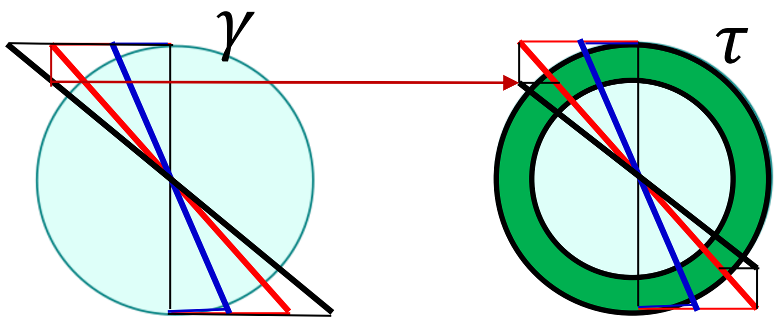
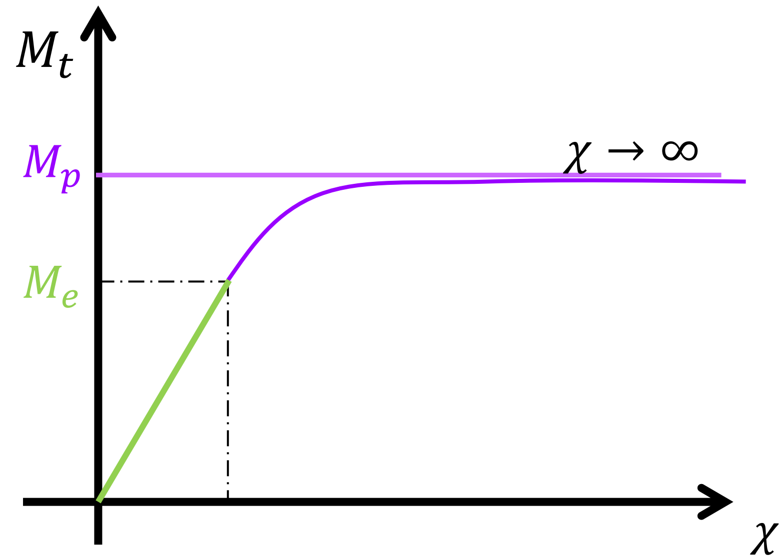
Análisis Elastoplástico – Solicitación a Torsión



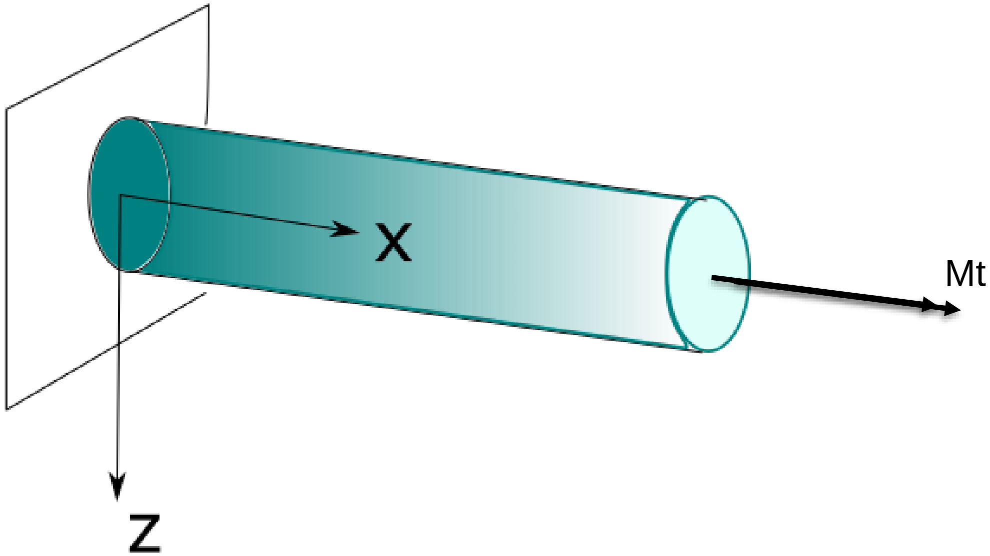


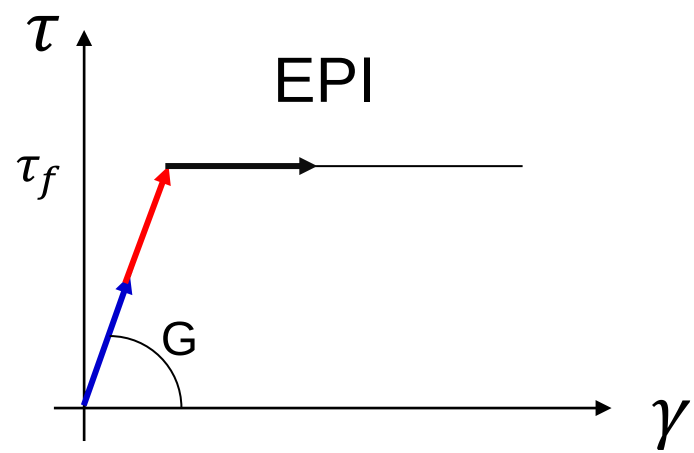
Manuela Medina, Constanza Ruffinelli, Tania Poletilo

