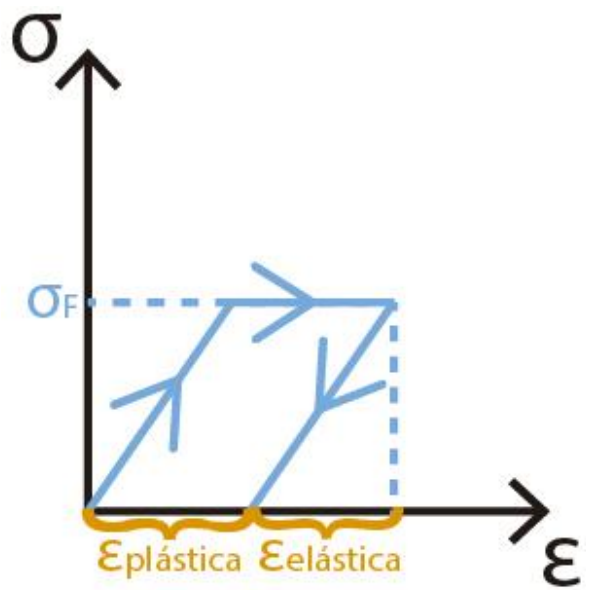
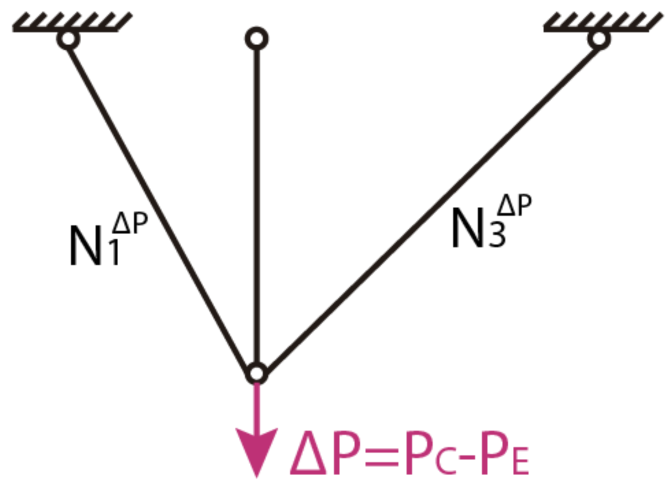
Análisis Elastoplástico – Solicitación Axil





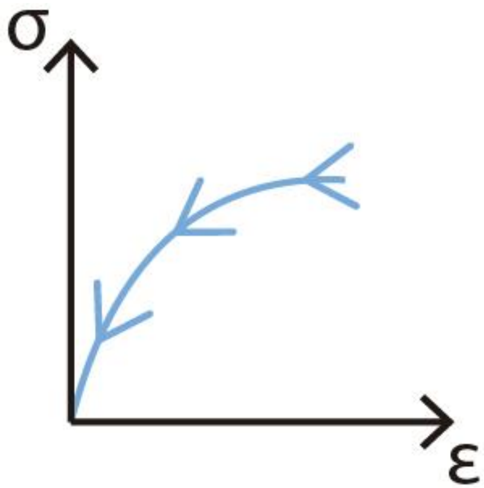
Clara Zaccaría, Catalina Urteneche

Universidad de Buenos Aires

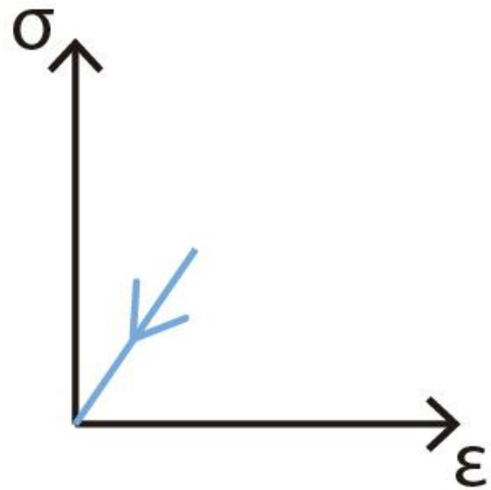
Estabilidad II

Repaso teórico

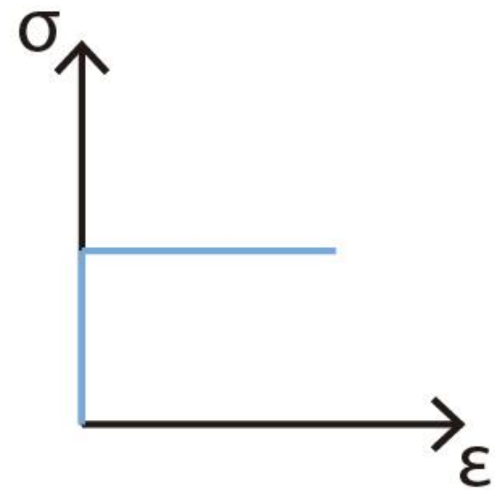
Elasticidad



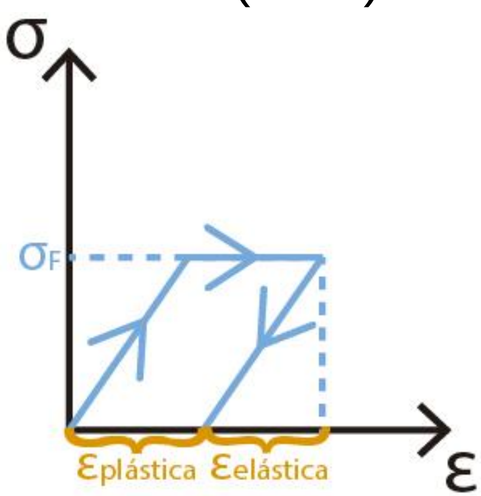
Ley de Hooke-
linealidad mecánica



Plasticidad perfecta



Elasto-plasticidad
lineal (ideal)



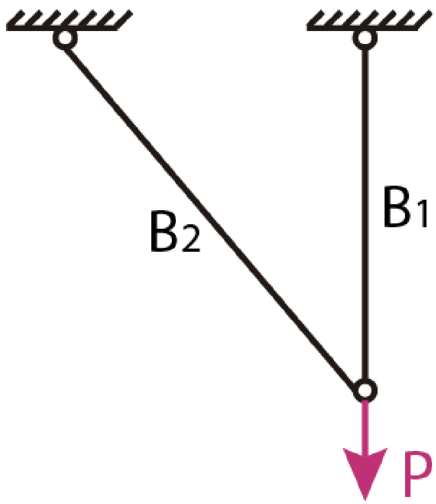
Al alcanzar la tensión de fluencia, deja de ser válida la ley de Hooke ⇨ Deja de ser válida la Superposición de Efectos ya que no se cumple la linealidad mecánica

Repaso teórico

$P_E = carga\ de\ límite\ elástico - encuentro\ plástico$ ⇒ Carga que hace que la primer fibra plastifique

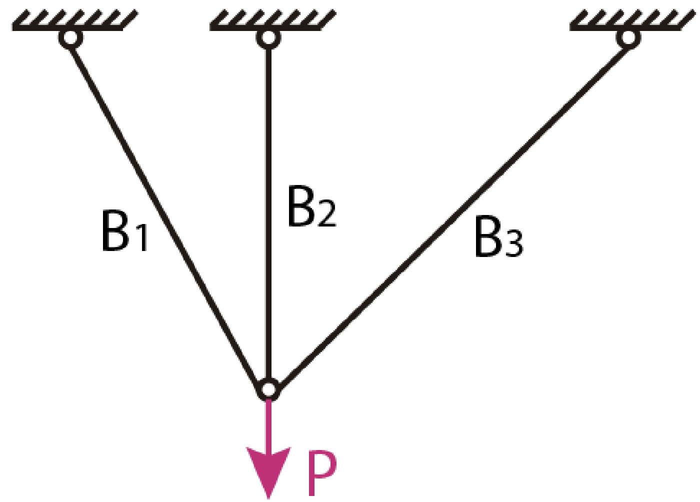
$P_C = carga\ de\ colapso$ ⇒ Carga que hace que la estructura se transforme en un mecanismo

Isostáticos



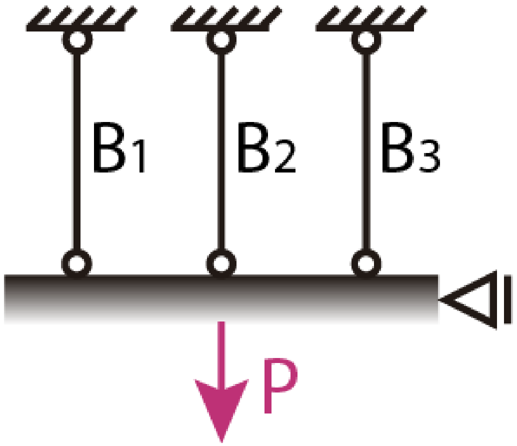
$P_E = P_C$ ya que cuando la primer barra plastifique se transformará en un mecanismo

