Preparado por: Ing. Luis Nelson SOSTI - Jefe de Trabajos Prácticos	FECHA: nov-13

INTRODUCCIÓN:

Cada uno de los temas que conforman la asignatura "Estabilidad II A", comprende una gran cantidad de expresiones matemáticas a través de las cuales se determinan las magnitudes, variables y parámetros que permiten conocer el comportamiento de una estructura o de una serie de elementos estructurales desde los puntos de vista estático y cinemático.
En virtud de esto, la cátedra ha decidido, cuando un determinado tema lo amerite, presentar una serie de artículos que de forma suscinta expongan tales expresiones y sirvan de guía para el estudio, análisis y resolución de problemas.

01) - ALCANCE:

En este artículo se resumen las expresiones matemáticas que caracterizan el análisis estático y cinemático de los siguientes tipos de secciones transversales de barras rectas solicitadas a torsión:

- sección circular;
- sección anular;
- sección tubular de pared delgada simplemente conexa;
- sección abierta de pared delgada.

De esta manera, y mediante la correcta aplicación de las mismas, se podrán calcular y determinar todas las variables estáticas y cinemáticas involucradas en los mencionados análsis.

02) - NOMENCLATURA GENERAL:

La siguiente nomenclatura tiene una aplicación general a todos los tipos de secciones transversales que serán desarollados en este artículo. En una segunda etapa, y cuando se trabaje directamente con cada sección en particular, se mostrará la nomenclatura propia de cada una de ellas.

x : Eje de la barra. Indica la posición respecto de un origen de cada una de las infinitas secciones transversales que conforman la pieza o elemento estructural.

Mt(x) : Función solicitación "momento torsor" a lo largo del eje baricéntrico de la barra.

Mt : Momento torsor, como esfuerzo externo o solicitación interna.

G(x) : Módulo de elasticidad transversal del material que conforma la barra bajo análisis. Se indica en función de "x" debido a que se pretende mostrar que puede variar a lo largo del eje de la misma.

$\tau_{MÁX}$: Tensión tangencial máxima.

$\tau_{MÁX}(x)$: Función tensión tangencial máxima a lo largo del eje de la barra.

τ : Tensión tangencial

$\tau(x)$: Función tensión tangencial para una fibra de una barra a lo largo del eje de la misma.

θ : Ángulo de torsión o ángulo de torsión absoluto

$\theta(x)$: Función ángulo de torsión o ángulo de torsión absoluto a lo largo del eje de la barra.

χ : Ángulo de torsión específico o curvatura de torsión.
$\chi(x)$: Función ángulo de torsión específico o curvatura de torsión a lo largo del eje de la barra.
γ : Distorsión angular
$\gamma(x)$: Función distorsión angular a lo largo del eje de la barra.

Nota 1:

El siguiente cuadro muestra la diferencia entre la nomenclatura utilizada en las clases teóricas y en el libro "Estabilidad II" del Ing. Fliess.

DENOMINACIÓN	Ángulo de Torsión o Ángulo de Torsión Absoluto	Ángulo Específico de Torsión (Curvatura de Torsión)
Clases Teóricas	θ	χ
	(tita minúscula)	(kappa minúscula)
Estabilidad II - Ing. Fliess	Θ	θ
	(TITA MAYÚSCULA)	(tita minúscula)

Nota 2:

En todo el desarrollo que a continuación se expone, se ha seguido la nomenclatura expuesta durante las clases teóricas.

03) - TIPOS DE SECCIONES TRANSVERSALES PARA BARRAS DE EJE RECTO:

03.01 - SECCIÓN CIRCULAR:

03.01.01 - NOMENCLATURA PARTICULAR:

La siguiente nomenclatura que se expone corresponde exclusivamente a barras rectas de sección circular.