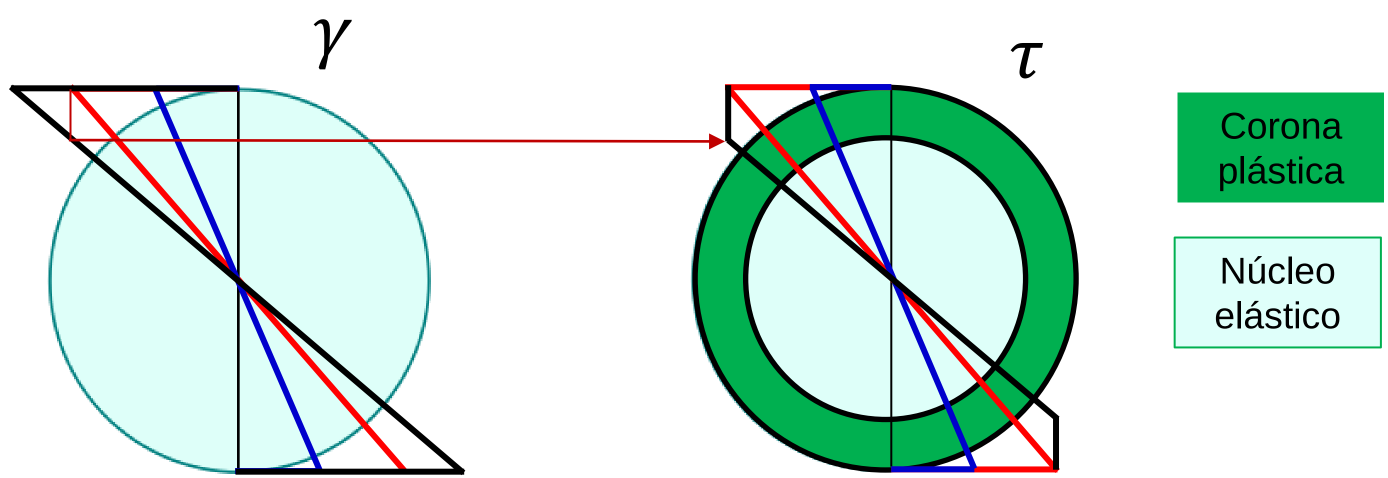
Universidad de Buenos Aires

Estabilidad II

Repaso teórico







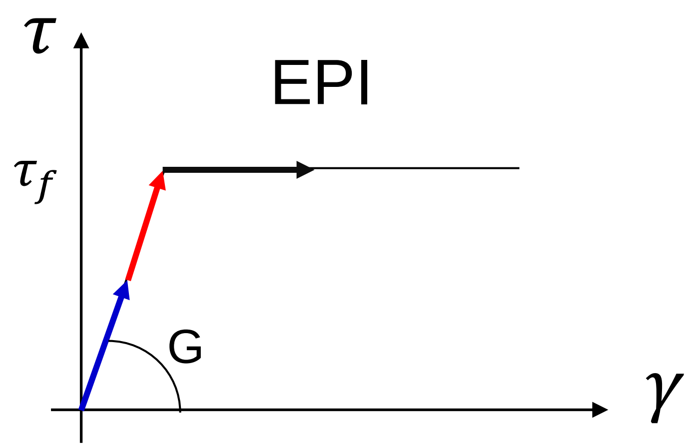
Coulomb

Para torsión en régimen elastoplástico nos restringimos a la teoría de Coulomb

$$\tau = \frac{M_t \cdot r}{J_p}$$

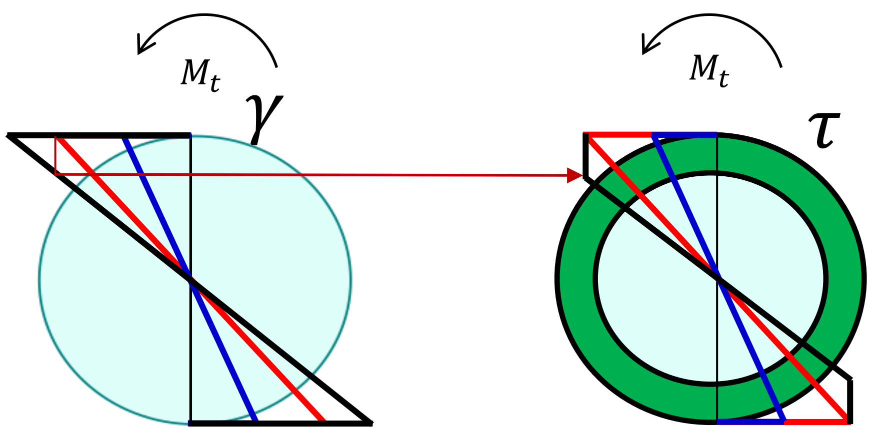
Hipótesis tomadas

- LC, LE, ~~LM~~
- Material continuo, isótropo y homogéneo
- Hipótesis de secciones planas

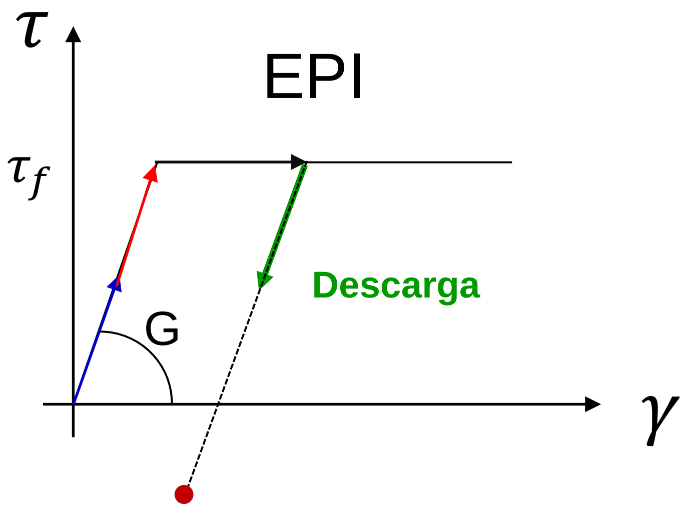


Tengo que plantear integrales!