Hiperestáticos



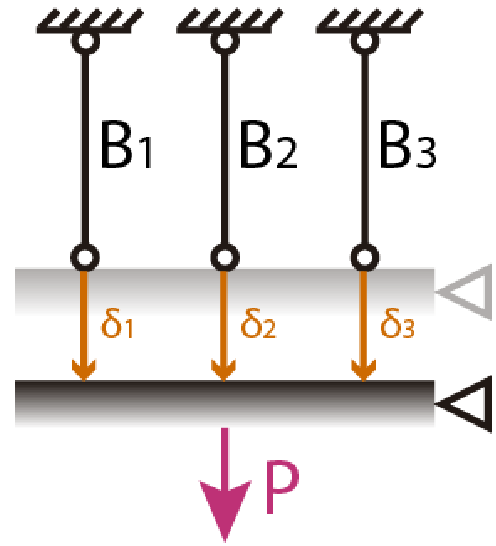
$P_E \neq P_C$ ya que cuando la primer barra plastifique habrá barras que sigan tomando carga

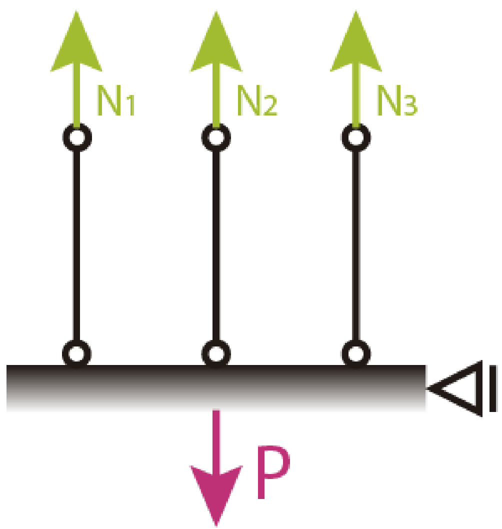
¿Habrá hiperestáticos donde esto no se cumpla?



Suponiendo que

$$E_1 = E_2 = E_3$$
$$A_1 = A_2 = A_3$$





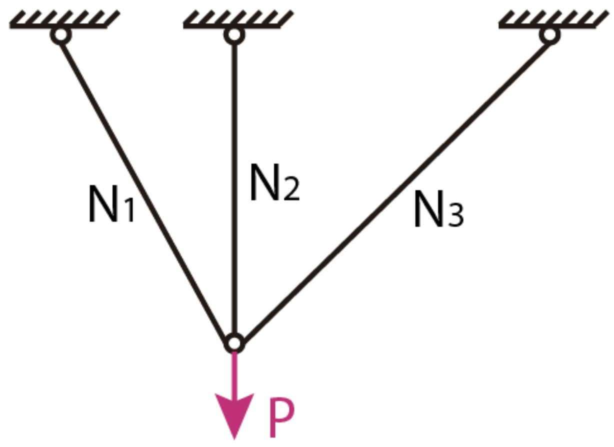
$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{P}{3} \Longrightarrow$$ Las 3 barras alcanzarán la tensión de fluencia al mismo tiempo

Por lo tanto $\Longrightarrow$ $P_E = P_C$

Conclusión

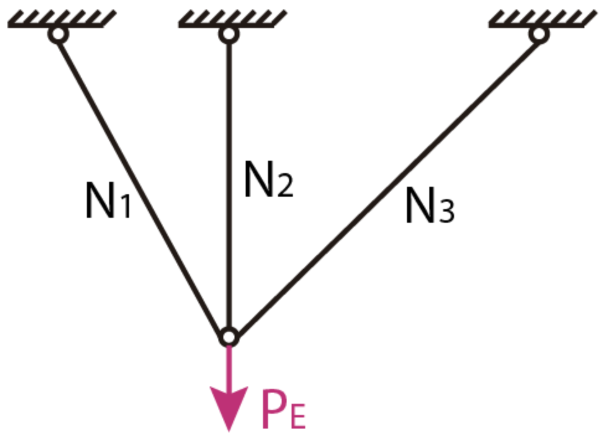
No en todos los hiperestáticos $P_E \neq P_C$

Solicitación Axil en Régimen Anelástico



1er paso: resolver el hiperestático

Hallamos las tensiones de cada barra en función de la carga P



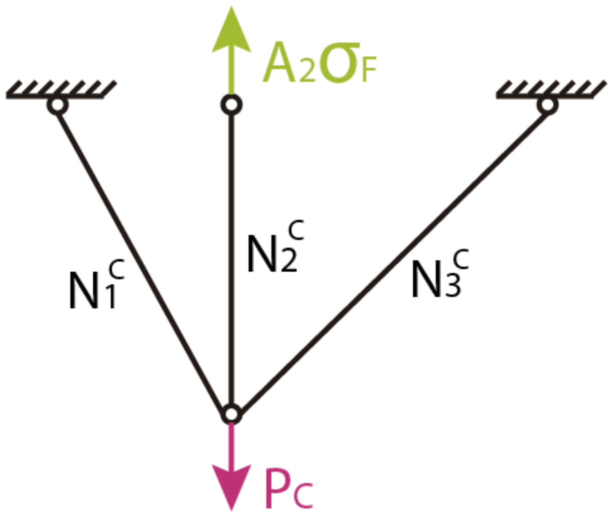
2do paso: hallar la carga de encuentro plástico P_E

Despejamos P_E de:

$$máx\left(\frac{N_1^E(P)}{A_1};\frac{N_2^E(P)}{A_2};\frac{N_3^E(P)}{A_3}\right)=\sigma_F$$

En este caso asumiendo que $\frac{N_2^E(P)}{A_2}$ es máxima, la barra b_2 llega primero a fluencia $\Rightarrow \; N_2^E(P)=A_2\cdot\sigma_F \;\Rightarrow\; P_E$

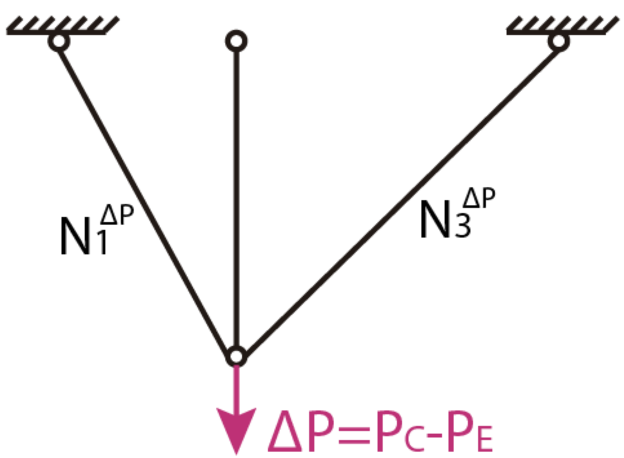
3er paso: hallar la carga de colapso P_C (para hiperestáticos de grado 1)



Opción 1) Reemplazar la barra que entró en fluencia por una fuerza de valor $A_2 \cdot \sigma_F$ y resolver el isostático.

Despejamos P_C de:

$$máx\left(\frac{N_1^C(P_C)}{A_1};\frac{N_3^C(P_C)}{A_3}\right)=\sigma_F$$



Opción 2) Quitar la barra que alcanzó la fluencia y resolver el isostático con carga de valor ΔP.

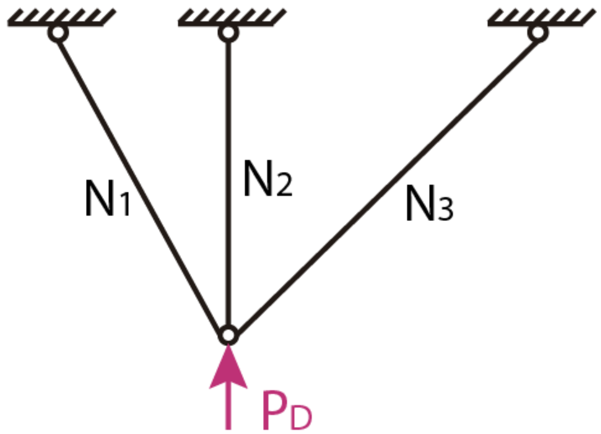
$$N_1^E(P_E)+N_1^{\Delta P}(\Delta P)\leq\sigma_F\cdot A_1$$

$$N_3^E(P_E)+N_3^{\Delta P}(\Delta P)\leq\sigma_F\cdot A_3$$

Elegimos el ΔP que cumple ambas condiciones, es decir, el mínimo

Obtenemos P_C $\Rightarrow$ $P_C=P_E+\Delta P$

¿Que pasa si descargo?



