SOLICITACIÓN POR FLEXIÓN EN RÉGIMEN ANELÁSTICO:

I) → FLEXIÓN SIMPLE.

II) → FLEXIÓN COMPUESTA.

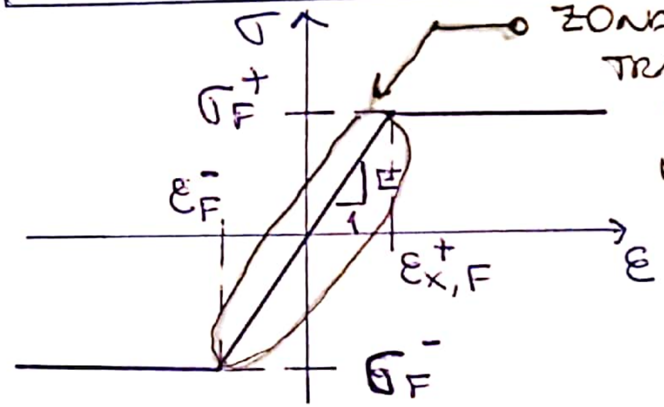
1) PARTIENDO DE LA HBN:

$$\begin{cases} \varepsilon_{x,z} = \dfrac{z}{z_{máx}} \cdot \varepsilon_{x,máx} \\[2ex] \varepsilon_{x,z} = \dfrac{z}{1} \cdot \bar{\varepsilon}_x \end{cases}$$

2) ECS DE EQUIVALENCIA:

$$\begin{cases} N = 0 = \int_A \sigma_x \cdot dA \\[2ex] M_y = \int_A \overbrace{\sigma_x \cdot z \cdot dA}^{dF} \end{cases}$$

3) PERÍODO ELÁSTICO



ZONA DE TRABAJO. RÉGIMEN ELÁSTICO.

4) EXPRESIÓN DE FLEXIÓN:

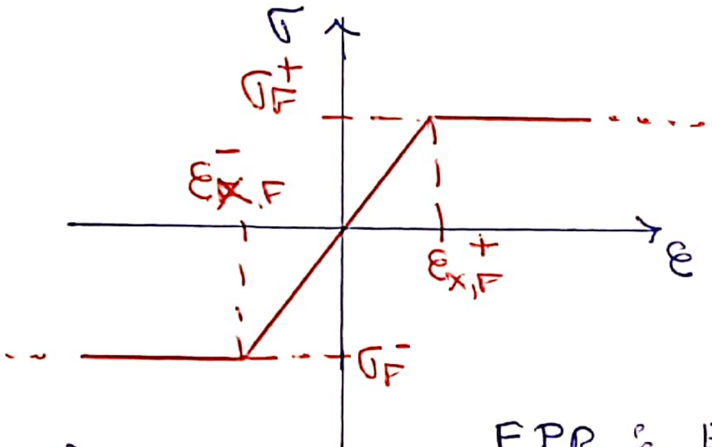
$$\sigma_x = \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

↳ FLEXIÓN SIMPLE RECTA.

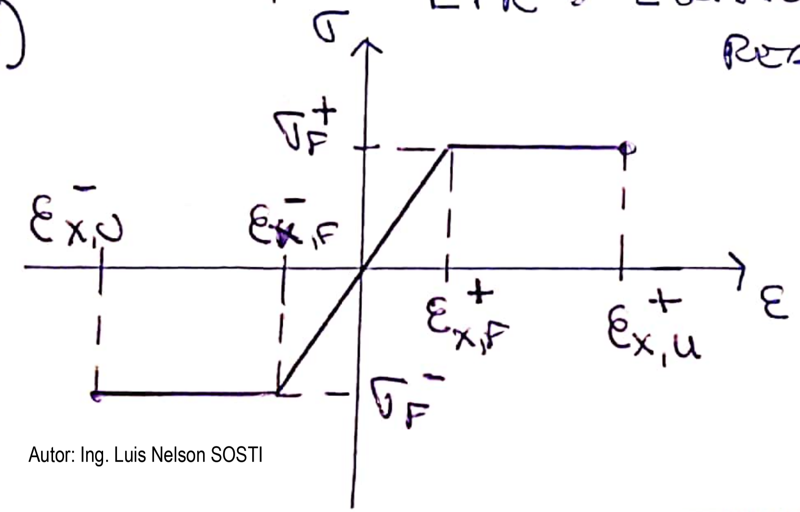
FLEXIÓN SIMPLE RECTA - ANELÁSTICO

I → TIPOS DE COMPORTAMIENTO DEL MATERIAL:

1) → EPI: ELASTO-PLÁSTICO IDEAL.

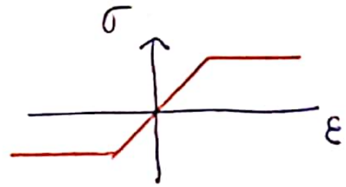


2) EPR: ELASTO-PLÁSTICO REAL.