$$M_t = \int \tau \cdot r \, dA$$

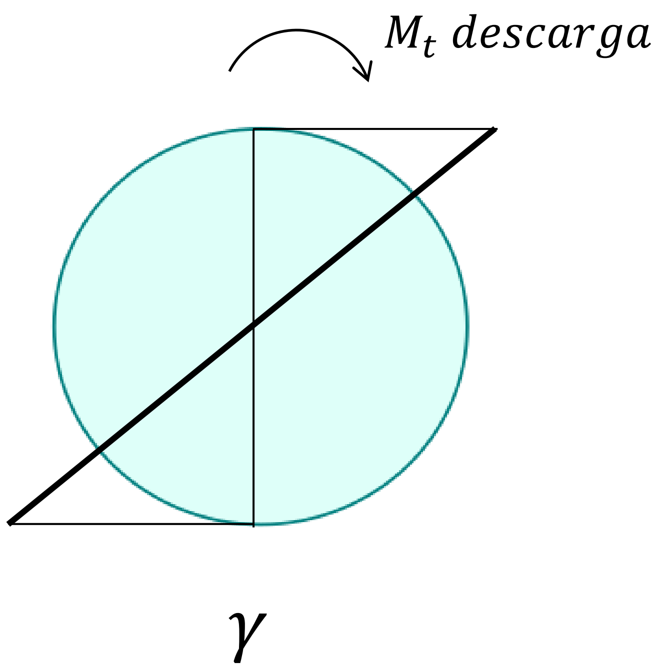


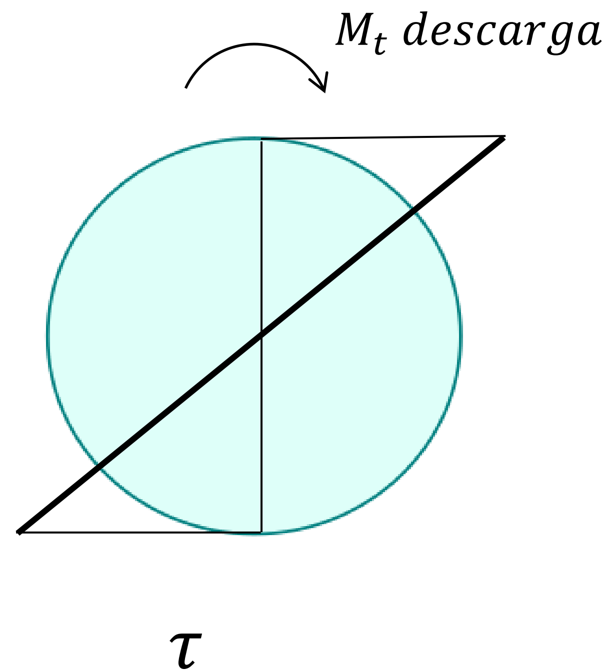
M_{te} = Momento de encuentro plástico

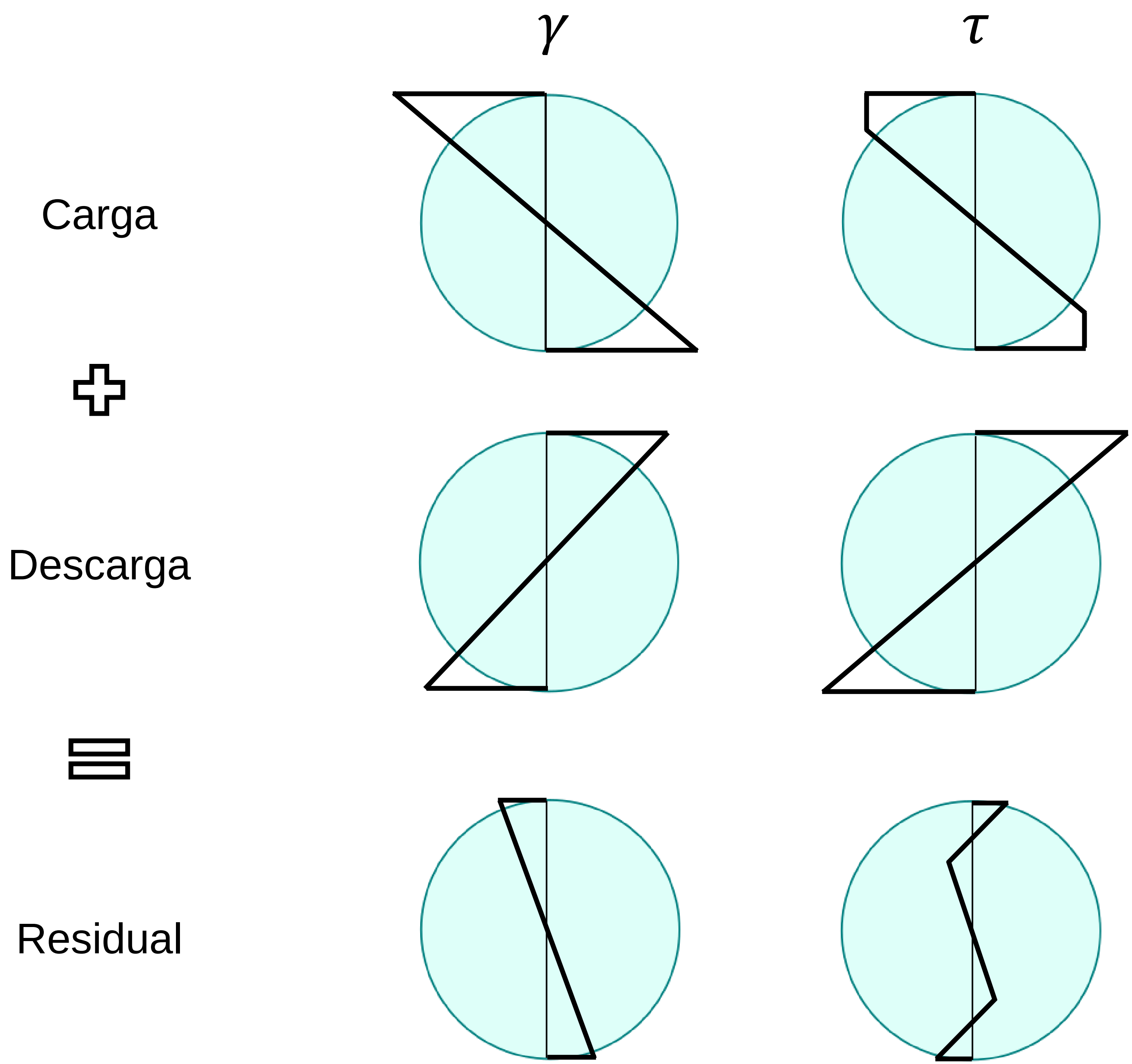


La descarga siempre es lineal

$$M_t\,descarga = -M_t\,carga$$

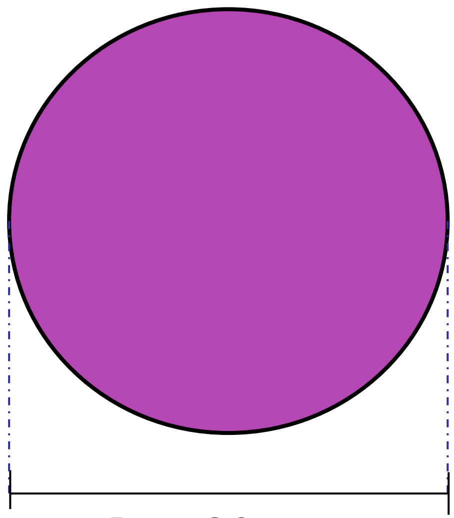





γ
τ
Carga
Descarga
Residual

Ejercicio:

- Calcule las tensiones debidas a $M_t = \frac{M_e + M_p}{2}$, siendo M_e: momento de encuentro plástico y M_p: momento de plastificación total.
- Descargue la sección y calcule tensiones y deformaciones residuales.
- Construir el diagrama momento-curvatura.



$D = 20 \cdot cm$

$$\tau_{fluencia} = 100\ MPa$$

$$G = 80\ GPa$$

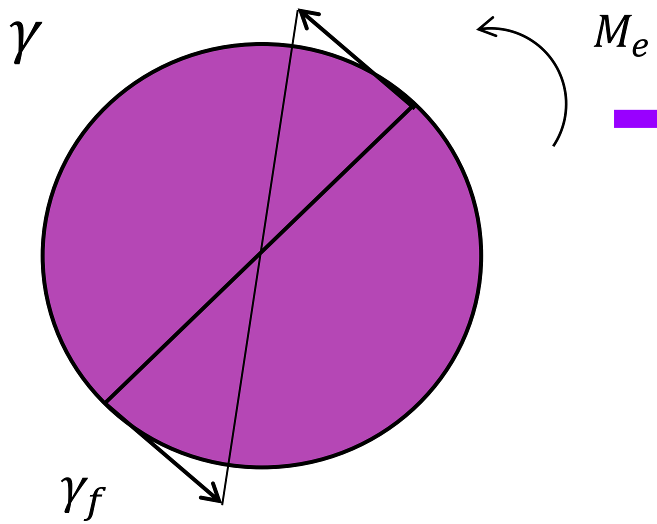
$$\gamma_{fluencia} = \frac{\tau_{fluencia}}{G} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$$

Cálculo de M_e

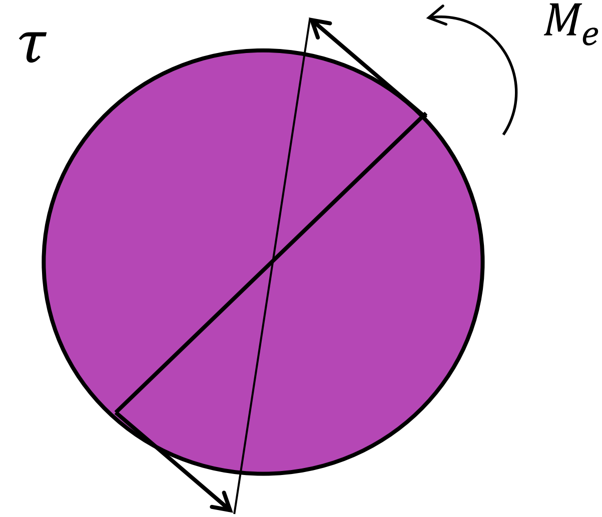
¿A qué llamamos momento de encuentro plástico?

El momento de encuentro plástico es aquel para el cuál se plastifica la primera fibra

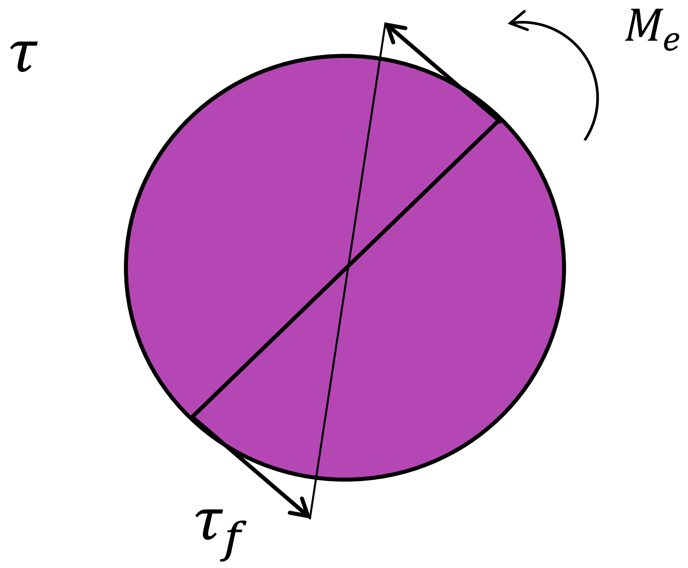
$$M_t = \int \tau \cdot d \, dA$$



Como es el caso límite, las ecuaciones de la teoría de la elasticidad se siguen cumpliendo y las tensiones tangenciales son lineales



El diagrama de deformaciones **SIEMPRE** es lineal



Teoría de Coulomb $\tau(r) = \dfrac{M_t}{J_p} \cdot r$

Como la fibra exterior es la que plastifica sabemos que:

$$\tau(R) = \tau_f \qquad R = \frac{D}{2} = 10\ cm$$

$$\tau_f = \frac{M_e}{J_p} \cdot R \qquad J_p = \frac{\pi}{32} \cdot D^4 = 15707{,}96\ cm^4$$

$$M_e = \tau_f \cdot \frac{J_p}{R} = 10\ \frac{kN}{cm^2} \cdot \frac{15707{,}96\ cm^4}{10\ cm} = 157{,}08\ \mathrm{kN}\ m$$

$$\chi_e = \frac{M_e}{G \cdot J_p} = \frac{157{,}08\ kN\ m}{80\ GPa \cdot 15707{,}96\ cm^4} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}\ \frac{1}{m}$$

Ésta fórmula es válida **SOLO** en régimen elástico

$$\chi_e = \frac{\gamma}{r} = \frac{\gamma_f}{R} = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot cm} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}\ \frac{1}{m}$$