$\tau_{MÁX}(x)$: Función tensión tangencial máxima se calcula para el radio de la circunferencia.
$\tau(x,\rho)$: Función tensión tangencial se calcula para una fibra que se ubica a una distancia "ρ" del centro de la circunferencia.
$\gamma_{MÁX}(x)$: Función distorsión angular máxima se calcula para el radio de la circunferencia.
$\gamma(x,\rho)$: Función distorsión angular se calcula para una fibra que se ubica a una distancia "ρ" del centro de la circunferencia.
R : Radio de la sección circular.
R(x) : Función radio de la sección circular a lo largo del eje de la barra.

$\rho(x)$: Distancia de un punto de una fibra de la barra al centro de la circunferencia de la sección a la que pertenece el mismo.

D : Diámetro de la sección circular.

D(x) : Función diámetro de la sección circular a lo largo del eje de la barra.

L : Longitud de la barra o de un tramo de la misma

$I_P(x)$: Momento de inercia polar

- Para sección circular:

$$I_P(x) = \frac{\pi \cdot D(x)^4}{32} = \frac{\pi \cdot R(x)^4}{2} \qquad [1]$$

03.01.02 - EXPRESIONES MATEMÁTICAS:

$$\boxed{\tau_{MÁX}(x) = \frac{Mt(x) \cdot R(x)}{I_P(x)} = \frac{Mt(x) \cdot D(x)/2}{I_P(x)} = \frac{16 \cdot Mt(x)}{\pi \cdot D^3(x)}} \qquad [2]$$

$$\boxed{\tau(x,\rho) = \frac{Mt(x) \cdot \rho(x)}{I_P(x)}} \qquad [3]$$

$$\boxed{\tau(x,\rho) = \tau_{MÁX}(x) \quad x \quad \frac{\rho(x)}{R(x)}} \qquad [4]$$

$$\boxed{\theta(x) = \int \frac{Mt(x) \cdot dx}{G(x) \cdot I_P(x)}} \qquad [5]$$

$$\boxed{\chi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{Mt(x)}{G(x) \cdot I_P(x)} = \frac{32 \cdot Mt(x)}{G(x) \cdot \pi \cdot D^4(x)}} \qquad [6]$$

Si en la longitud de la barra o en un tramo de la misma, se observa que Mt(x) = cte, G(x) = cte e $I_P(x)$ = cte; la expresión anterior queda de la siguiente manera:

$$\boxed{\theta(x) = \frac{Mt \cdot L}{G \cdot I_P} = \frac{32 \cdot Mt \cdot L}{G \cdot \pi \cdot D^4}} \qquad [7]$$

$$\boxed{\chi(x) = \frac{Mt}{G \cdot I_P} = \frac{32 \cdot Mt}{G \cdot \pi \cdot D^4}} \qquad [8]$$

$$\boxed{\gamma_{MÁX}(x) = \frac{\tau_{MÁX}(x)}{G(x)}} \qquad [9]$$

$$\boxed{\gamma_{MÁX}(x) = \frac{Mt(x) \,.\, R(x)}{G(x) \,.\, I_P(x)} = \frac{Mt(x) \,.\, D(x)/2}{G(x) \,.\, I_P(x)} = \frac{16 \,.\, Mt(x)}{\pi \,.\, D^3(x) \,.\, G(x)}} \qquad [10]$$

$$\boxed{\gamma(x,\rho) = \frac{Mt(x) \,.\, \rho(x)}{G(x) \,.\, I_P(x)}} \qquad [11]$$

$$\boxed{\gamma(x,\rho) = \gamma_{MÁX}(x) \quad x \quad \frac{\rho(x)}{R(x)}} \qquad [12]$$

<u>03.02 - SECCIÓN ANULAR:</u>

<u>03.02.01 - NOMENCLATURA PARTICULAR:</u>

La siguiente nomenclatura que se expone corresponde exclusivamente a barras rectas de sección anular.

$\tau_{MÁX}(x)$: Función tensión tangencial máxima calculada para el radio exterior de la sección.

$\tau_{MÍN}(x)$: Función tensión tangencial mínima calculada para el radio interior de la sección.

$\tau(x,\rho)$: Función tensión tangencial calculada para una fibra que se ubica a una distancia "ρ" del centro de la circunferencia, menor al radio exterior y mnayor al interior.