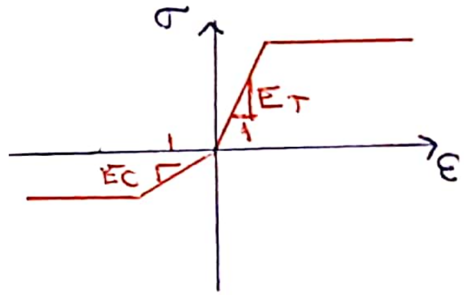


3) - VARIOS:

a) → $E_T = E_C$.



b) → $E_T \neq E_C$.



c) → $\begin{cases} \sigma_F^+ = \sigma_F^- \\ \sigma_F^+ \neq \sigma_F^- \end{cases}$

d) → $\begin{cases} \varepsilon_F^+ = \varepsilon_F^- \\ \varepsilon_F^+ \neq \varepsilon_F^- \end{cases}$

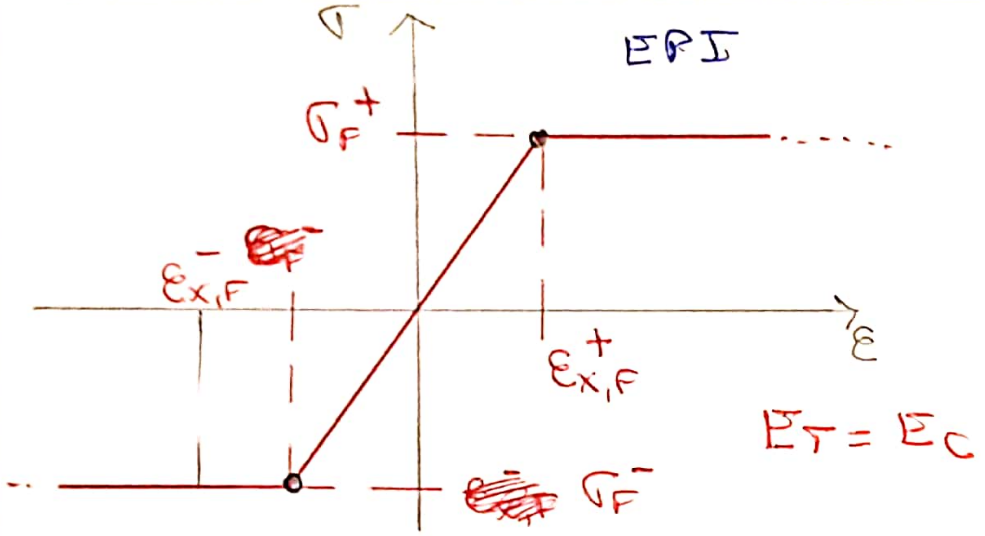
II → TIPOS DE SECCIONES:

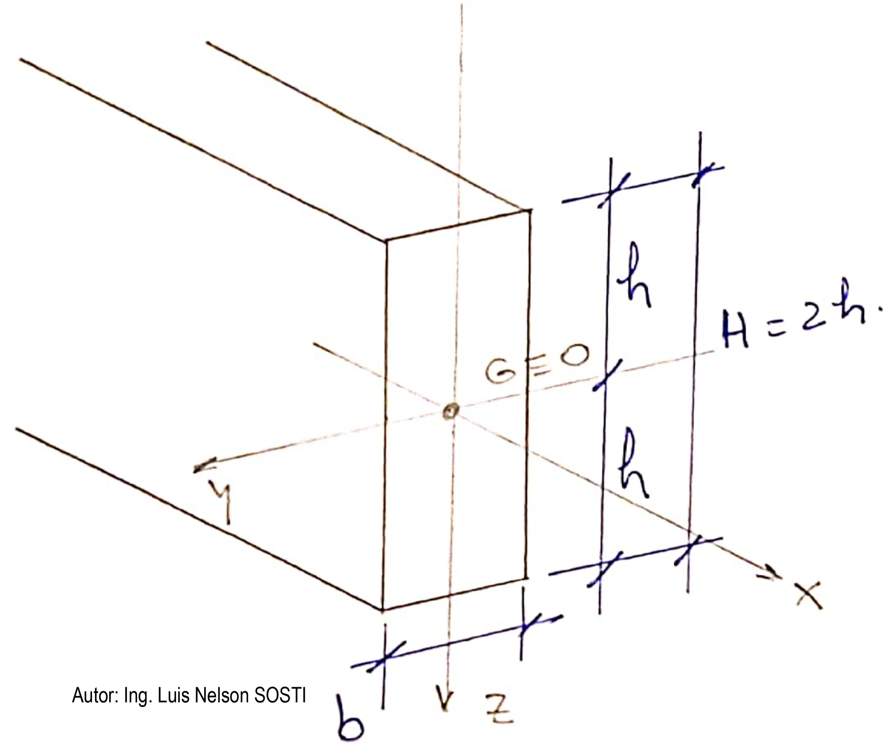
1) → DE DOBLE SIMETRÍA.

2) → " SIMPLE SIMETRÍA.

3) → CUALESQUIERA S/ EJES DE SIMETRÍA.