La descarga es lineal. Por lo tanto son las mismas relaciones que en el primer paso elástico

$$\sigma_1^D = \frac{N_1^E(P_D)}{A_1} \; ; \; \sigma_2^D = \frac{N_2^E(P_D)}{A_2} \; ; \; \sigma_3^D = \frac{N_3^E(P_D)}{A_3}$$

Estas tensiones pueden superar el valor de σ_{fl}

Las tensiones y solicitaciones residuales son las de la carga más la descarga

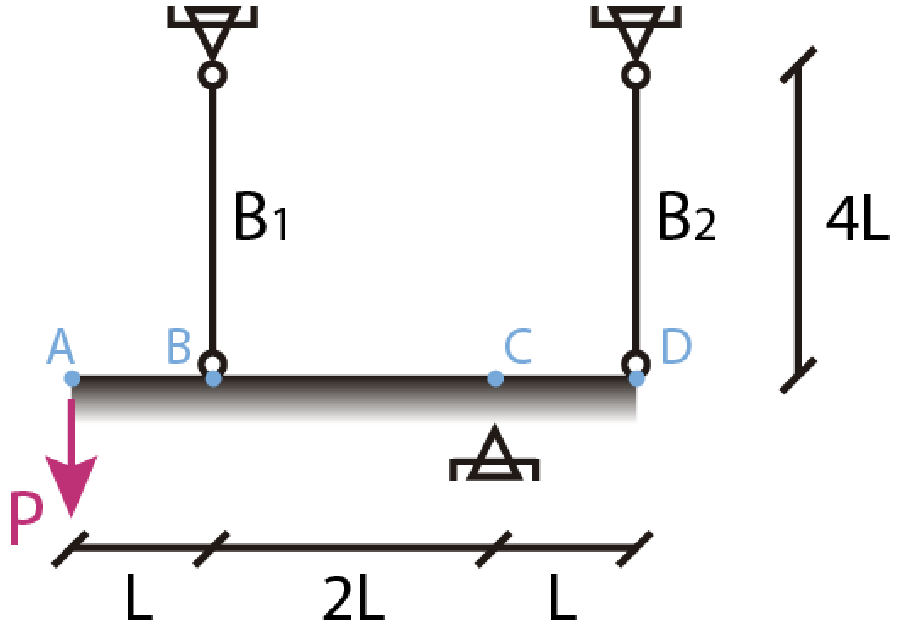
$$N_1^R = N_1^C + N_1^D \qquad N_2^R = N_2^C + N_2^D \qquad N_3^R = N_3^C + N_3^D$$

Estas solicitaciones residuales constituyen un sistema de fuerzas auto equilibradas. Esto quiere decir que las fuerzas exteriores son cero, pero internamente queda con solicitaciones.

Análisis Elastoplástico – Solicitación Axil

Ejercicio

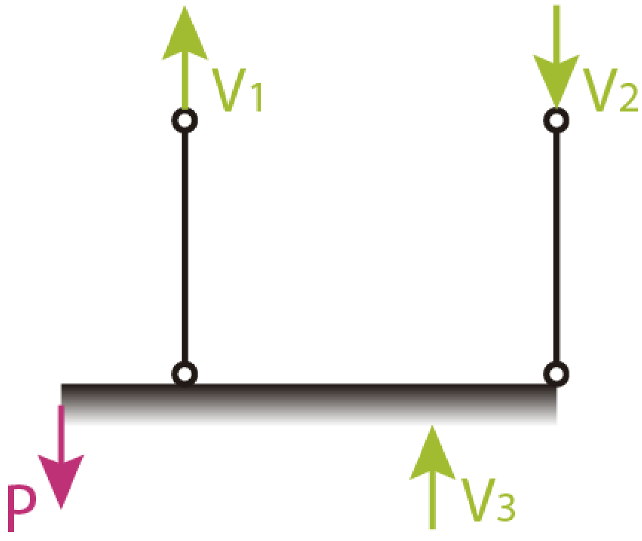
1) Determinar la P_{adm} y el δ_A debido a esa carga
2) Determinar la P_E y el δ_A debido a esa carga
3) Determinar la P_C y el δ_A debido a esa carga
4) Realizar la descarga con P_C, hallando las tensiones residuales y el δ_A residual.
5) Graficar $P - \delta_A$



Datos:

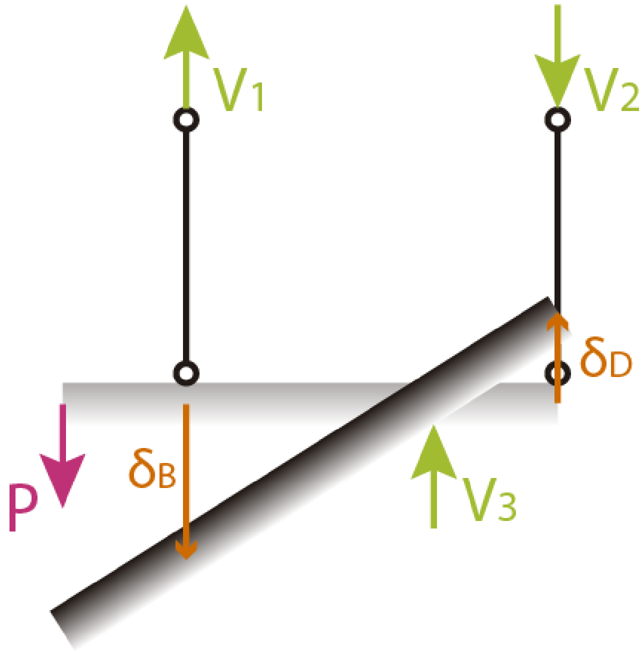
- $E = 20000 \; {}^{kN}/_{cm^2}$
- $A = 4 \; cm^2$
- $\sigma_F = 24 \; {}^{kN}/_{cm^2}$
- $C.S. = 1{,}6$
- $L = 1 \; m$
- $A_{B_1} = A$
- $A_{B_2} = 1{,}5 \cdot A$

Resolvemos el hiperestático por compatibilidad:



$$\sum F_Y = P + V_2 - V_1 - V_3 = 0$$

$$\sum M_C = P \cdot 3L - V_1 \cdot 2L - V_2 \cdot L = 0$$

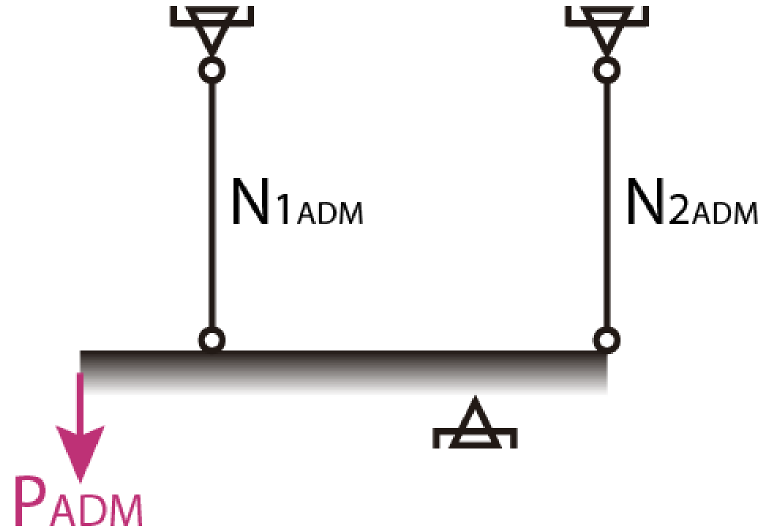


$$\frac{\delta_B}{2L} = \frac{\delta_D}{L}$$

$$\delta_B = \frac{V_1 \cdot 4L}{E \cdot A} \qquad \delta_D = \frac{V_2 \cdot 4L}{E \cdot 1{,}5A}$$

Resolviendo: $V_1 = \frac{12}{11} \cdot P \; , V_2 = \frac{9}{11} \cdot P \; , V_3 = \frac{8}{11} \cdot P$