R : Radio exterior de la sección anular.

R(x) : Función radio exterior de la sección anular a lo largo del eje de la barra.

r : Radio interior de la sección anular.

r(x) : Función radio interior de la sección anular a lo largo del eje de la barra.

$\rho(x)$: Distancia de un punto de una fibra de la barra al centro de la sección anular a la que pertenece el punto. Deberá ser menor que el radio exterior "R(x)" y mayor que el interior "r(x)".

D : Diámetro exterior de la sección anular.

D(x) : Función diámetro exterior de la sección anular a lo largo del eje de la barra.

d : Diámetro interior de la sección anular.

d(x) : Función diámetro interior de la sección anular a lo largo del eje de la barra.

L : Longitud de la barra o de un tramo de la misma

$I_P(x)$: Momento de inercia polar

- Para sección anular:

$$I_P(x) = \frac{\pi \,.\, [\, D(x)^4 - d(x)^4 \,]}{32} = \frac{\pi \,.\, [\, R(x)^4 - r(x)^4 \,]}{2} \qquad [13]$$

03.02.02 - EXPRESIONES MATEMÁTICAS:

$$\tau_{MÁX}(x) = \frac{Mt(x)\ .\ R(x)}{I_P(x)} = \frac{2\ .\ Mt(x)\ .\ R(x)}{\pi\ .\ [\ R^4(x) - r^4(x)\ ]} = \frac{Mt(x)\ .\ D(x)/2}{I_P(x)} = \frac{16\ .\ Mt(x)\ .\ D(x)}{\pi\ .\ [\ D^4(x) - d^4(x)\ ]} \quad [14]$$

$$\tau_{MÍN}(x) = \frac{Mt(x)\ .\ r(x)}{I_P(x)} = \frac{2\ .\ Mt(x)\ .\ r(x)}{\pi\ .\ [\ R^4(x) - r^4(x)\ ]} = \frac{Mt(x)\ .\ d(x)/2}{I_P(x)} = \frac{16\ .\ Mt(x)\ .\ d(x)}{\pi\ .\ [\ D^4(x) - d^4(x)\ ]} \quad [15]$$

$$\tau(x,\rho) = \frac{Mt(x)\ .\ \rho(x)}{I_P(x)} \quad [16]$$

$$\tau(x,\rho) = \tau_{MÁX}(x) \ \ x\ \frac{\rho(x)}{R(x)} \quad [17]$$

$$\theta(x) = \int \frac{Mt(x)\ .\ dx}{G(x)\ .\ I_P(x)} \quad [18]$$

$$\chi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{Mt(x)}{G(x)\ .\ I_P(x)} = \frac{32\ .\ Mt(x)}{G(x)\ .\ \pi\ .\ [\ D^4(x) - d^4(x)\ ]} \quad [19]$$

Si en la longitud de la barra o en un tramo de la misma, se observa que Mt(x) = cte, G(x) = cte e $I_P(x)$ = cte; la expresión anterior queda de la siguiente manera:

$$\theta(x) = \frac{Mt\ .\ L}{G\ .\ I_P} = \frac{32\ .\ Mt\ .\ L}{G\ .\ \pi\ .\ [\ D^4 - d^4\ ]} \quad [20]$$

$$\chi(x) = \frac{Mt}{G\ .\ I_P} = \frac{32\ .\ Mt}{G\ .\ \pi\ .\ [\ D^4 - d^4\ ]} \quad [21]$$

$$\gamma_{MÁX}(x) = \frac{\tau_{MÁX}(x)}{G(x)} \quad [22]$$

$$\gamma_{MÁX}(x) = \frac{Mt(x)\ .\ R(x)}{G(x)\ .\ I_P(x)} = \frac{2\ .\ Mt(x)\ .\ R(x)}{G(x)\ .\ \pi\ .\ [\ R^4(x) - r^4(x)\ ]} = $$