Siempre es válida

Cálculo de M_p

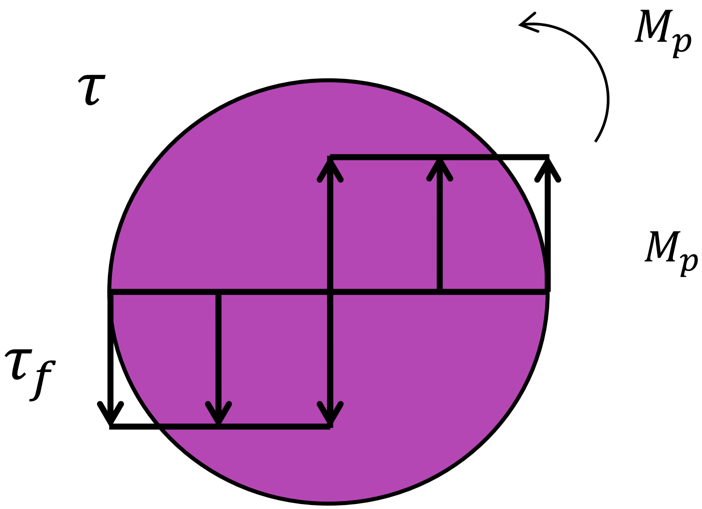
¿A qué llamamos momento de plastificación total? → Es la situación ideal en el cuál la totalidad de las fibras de la sección se plastificaron

¿Que implica la plastificación total? → $\chi \rightarrow \infty \qquad \gamma \rightarrow \infty$

$$\tau(r) = cte = \tau_f$$

$$M_t = \int \tau \cdot d \; dA \qquad dA = r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$d = r$$

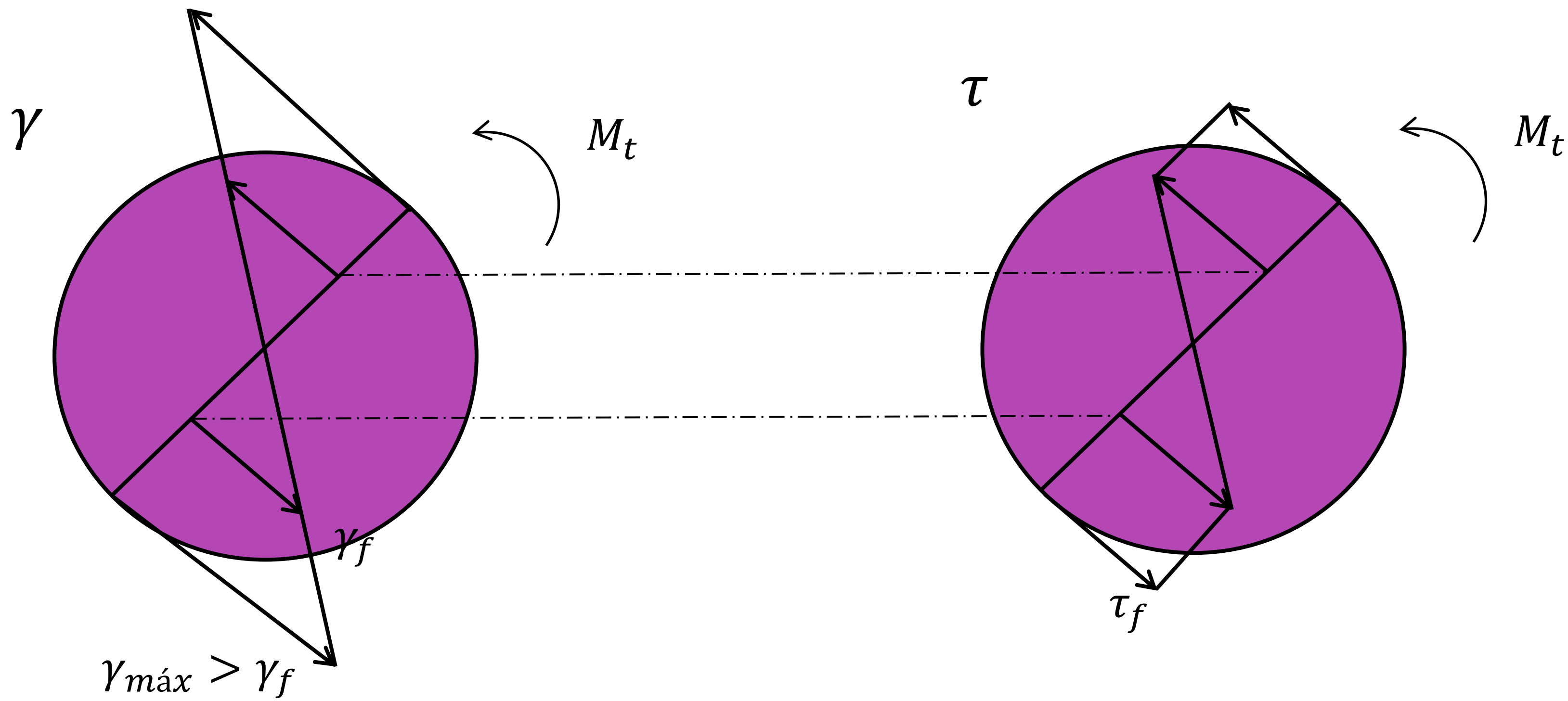


$$M_p = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \tau_f \cdot r \cdot (r \cdot dr \cdot d\theta\ ) = 2\pi \cdot \tau_f \int_0^{R} r^2 \, dr = \frac{2\pi}{3} \cdot \tau_f \cdot R^3$$

