$ $D_2 := 20\text{mm}$

$e_1 := 10\text{mm}$ $\qquad$ $\Delta T := 30$

$\alpha_1 := 1\cdot 10^{-5}$ $\qquad$ $\alpha_2 := 1\cdot 10^{-5}$

$\sigma_{f1} := 12\dfrac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ $\qquad$ $\sigma_{f2} := 16\cdot\dfrac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

$CS_1 := 1.4$ $\qquad$ $CS_2 := 1.4$

$A_1 := \dfrac{\pi}{4}\cdot\left[D_1^{\,2} - \left(D_1 - 2e_1\right)^2\right]$ $\qquad$ $A_2 := \dfrac{\pi}{4}\cdot D_2^{\,2}$

$A_1 = 15.708\cdot\text{cm}^2$ $\qquad$ $A_2 = 3.142\cdot\text{cm}^2$

Este ejercicio es de solicitación axil donde la causa deformante es una variación de temperatura. Como nos encontramos en régimen lineal y elástico se cumplen las 3 hipótesis principales:

- Hipótesis de linealidad estática: Se calculan las solicitaciones en la posición sin deformar (son independientes de la deformación de la estructura)

- Hipótesis de linealidad cinemática: Los desplazamientos son muy pequeños, esto a fines prácticos implica que $\theta=\text{sen}\theta=\text{tg}\theta$ y que $\varepsilon=\Delta L/L_o$

-Hipótesis de linealidad mecánica: Se cumple la Ley de Hooke, que establece que las tensiones varían linealmente con las deformaciones —>$\sigma=E.\varepsilon$

Además se trabaja en toda la materia con Materiales isótopos y homogéneos y la Hipótesis de Hipótesis. Además por ser solicitación axil se cumple la hipótesis de hipótesis que indica que las secciones se mantienen planas y paralelas luego de la deformación

Causa deformante: Variación de Temperatura

Para calcular las deformaciones provocadas por una variación de la temperatura sabemos que:

$\varepsilon_{\Delta T} = \alpha \cdot \Delta T$, siendo α:coeficiente de dilatación térmica. Por lo que $\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L_0$

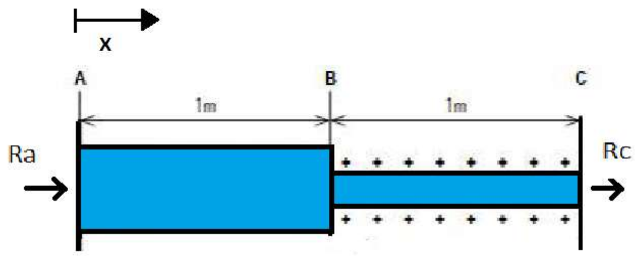
Cuando se trata de sistemas isoestáticos se generan deformaciones sin generar esfuerzos internos. En sistemas hiperestáticos debido a la compatibilidad entre los elementos de la estructura, al generar deformaciones se producen esfuerzos en las barras. Es por esto que se deben poner condiciones de deformabilidad para poder resolverlos.

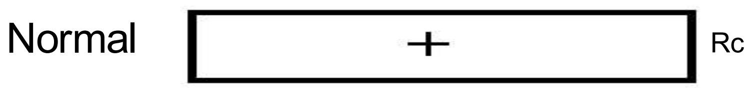
Para resolver éste ejercicio tenemos dos métodos para hacerlo:
- Por ecuaciones de compatibilidad
- Utilizando el Método de las Incógnitas Estáticas

Compatibilidad

Como las ecuaciones de equilibrio vistas en Estabilidad 1 dejan un sistema de ecuaciones indeterminado es necesario agregar otras que pongan de manifiesto las condiciones de desplazamientos de la estructura.
En este caso, solo hay esfuerzos axiles, sabemos que tanto el corte como el momento son nulos, por lo tanto las únicas incógnitas son las reacciones normales en ambos empotramientos.

Por ecuaciones de equilibrio sabemos que: ΣFx=0 –> **Ra+Rc=0**





Por otro lado, sabemos que tanto el punto A como el punto C no se desplazan, ya que el empotramiento restringe todo movimiento.

Entonces: $\Delta L_2 + \Delta L_1 = 0$

Estos desplazamientos van a estar compuestos por los desplazamientos debido al esfuerzo normal y a los desplazamientos debido a la variación de temperatura.

Los desplazamientos totales se calculan como: $\Delta L = \frac{N}{E \cdot A} \cdot L + \alpha \cdot \Delta T \cdot L$

En nuestro caso: $\Delta L_1 = \frac{Rc}{E_1 \cdot A_1} \cdot L_1$ $\qquad \Delta L_2 = \frac{Rc}{E_2 \cdot A_2} \cdot L_2 + \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2$

Como $\Delta L_2 + \Delta L_1 = 0$ entonces $\frac{Rc}{E_1 \cdot A_1} \cdot L_1 + \left(\frac{Rc}{E_2 \cdot A_2} \cdot L_2 + \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2 \right) = 0$

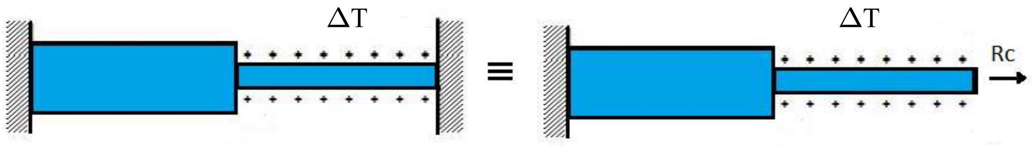
De donde podemos despejar: $Rc := \frac{-\alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2}{\left(\frac{L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_2 \cdot A_2} \right)} = -733.038 \cdot N$ y por lo tanto $Ra := -Rc = 0.733 \cdot kN$