$$= \frac{Mt(x)\ .\ D(x)/2}{G(x)\ .\ I_P(x)} = \frac{16\ .\ Mt(x)\ .\ D(x)}{G(x)\ .\ \pi\ .\ [\ D^4(x) - d^4(x)\ ]} \quad [23]$$

$$\boxed{\gamma_{MÍN}(x) = \frac{\tau_{MÍN}(x)}{G(x)}} \qquad [24]$$

$$\gamma_{MÍN}(x) = \frac{Mt(x)\,.\,r(x)}{G(x)\,.\,I_P(x)} = \frac{2\,.\,Mt(x)\,.\,r(x)}{G(x)\,.\,\pi\,.\,[\,R^4(x) - r^4(x)\,]} = \frac{Mt(x)\,.\,d(x)/2}{G(x)\,.\,I_P(x)} = \frac{16\,.\,Mt(x)\,.\,d(x)}{G(x)\,.\,\pi\,.\,[\,D^4(x) - d^4(x)\,]} \qquad [25]$$

$$\boxed{\gamma(x,\rho) = \frac{Mt(x)\,.\,\rho(x)}{G(x)\,.\,I_P(x)}} \qquad [26]$$

$$\boxed{\gamma(x,\rho) = \gamma_{MÁX}(x) \times \frac{\rho(x)}{R(x)}} \qquad [27]$$

03.03 - SECCIÓN TUBULAR DE PARED DELGADA SIMPLEMENTE CONEXA:

03.03.01 - NOMENCLATURA PARTICULAR:

La siguiente nomenclatura que se expone corresponde exclusivamente a barras rectas de sección tubular de pared delgada simplemente conexa:

$\tau_{MÁX}(x)$: Función tensión tangencial máxima calculada para el mínimo espesor de pared de las secciones.

$\tau_{MÍN}(x)$: Función tensión tangencial mínima calculada para el máximo espesor de pared de las secciones.

$\tau(x)$: Función tensión tangencial calculada para una fibra que se ubica en un sector de la sección con un espesor de pared igual a "e_i".

Ω : Área de la superficie de la sección tubular de pared delgada simplemente conexa delimitada por el contorno medio de la sección.

$\Omega(x)$: Función área de la superficie de la sección tubular de pared delgada simplemente conexa delimitada por el contorno medio de la sección.

$e_{MÍN}$: Espesor mínimo de pared de la sección. Se utiliza para determinar la tensión tangencial máxima en dicha sección.

$e_{MÍN}(x)$: Función espesor mínimo de pared de la sección. Se utiliza para determinar la tensión tangencial máxima.

$e_{MÁX}$: Espesor máximo de pared de la sección. Se utiliza para determinar la tensión tangencial mínima en dicha sección.

$e_{MÁX}(x)$: Función espesor máximo de pared de la sección. Se utiliza para determinar la tensión tangencial mínima.

e_i : Espesor de pared de la sección en un sector determinado de la misma. Se utiliza para determinar la tensión tangencial en dicho sector de la sección.

$e_i(x)$: Función espesor de pared de la sección en un sector determinado de la misma. Se utiliza para determinar la tensión tangencial en dicho sector de la sección.

e_m : Espesor medio de la pared de una sección en un sector o tramo "Δs" de la misma.

$e_m(x)$: Función espesor medio de pared de una sección en un sector o tramo "Δs" de la misma.

e(x) : Función espesor de pared cuando se supone que es constante para cada sección.

e : Espesor de pared cuando se supone que es constante para toda la longitud de la barra, es decir, todas las secciones poseen el mismo espesor de pared "e".

ds : Diferencial de longitud del contorno medio o de la línea media en una sección determinada.

ds(x) : Función diferencial de longitud del contorno medio o de la línea media.

$\Delta s(x)$: Longitud de un tramo del perímetro medio de una sección para el cual se considerará un espesor medio $e_m(x)$

s(x) : Función longitud del perímetro medio de una sección determinada cuando se considera que cada uno de los tramos que la conforman posee el mismo valor.

S : Longitud del perímetro medio de la pared de una sección cuando se supone que es constante para toda la longitud de la barra, es decir, todas las secciones poseen el mismo perímetro medio "S".