1) Determinar la P_{adm} y el δ_A debido a esa carga



Como $\sigma_1 > \sigma_2$, P_{adm} queda definida por la barra B_1:

$$N_{1_{adm}} = A_1 \cdot \sigma_{adm}$$

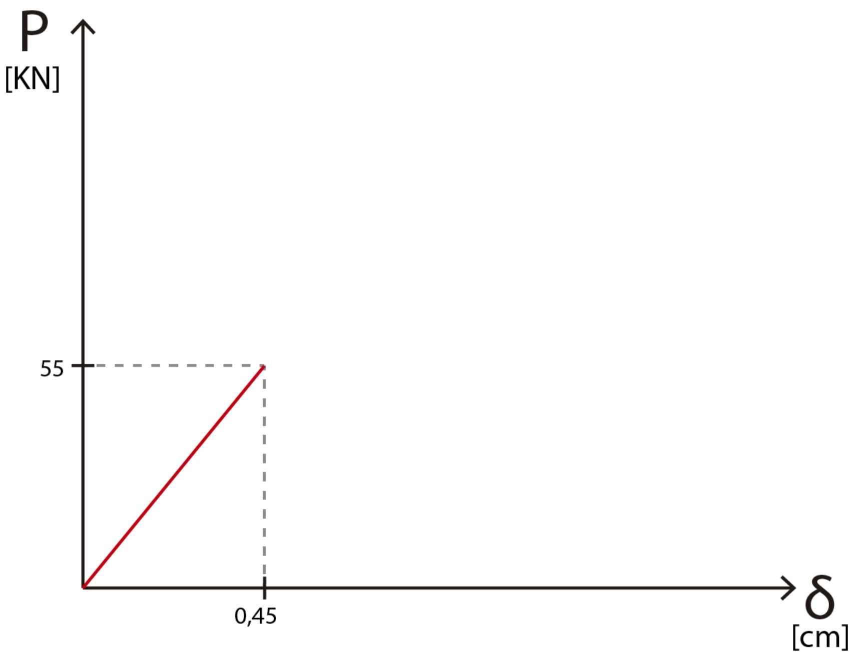
$$\frac{12}{11} \cdot P_{adm} = 4\ cm^2 \cdot \frac{24\ {}^{kN}/_{cm^2}}{1{,}6}$$

$$\boxed{P_{adm} = 55\ kN}$$

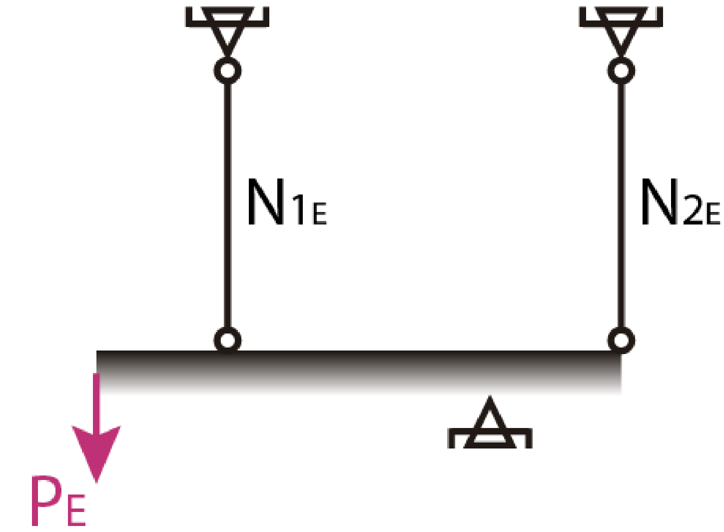
$$\frac{\delta_A}{3L} = \frac{\delta_B}{2L}$$

$$\delta_{A_{adm}} = 1{,}5 \cdot \frac{{}^{12}/_{11} \cdot P_{adm} \cdot 4L}{E \cdot A}$$

$$\boxed{\delta_{A_{adm}} = 0{,}45\ cm}$$



2) Determinar la P_E y el δ_A debido a esa carga

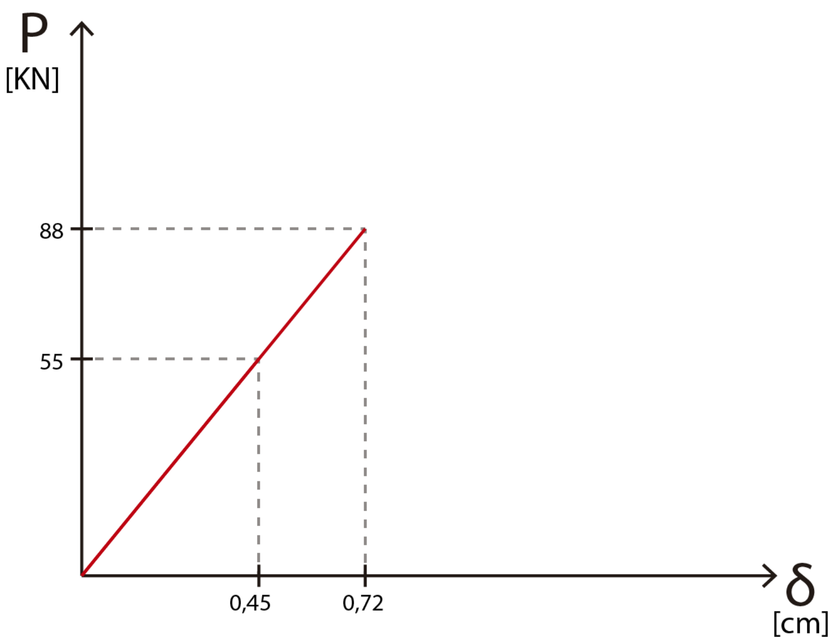


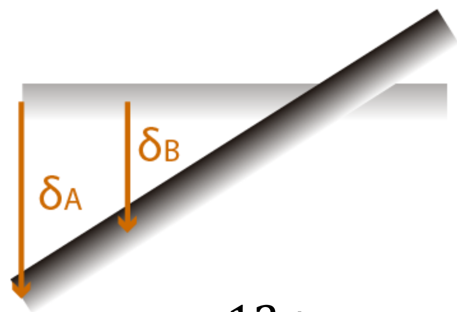
Como $\sigma_1 > \sigma_2$, P_E queda definida por la barra B_1 ya que plastifica primero:

$$N_{1_E} = A_1 \cdot \sigma_F$$

$$\frac{12}{11} \cdot P_E = 4\ cm^2 \cdot 24\ {}^{kN}/_{cm^2}$$

$$\boxed{P_E = 88\ kN}$$



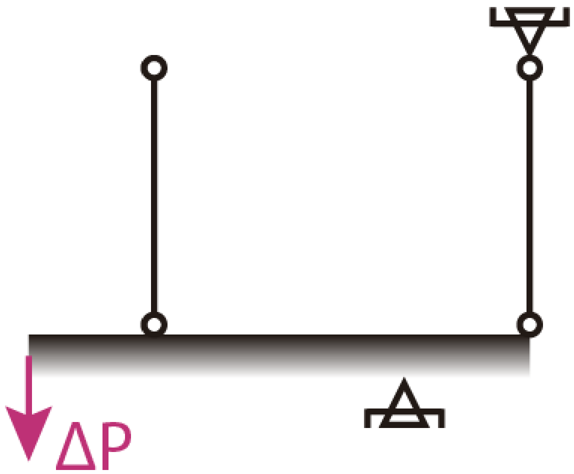


$$\frac{\delta_A}{3L} = \frac{\delta_B}{2L}$$

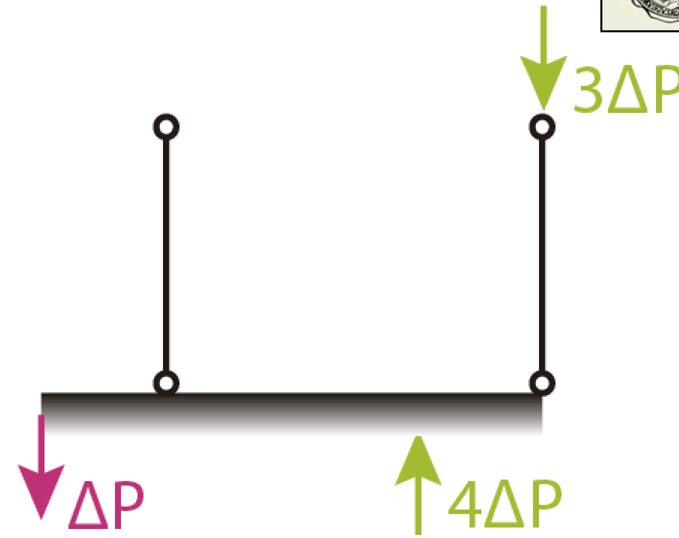
$$\delta_{A_E} = 1{,}5 \cdot \frac{{}^{12}/_{11} \cdot P_E \cdot 4L}{E \cdot A}$$

$$\boxed{\delta_{A_E} = 0{,}72\ cm}$$

3) Determinar la P_C y el δ_A debido a esa carga



Resolviendo
el isostático



$$N_2(P_E) = N_{2_E} = \frac{9}{11} \cdot P_E = 72\ kN$$

$$N_2(\Delta P) = 3 \cdot \Delta P$$

$$N_2(P_E) + N_2(\Delta P) = \sigma_F \cdot A_2$$

$$72\ kN + 3 \cdot \Delta P = N_{2_E} = \sigma_F \cdot 1{,}5 \cdot A$$

$$\Delta P = 24\ kN$$

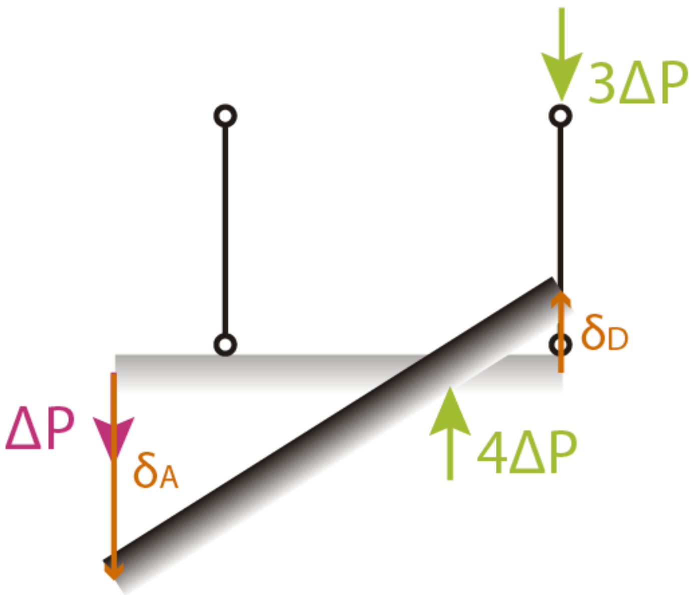
$$P_C = P_E + \Delta P = 88\ kN + 24\ kN$$