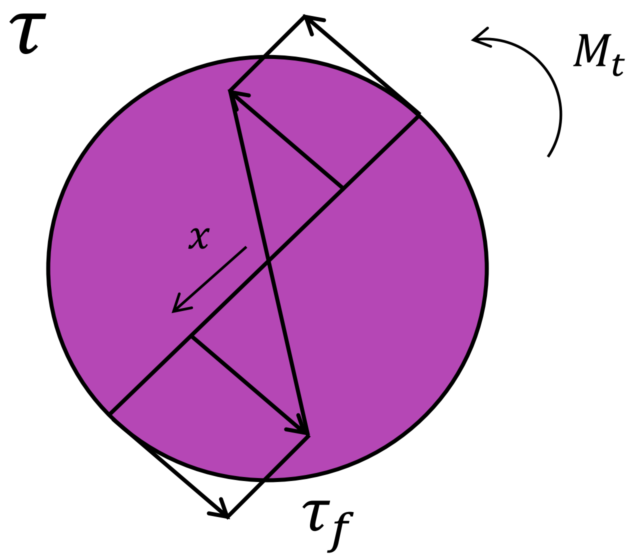
$$M_p = \frac{2\pi}{3} \cdot 10 \, \frac{kN}{cm^2} \cdot (10\ cm)^3 = 209{,}44\ kN\ m$$

Cargo la sección con $M_t = \frac{\mathrm{M_e + M_p}}{2}$

$$M_t = \frac{\mathrm{M_e + M_p}}{2} = \frac{157{,}08\ \mathrm{kN}\ m\ + 209{,}44\ kN\ m}{2} = 183\ kN\ m$$



Cuando realizo la carga, las tensiones τ **NUNCA** pueden ser mayores a la tensión de fluencia y ese valor se alcanza en todo punto donde $\gamma \geq \gamma_f$. Los puntos que no alcanzaron la deformación de fluencia siguen comportándose linealmente.



$$M_t = \int \tau \cdot d \, dA \qquad d = r \qquad dA = r \cdot dr \cdot d\theta$$

Función partida

$$\tau(r) = \begin{cases} \tau = \dfrac{\tau_f}{x} \cdot r \;\; si \; 0 < r \leq x \\ \tau = t_f \;\; si \; x < r \leq R \end{cases}$$

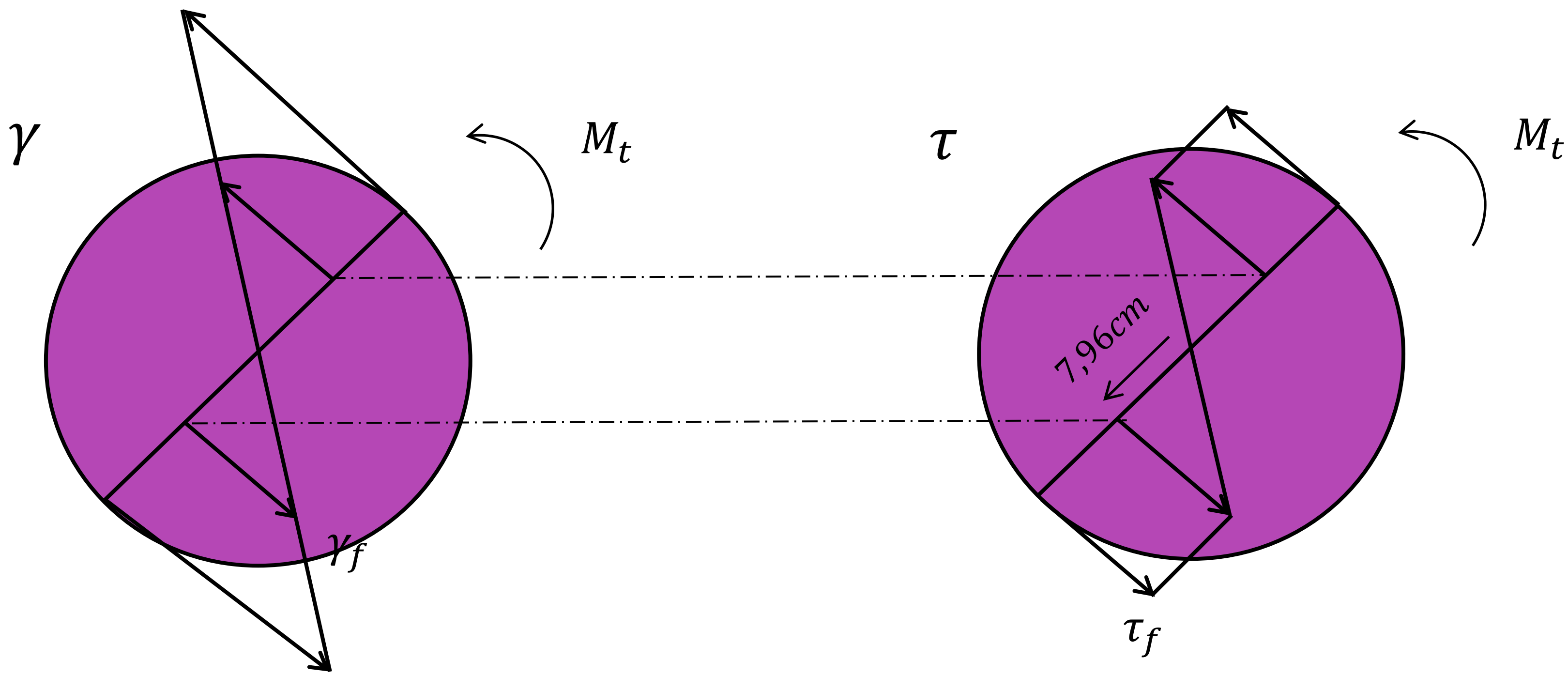
$$M_t = \int_0^{2\pi} \int_0^R \tau(r) \cdot r \cdot r \;\, dr \;\, d\theta = 2\pi \cdot \left(\int_0^x \frac{\tau_f}{x} \cdot r \cdot r \cdot r \, dr + \int_x^R \tau_f \cdot r \cdot r \;\, dr \right)$$

$$M_t = 2\pi \cdot \left(\frac{\tau_f}{x} \int_0^x r^3 \;\, dr + \tau_f \int_x^R r^2 \;\, dr \right) = 2\pi \cdot \left(\frac{t_f}{x} \cdot \frac{x^4}{4} + t_f \cdot \frac{(R^3 - x^3)}{3} \right)$$

$$\frac{M_t}{2\pi} = \left(\tau_f \cdot \frac{x^3}{4} + \tau_f \cdot \frac{R^3}{3} - \tau_f \cdot \frac{x^3}{3} \right) = \tau_f \cdot \left(-\frac{1}{12} \cdot x^3 + \frac{R^3}{3} \right) \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{-12 \cdot \left(\frac{M_t}{2\pi \cdot \tau_f} - \frac{R^3}{3} \right)}$$

$$x = \sqrt[3]{-12 \cdot \left(\frac{M_t}{2\pi \cdot \tau_f} - \frac{R^3}{3}\right)} = \sqrt[3]{-12 \cdot \left(\frac{183\ kN\ m}{2\pi \cdot 10\ \frac{kN}{cm^2}} - \frac{(10\ cm)^3}{3}\right)} = 7{,}96\ cm$$