Por Método de las Incógnitas Estáticas

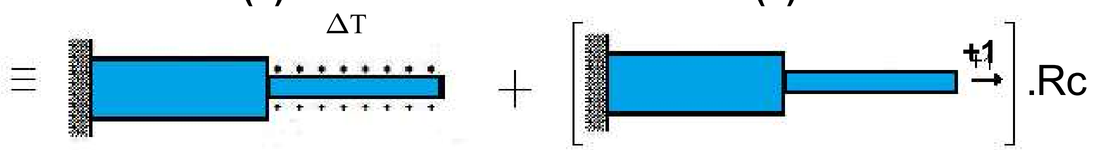
El método de las incógnitas estáticas consiste en separar un problema hiperestáticos en la sumatoria de dos problemas isoestáticos y se igualan desplazamientos o giros, dependiendo el caso, en ambos sistemas para poder obtener los valores de las incógnitas. Para calcular estos desplazamientos y giros se suele utilizar el Teorema de los Trabajos Virtuales.

Usando TTV para solicitación axil, el cálculo del desplazamiento queda: $\delta = \int N_{SE} \cdot \varepsilon_{DV} \, dx$

Entonces $\delta = \int N_{SE} \cdot \frac{N_{DV}}{E \cdot A} \, dx + \int N_{SE} \cdot \alpha \cdot \Delta T \, dx$



(1) **(2)**



Normal

$N_1 := 0$ $N_2 := 1$

Aquí el desplazamiento que se calculará es el del punto C. Entonces: $\delta_c{}^{h} = \delta_{c.\Delta T}{}^{0} + \delta_{c.Rc}{}^{0}$

Como el empotramiento restringe el desplazamiento $\delta_c{}^{h} = 0$

Para calcular los otros desplazamientos necesito, en cada caso, definir cuál es el desplazamiento virtual (DV) y cual el sistema equilibrado (SE)

DV: Es el sistema que contiene las causas deformantes que generan el desplazamiento/giro que querés calcular.

SE: La estructura solicitada con una fuerza en el punto y dirección del desplazamiento que querés calcular.

Para calcular $\delta_{c.\Delta T}{}^{0}$: DV: (1) y SE: (2)

$$\delta_{\Delta T} := \int_0^{L_1} N_2 \cdot \frac{N_1}{E_1 \cdot A_1} \, dx + \int_{L_1}^{L_2+L_1} N_2 \cdot \frac{N_1}{E_2 \cdot A_2} \, dx + \int_{L_1}^{L_2+L_1} N_2 \cdot \alpha_2 \Delta T \, dx = 0.3 \cdot mm$$

Para calcular $\delta_{c.Rc}{}^{0}$: DV: (2) y SE: (2)

$$\delta_1 := \int_0^{L_1} N_2 \cdot \frac{N_2}{E_1 \cdot A_1} \, dx + \int_{L_1}^{L_2+L_1} N_2 \cdot \frac{N_2}{E_2 \cdot A_2} \, dx = 0.409 \cdot \frac{mm}{kN}$$

$R_c := \frac{-\delta_{\Delta T}}{\delta_1} = -0.733 \cdot kN$ Por equilibrio: $R_a := -R_c = 0.733 \cdot kN$

a) Una vez calculadas las reacciones de vínculo de la estructura puedo calcular las tensiones.

$$\sigma_1 := \frac{R_c}{A_1} = -0.047 \cdot \frac{kN}{cm^2} \qquad \sigma_2 := \frac{R_c}{A_2} = -0.233 \cdot \frac{kN}{cm^2}$$

b) Para calcular los desplazamiento se puede hacer de dos maneras

- Integrando: $\Delta L = \int_0^{L_1} \varepsilon_1 \, dx + \int_{L_1}^{L_2+L_1} \varepsilon_2 \, dx$

- Utilizando TTV

En este caso, como el ε se mantiene constante es más fácil calcular el desplazamiento por medio de la integral.
También se puede calcular la función ΔL(x)
En los puntos A y C los desplazamientos serán nulos ya que ambos puntos están empotrados.

$$\varepsilon_1 := \frac{\sigma_1}{E_1} = -6.667 \times 10^{-5} \qquad \varepsilon_2 := \frac{\sigma_2}{E_2} + \alpha_2 \cdot \Delta T = 6.667 \times 10^{-5}$$

$$\Delta L_B := \varepsilon_1 \cdot L_1 = -0.067 \cdot mm \qquad \Delta L_C := \varepsilon_1 \cdot L_1 + \varepsilon_2 \cdot L_2 = 0 \cdot mm$$

c) Para que las secciones verifiquen las tensiones deben ser menores que las tensiones admisibles de cada material.

$$\sigma_{adm1} := \frac{\sigma_{f1}}{CS_1} = 8.571 \cdot \frac{kN}{cm^2} \qquad \sigma_{adm2} := \frac{\sigma_{f2}}{CS_2} = 11.429 \cdot \frac{kN}{cm^2}$$

$$\left|\sigma_1\right| = 0.047 \cdot \frac{kN}{cm^2} \qquad \left|\sigma_2\right| = 0.233 \cdot \frac{kN}{cm^2}$$

Ambas secciones verifican ya que $\sigma_1 < \sigma_{adm1}$ y $\sigma_2 < \sigma_{adm2}$

Diagramas de N, σ, ε y ΔL