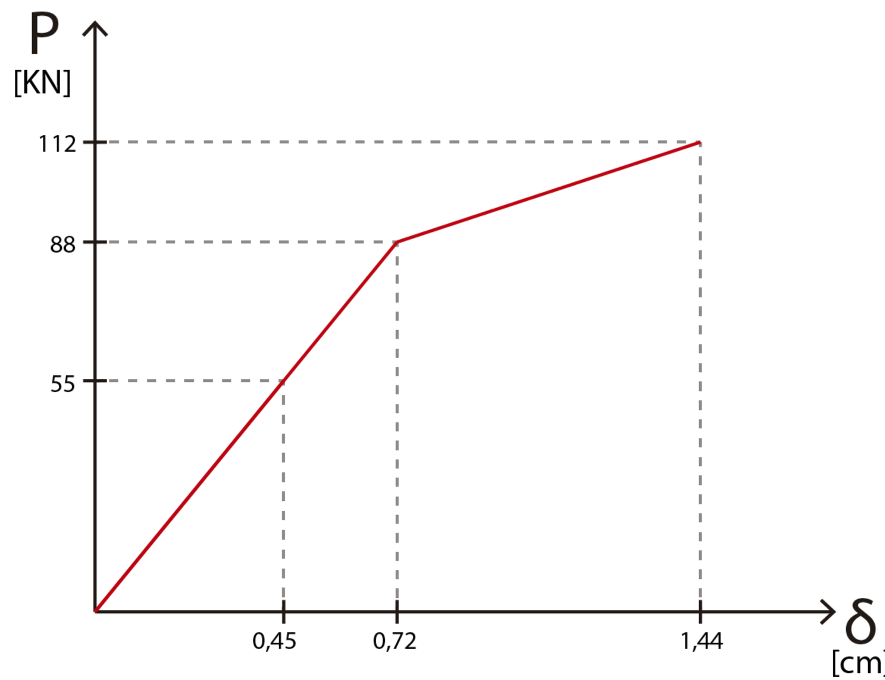
$$\boxed{P_C = 112\ kN}$$

Observación

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta_A}{3L} = \dfrac{\delta_B}{2L} \\ \delta_B = \varepsilon \cdot 4L \end{array}\right\}$$

$\varepsilon \neq \dfrac{N_{2_{P_C}} \cdot L}{E \cdot A_2}$ ya que no es válida la ley de Hooke $\Rightarrow$ $\delta_A = \delta_{A_E} + \delta_{A_{\Delta P}}$



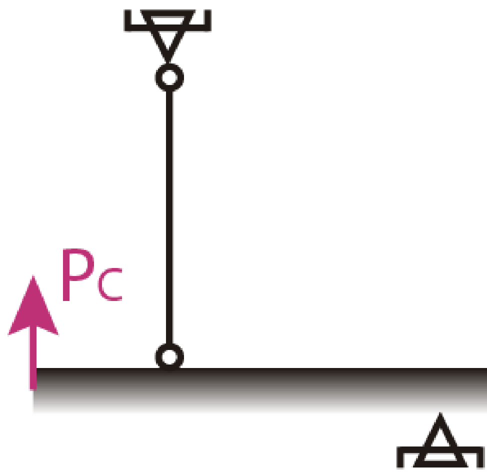


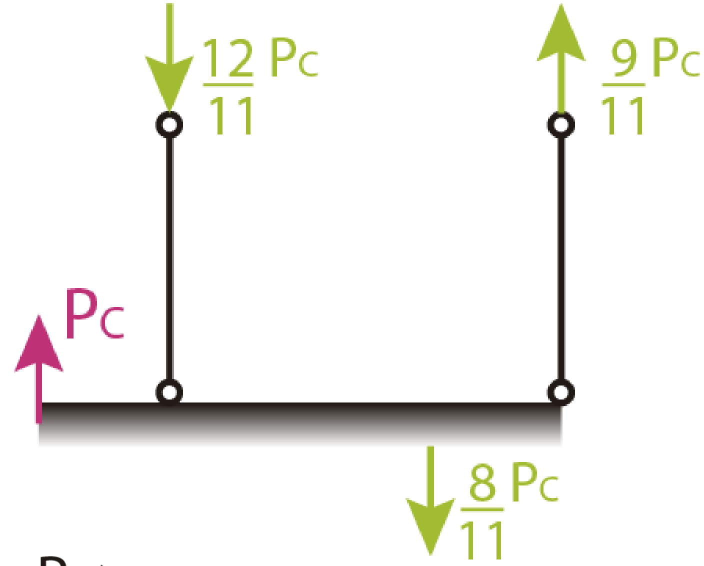
$$\frac{\delta_{A_{\Delta P}}}{3L} = \frac{\delta_{D_{\Delta P}}}{L} \Rightarrow \delta_{A_{\Delta P}} = 3 \cdot \frac{3\Delta P \cdot 4L}{E \cdot 1{,}5A} = 0{,}72\ cm$$

$$\delta_{A_{P_C}} = 0{,}72\ cm + 0{,}72\ cm$$

$$\boxed{\delta_{A_{P_C}} = 1{,}44\ cm}$$

4) Realizar la descarga con P_C, hallando las tensiones residuales y el δ_A residual.



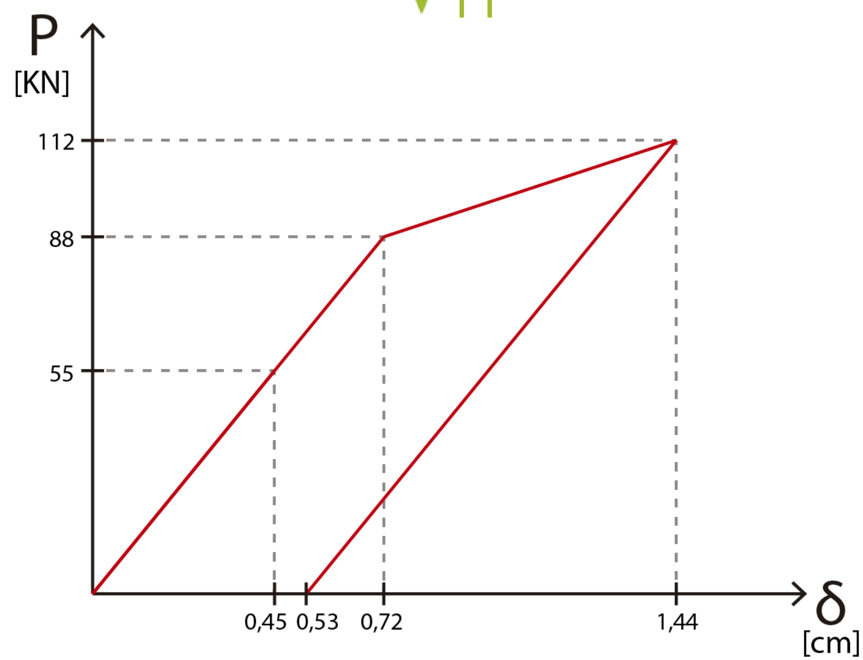


$$\frac{\delta_{A_{descarga}}}{3L} = \frac{\delta_{B_{descarga}}}{2L}$$

La descarga es lineal

$$\delta_{A_{descarga}} = -1{,}5 \cdot \frac{{}^{12}/_{11} \cdot P_C \cdot 4L}{E \cdot A}$$

$$\delta_{A_{descarga}} = -0{,}91\ cm$$



Calculamos las tensiones y el desplazamiento residuales:

$$\sigma_{1_{residual}} = -\frac{26{,}18\ kN}{4\ cm^2}$$

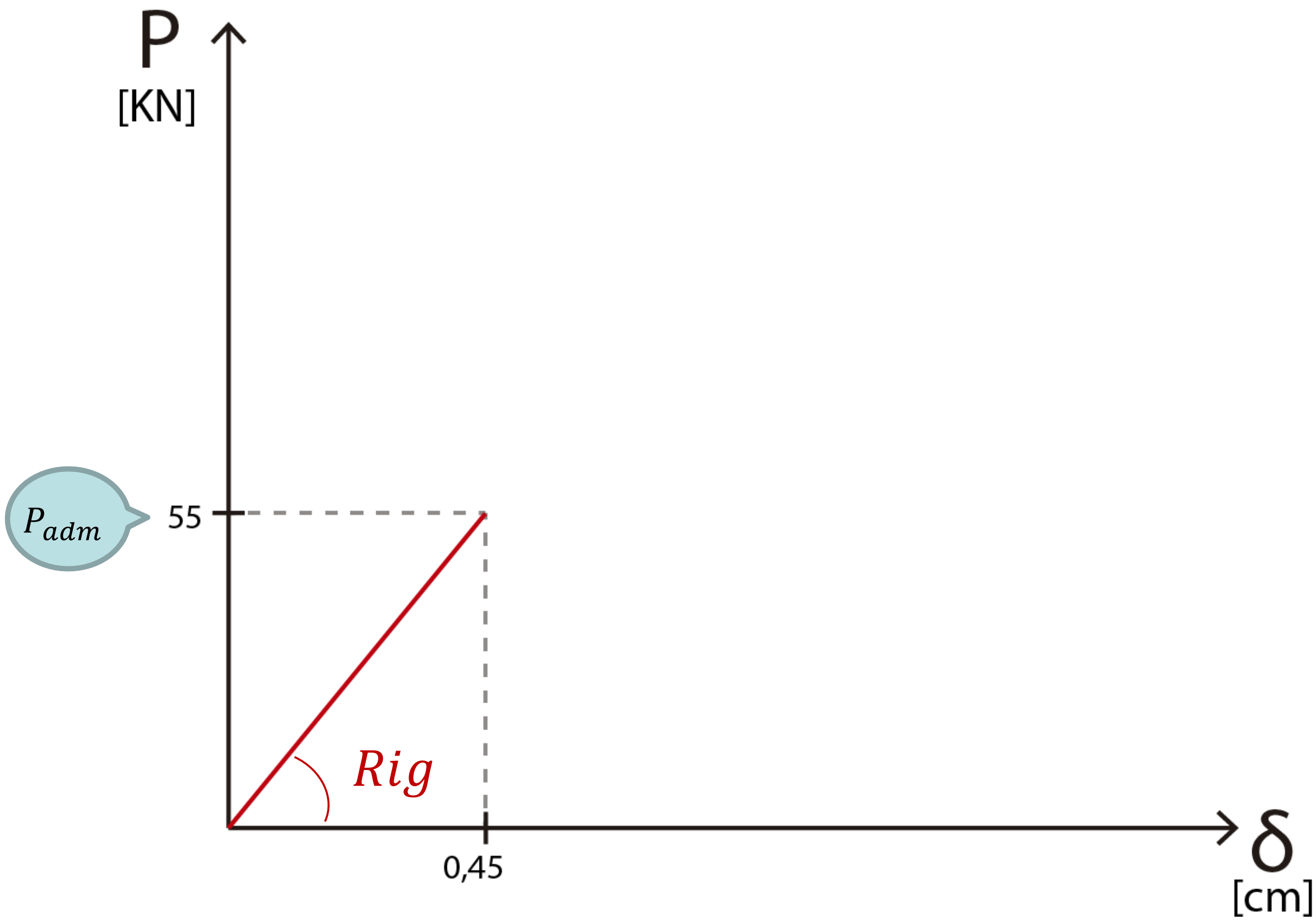
$$\boxed{\sigma_{1_{residual}} = -6{,}545\ {}^{kN}/_{cm^2}}$$

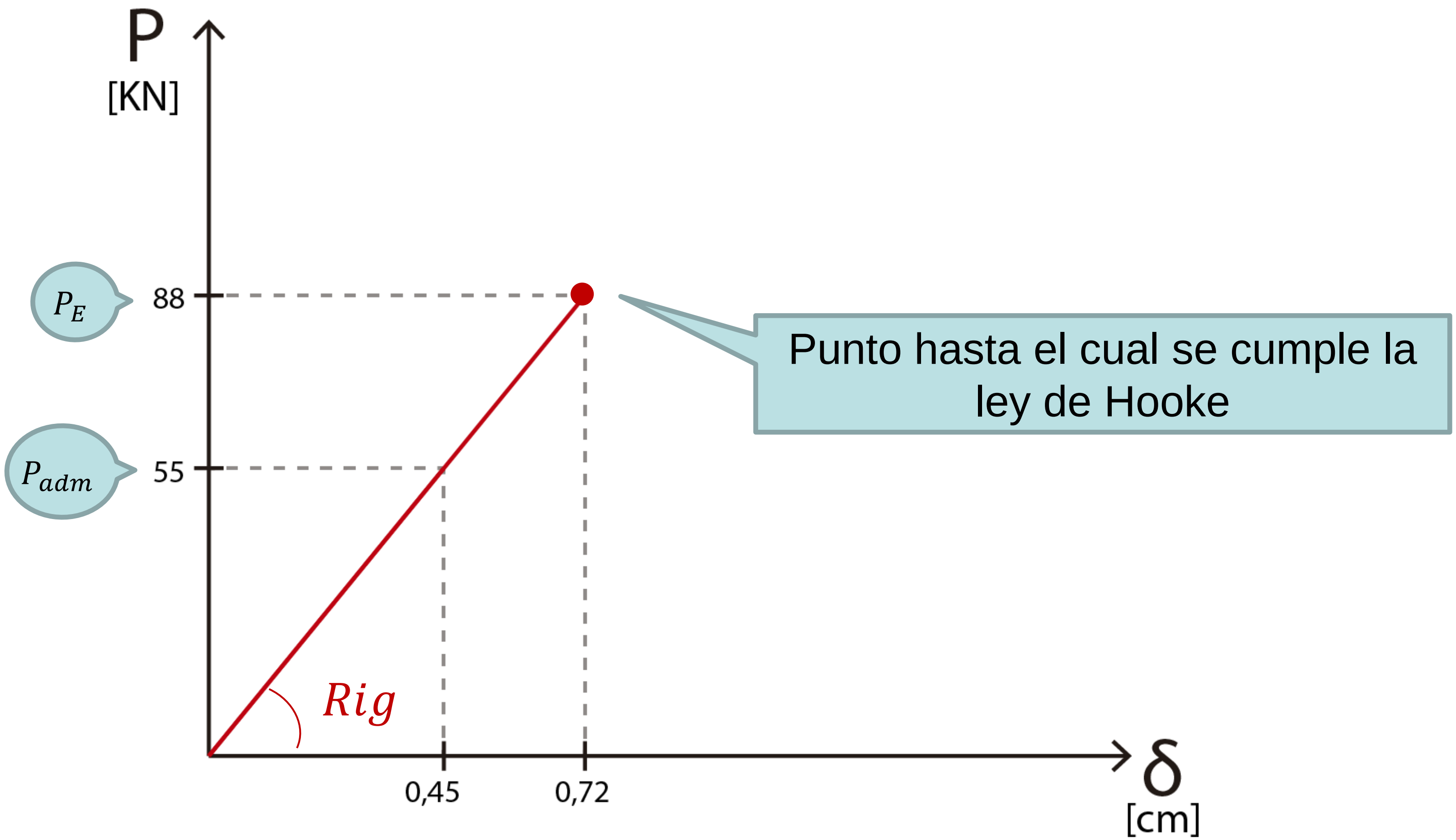
$$\sigma_{2_{residual}} = -\frac{52{,}36\ kN}{1{,}5 \cdot 4\ cm^2}$$