L : Longitud de la barra o de un tramo de la misma

03.03.02 - EXPRESIONES MATEMÁTICAS:

$$\boxed{\tau(x) = \frac{Mt(x)}{2 \cdot \Omega(x) \cdot e_i(x)}} \qquad [28]$$

$$\boxed{\tau_{MÁX}(x) = \frac{Mt(x)}{2 \cdot \Omega(x) \cdot e_{MÍN}(x)}} \qquad [29]$$

$$\boxed{\tau_{MÍN}(x) = \frac{Mt(x)}{2 \cdot \Omega(x) \cdot e_{MÁX}(x)}} \qquad [30]$$

$$\boxed{\theta(x) = \int \left[\frac{Mt(x)}{4 \cdot G(x) \cdot \Omega^2(x)} \times \int \frac{ds(x)}{e_i(x)} \right] \times dx} \qquad [31]$$

Como es difícil de conocer la función que relaciona a "s" y "e" para una determinada sección, la integral es reemplazada, con suficiente aproximación, por una sumatoria. De esta manera es más conveniente trabajar directamente con la siguiente expresión [32] en lugar de la [31]:

$$\theta(x) = \int \left[\frac{Mt(x)}{4 \cdot G(x) \cdot \Omega^2(x)} \times \sum \frac{\Delta s(x)}{e_m(x)} \right] \times dx \qquad [32]$$

Si en la expresión [32] se consideran que todos los tramos en que se subdivide el perímetro de la figura son constantes, $\Delta s(x)$ sale fuera de la sumatoria, y queda como se indica en la expresión [33]:

$$\theta(x) = \int \left[\frac{Mt(x) \cdot \Delta s(x)}{4 \cdot G(x) \cdot \Omega^2(x)} \times \sum \frac{1}{e_m(x)} \right] \times dx \qquad [33]$$

Por otra parte, si $e_m(x)$ es constante para cada uno de los distintos tramos en que puede asumirse conformada la sección, la [33] se transforma en la [34]:

$$\theta(x) = \int \left[\frac{Mt(x) \cdot s(x)}{4 \cdot G(x) \cdot \Omega^2(x) \cdot e(x)} \right] \times dx \qquad [34]$$

Finalmente, si a lo largo de toda la barra o de un tramo de la misma se verifica que: Mt(x) = cte, s(x) = cte, G(x) = cte, $\Omega(x)$ = cte y e(x) = cte; la expresión [34] se transforma en la [35]:

$$\theta(x) = \frac{Mt \cdot S}{4 \cdot G \cdot \Omega^2 \cdot e} \times L \qquad [35]$$

Las expresiones equivalentes a las [31] a [35] pero correspondientes a al ángulo específico de torsión o a la curvatura de torsión quedan de la siguiente manera, expresiones [36] a [40]:

$$\chi(x) = \frac{Mt(x)}{4 \cdot G(x) \cdot \Omega^2(x)} \times \int \frac{ds(x)}{e_i(x)} \qquad [36]$$

Reemplazando la integral por la sumatoria cuando la relación entre "s" y "e" es una función de difícil establecimiento, dando resultados muy satisfactorios:

$$\chi(x) = \frac{Mt(x)}{4 \cdot G(x) \cdot \Omega^2(x)} \times \sum \frac{\Delta s(x)}{e_m(x)} \qquad [37]$$

Cuando todos los tramos de la sumatoria han sido adoptados o establecidos de la misma magnitud (longitud), la [37] se transforma en la [38], debido a que $\Delta s(x)$ sale fuera de la misma:

$$\boxed{\chi(x) = \frac{Mt(x)\ .\ \Delta s(x)}{4\ .\ G(x)\ .\ \Omega^2(x)}\ \mathrm{x}\ \sum \frac{1}{e_m(x)}} \qquad [38]$$

Cuando $e_m(x)$ es constante para cada uno de los distintos tramos en que puede asumirse conformada la sección, la [38] se transforma en la [39]:

$$\boxed{\chi(x) = \frac{Mt(x)\ .\ s(x)}{4\ .\ G(x)\ .\ \Omega^2(x)\ .\ e(x)}} \qquad [39]$$