Carga



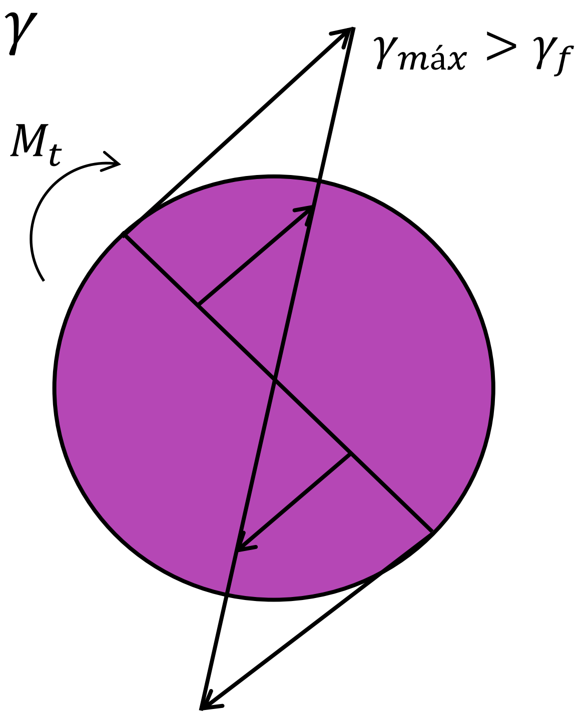
$$\gamma_{máx} = 1{,}57 \cdot 10^{-3}$$

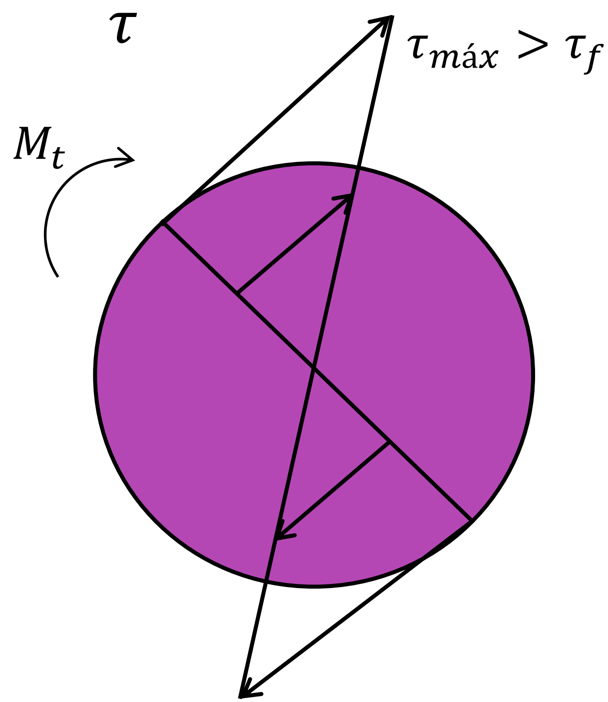
$$\gamma_{máx} = \frac{\gamma_f}{x} \cdot R = 0.0157\ \frac{1}{m}\ 10\ cm = 1{,}57 \cdot 10^{-3}$$

$$\chi = \frac{\gamma_{máx}}{R} = \frac{\gamma_f}{x} = \frac{1{,}2\dot{5} \cdot 10^{-3}}{7{,}96\ \mathrm{cm}} = 0{,}0157\ \frac{1}{m}$$