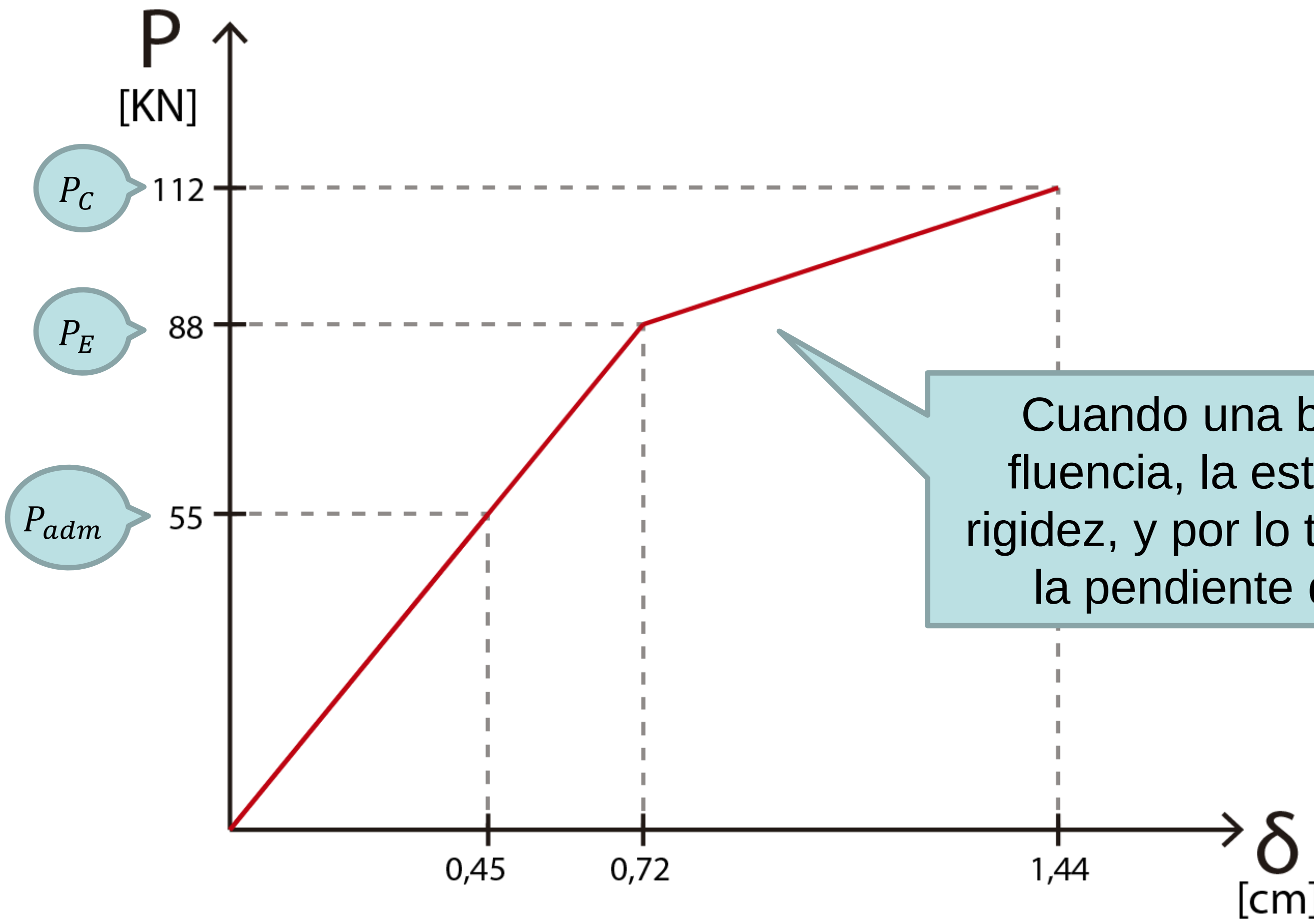
$$\boxed{\sigma_{2_{residual}} = -8{,}727\ {}^{kN}/_{cm^2}}$$

$$\delta_{A_{residual}} = \delta_{A_{carga}} + \delta_{A_{descarga}} = 1{,}44\ cm - 0{,}91\ cm$$

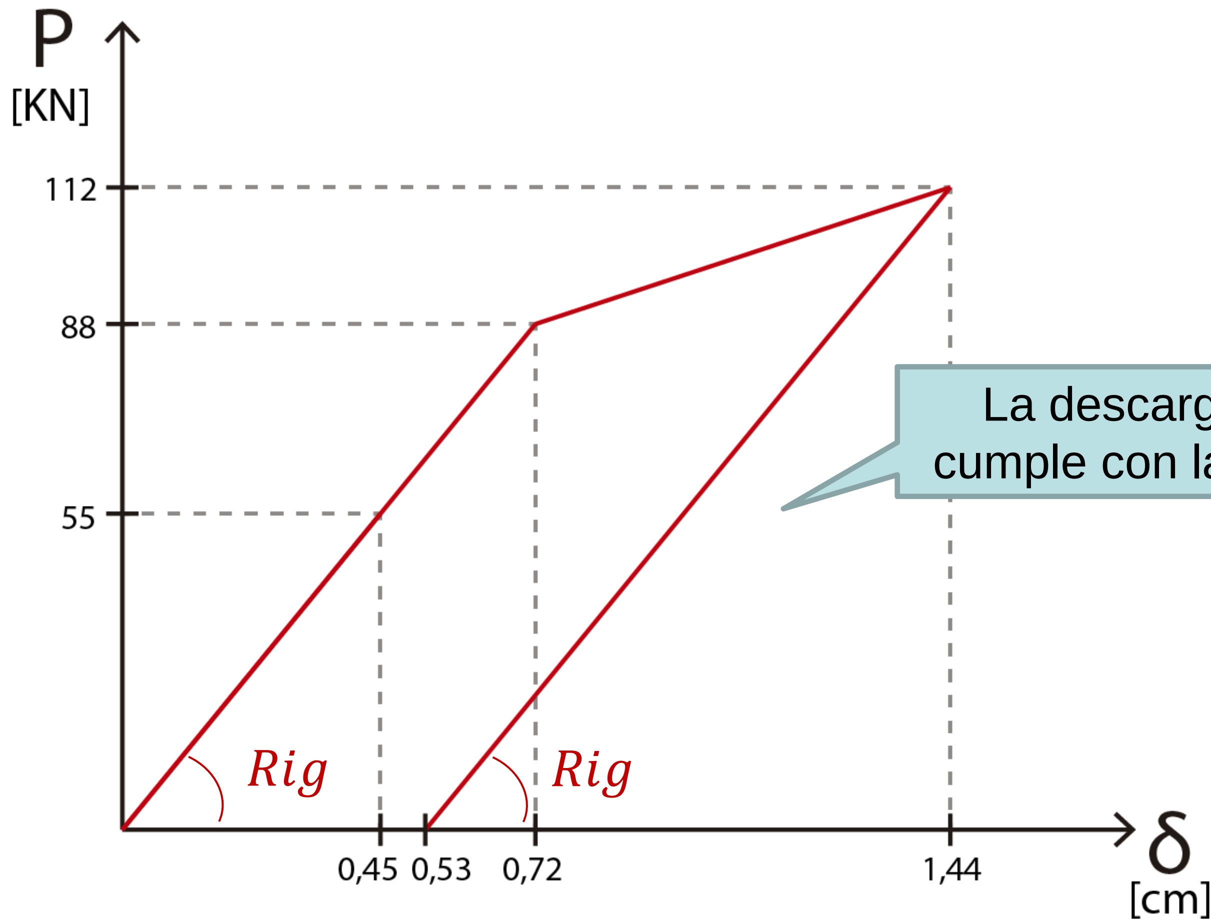
$$\boxed{\delta_{A_{residual}} = 0{,}53 cm}$$


P
[KN]
P_{adm}
55
Rig
0,45
δ
[cm]

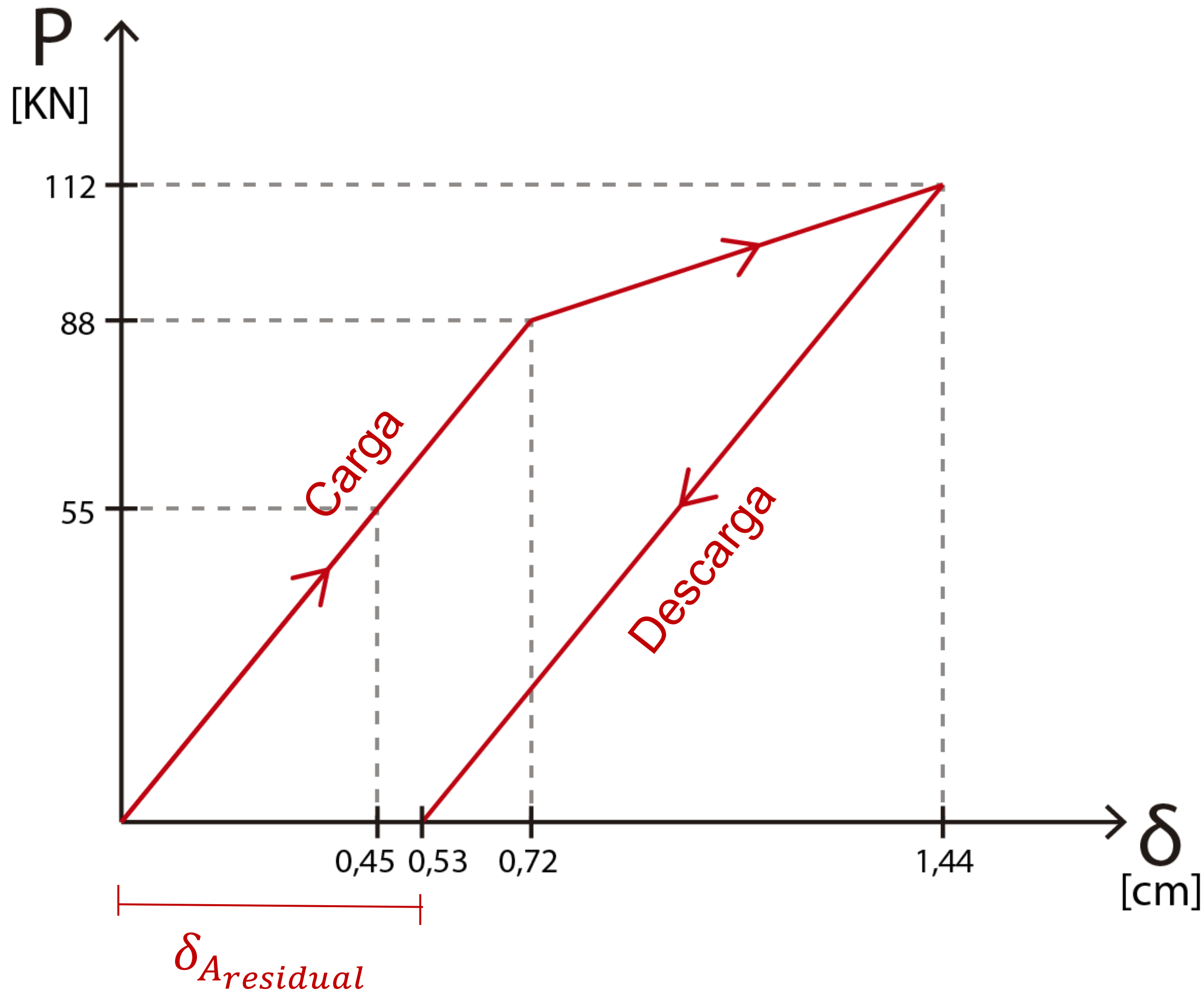

P
[KN]
P_E
88
P_{adm}
55
Rig
0,45
0,72
δ
[cm]
Punto hasta el cual se cumple la ley de Hooke