Finalmente, si a lo largo de toda la barra o de un tramo de la misma se verifica que: Mt(x) = cte, s(x) = cte, G(x) = cte, $\Omega(x)$ = cte y e(x) = cte; la expresión [39] se transforma en la [40]:

$$\boxed{\chi(x) = \frac{Mt\ .\ S}{4\ .\ G\ .\ \Omega^2\ .\ e}} \qquad [40]$$

03.04 - SECCIÓN ABIERTA DE PARED DELGADA:

03.04.01 - NOMENCLATURA PARTICULAR:

La siguiente nomenclatura que se expone corresponde exclusivamente a barras rectas de sección abierta de pared delgada.

$\tau_{MÁX}(x)$: Función tensión tangencial máxima calculada para el máximo espesor de pared de las secciones.

$\tau_{MÍN}(x)$: Función tensión tangencial mínima calculada para el mínimo espesor de pared de las secciones.

$\tau(x)$: Función tensión tangencial calculada para una fibra que se ubica en un sector de la sección con un espesor de pared igual a "e_i".

$e_{MÁX}$: Espesor máximo de pared de la sección. Se utiliza para determinar la tensión tangencial mínima en dicha sección.

$e_{MÁX}(x)$: Función espesor máximo de pared de la sección. Se utiliza para determinar la tensión tangencial mínima.

$e_{MÍN}$: Espesor mínimo de pared de la sección. Se utiliza para determinar la tensión tangencial máxima en dicha sección.

$e_{MÍN}(x)$: Función espesor mínimo de pared de la sección. Se utiliza para determinar la tensión tangencial máxima.

e_i : Espesor de pared de la sección en un sector determinado de la misma. Se utiliza para determinar la tensión tangencial en dicho sector de la sección.

$e_i(x)$: Función espesor de pared de la sección en un sector determinado de la misma. Se utiliza para determinar la tensión tangencial en dicho sector de la sección.

J_T : Módulo de torsión de una sección.

$J_T(x)$: Función módulo de torsión de las secciones de la barra.

l_i : Longitud de un tramo de los lados de una sección abierta de pared delgada.

$l_i(x)$: Función longitud de un tramo de los lados de una sección abierta de pared delgada.

L : Longitud de la barra o de un tramo de la misma

03.04.02 - EXPRESIONES MATEMÁTICAS:

$$\boxed{\tau(x) = \frac{Mt(x)}{J_T(x)} \times e_i(x)} \qquad [41]$$

$$\boxed{\tau_{MÁX}(x) = \frac{Mt(x)}{J_T(x)} \times e_{MÁX}(x)} \qquad [42]$$

$$\boxed{\tau_{MÍN}(x) = \frac{Mt(x)}{J_T(x)} \times e_{MÍN}(x)} \qquad [43]$$

$$\boxed{J_T = \frac{1}{3} \sum l_i \,.\, e_i^3} \qquad [44]$$

$$\boxed{\theta(x) = \int \frac{Mt(x)}{G(x) \,.\, J_T(x)} \times dx} \qquad [45]$$

Si a lo largo de toda la barra o de un tramo de la misma se verifica que: $Mt(x) = cte$, $G(x) = cte$ y $J_T(x) = cte$; la expresión [45] se transforma en la [46]:

$$\boxed{\theta(x) = \frac{Mt \,.\, L}{G \,.\, J_T}} \qquad [46]$$

Las expresiones equivalentes del ángulo específico de torsión o curvatura de torsión son las siguientes:

$$\chi(x) = \frac{Mt(x)}{G(x) \cdot J_T(x)} \qquad [47]$$

Si a lo largo de toda la barra o de un tramo de la misma se verifica que: Mt(x) = cte, G(x) = cte y $J_T(x)$ = cte; la expresión [47] se transforma en la [48]:

$$\chi(x) = \frac{Mt}{G \cdot J_T} \qquad [48]$$