Descarga

Siempre es **elástica** → Puedo utilizar las ecuaciones de la Teoría de Coulomb





$$\tau(r) = \frac{M_t}{J_p} \cdot r$$

$$\tau_{máx} = \frac{M_t}{J_p} \cdot R$$

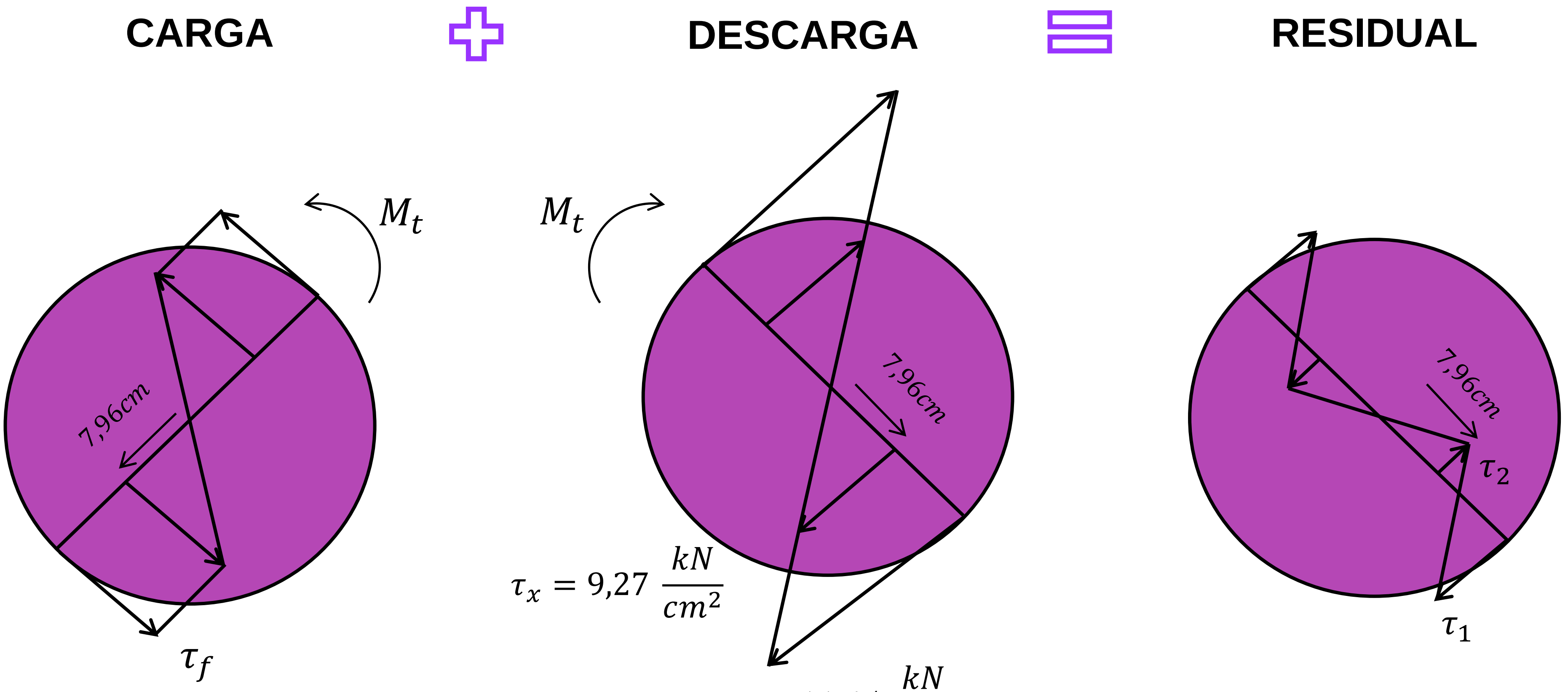
$$\gamma_{máx} = \frac{\tau_{máx}}{G}$$

$$\tau_{máx} = \frac{183 \cdot kN \cdot m}{15707{,}96 \cdot cm^4} \cdot 10 \cdot cm = 11{,}65\ \frac{kN}{cm^2}$$

$$\gamma_{máx} = \frac{11{,}65\ \frac{kN}{cm^2}}{80\ GPa} = 1{,}45 \cdot 10^{-3}$$

$$\tau_x = \frac{\tau_{máx}}{R} \cdot x = 9{,}27\ \frac{kN}{cm^2}$$

Tensiones residuales



$$\tau_x = 9{,}27\ \frac{kN}{cm^2}$$

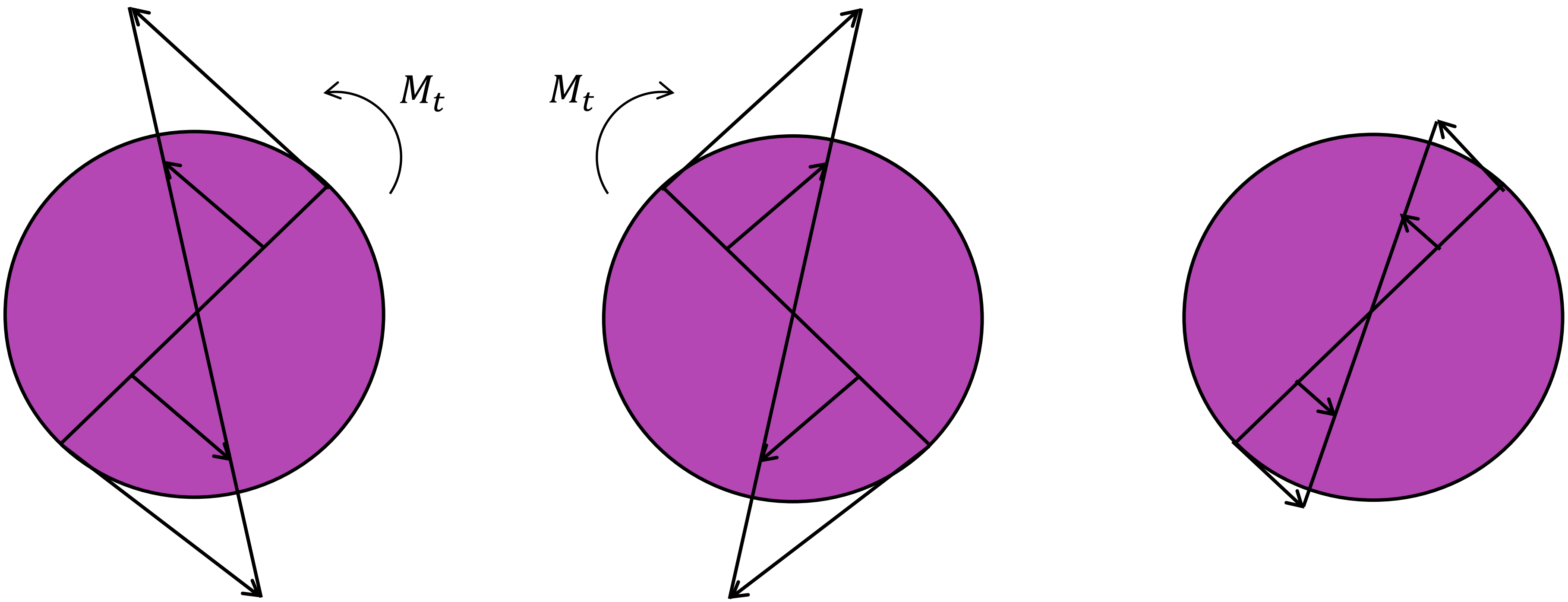
$$\tau_{máx} = 11{,}65\ \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_1 = |\tau_f - \tau_{máx}| = 1{,}65\ \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_2 = |\tau_f - \tau_x| = 0{,}73\ \frac{kN}{cm^2}$$

Deformaciones residuales

CARGA + **DESCARGA** = **RESIDUAL**



$$\gamma_{máx} = 1{,}57 \cdot 10^{-3}$$

$$\gamma_{máx} = 1{,}45 \cdot 10^{-3}$$

$$\gamma_{res} = 1{,}14 \cdot 10^{-4}$$

$$\chi_{res} = \frac{\gamma_{res}}{R} = 1{,}14 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{m}$$

¿Es la única forma de calcularlas?

Diagrama momento-curvatura