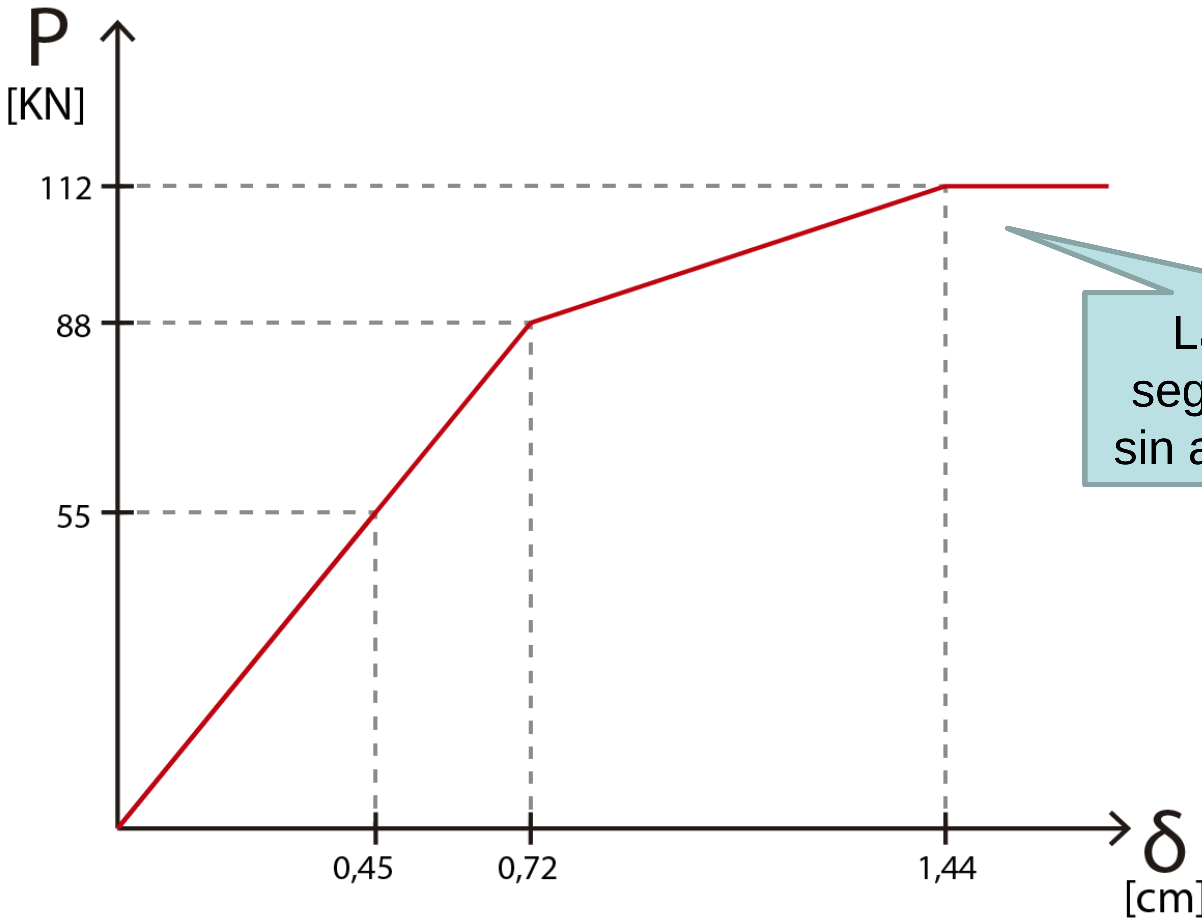
Cuando una barra entra en fluencia, la estructura pierde rigidez, y por lo tanto, disminuye la pendiente del diagrama



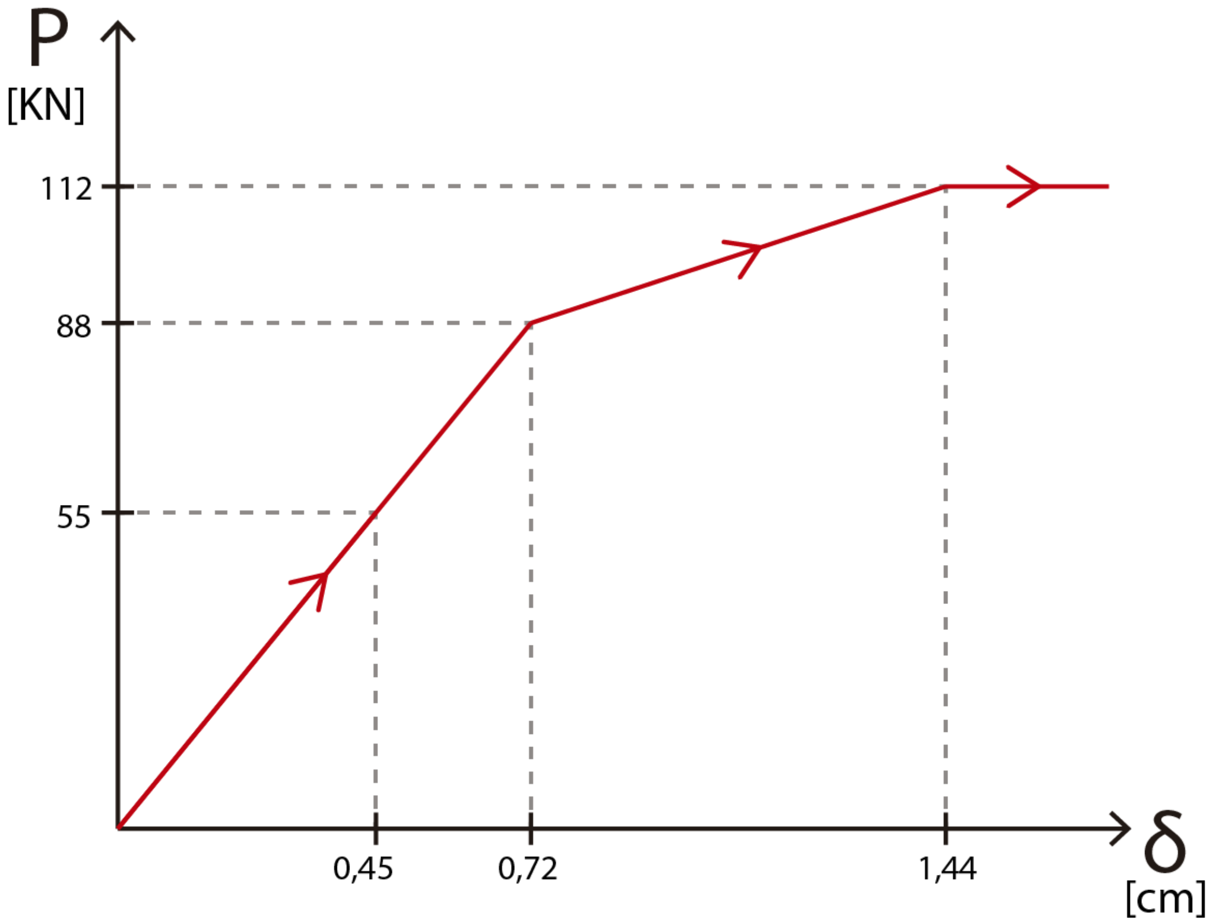
La descarga es lineal y cumple con la ley de Hooke


P
[KN]
112
88
55
Carga
Descarga
δ
[cm]
0,45
0,53
0,72
1,44
$\delta_{A_{residual}}$

¿Qué pasaría si no realizáramos la descarga?



La estructura se seguirá deformando sin aumentar la carga



P
[KN]
112
88
55
0,45
0,72
1,44
δ
[cm]