SECCIÓN RECTANGULAR - EPI. - DIAGRAMA BILINEAL:





PERÍODO ELÁSTICO

- Si $\sigma_{máx} \leq \sigma_F \rightarrow \sigma_{máx} = \frac{M_y}{I_y} \cdot h.$

- $\sigma_{ADM} = \frac{\sigma_F}{CS} \rightarrow \sigma_{ADM} = \frac{M_{y,ADM}}{I_y} \cdot h.$

$$M_{y,ADM} = \frac{I_y}{h} \cdot \sigma_{ADM} = \frac{b(2h)^3}{12\,h} \sigma_{ADM}$$

$$\boxed{M_{y,ADM} = \frac{2}{3} b h^2 \sigma_{ADM}} \quad (1)$$

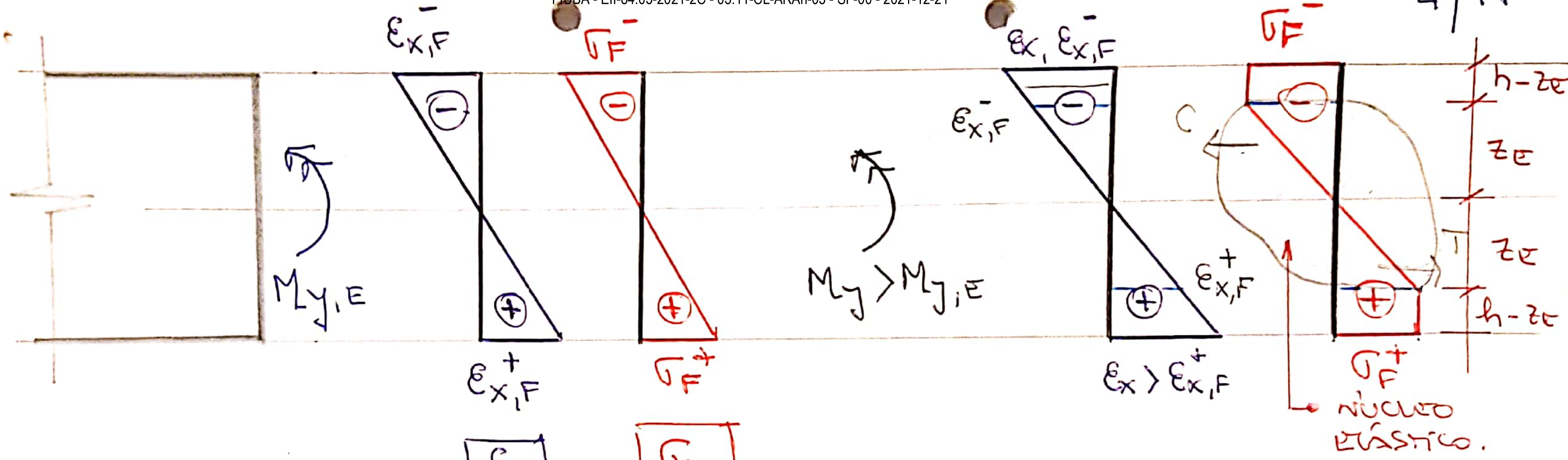
- $\sigma_{máx} = \sigma_F \rightarrow \sigma_F = \frac{M_{y,E}}{I_y} \cdot h.$

$$M_{y,E} = \frac{I_y}{h} \cdot \sigma_F \rightarrow \boxed{M_{y,E} = \frac{2}{3} b h^2 \sigma_F} \quad (2)$$

$M_{y,E}$: MOMENTO FLECTOR ELÁSTICO.

$M_{y,E} = M_{y,F}$

4 | 17



- EN RÉGIMEN ANELÁSTICO SIGUE VALIENDO $\boxed{HBN}$

$$\sigma_{x,F} = \frac{M_{y,E}}{I_y} h = \frac{M_{y,E}}{I_y/h} = \frac{M_{y,E}}{S_y}$$

S_y: MÓDULO RESISTENTE ELÁSTICO.

$$\boxed{M_{y,E} = \sigma_{x,F} \cdot S_y} \quad (3).$$

- NÚCLEO ELÁSTICO:

$$-z_E \leq z \leq z_E$$

- ZONA PLÁSTICA:

$$|(h - z_E)|$$

I $\quad z_E \leq z \leq h$

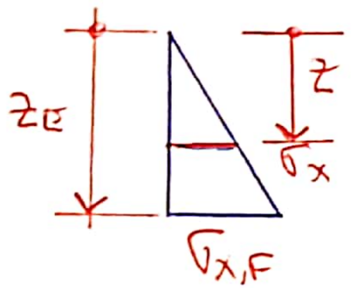
II $\quad -h \leq z \leq -z_E$.

ECS. DE EQUIVALENCIA:

$$M_y = \int_A \sigma_x . z . dA = \int_{-h}^{h} \sigma_x . z . \underbrace{b\, dz}_{dA} = 2 . \int_0^h \sigma_x . z . b\, dz$$

$$M_y = 2 \left[\int_0^{z_E} \sigma_x . z . b\, dz + \int_{z_E}^{h} \sigma_x . z . b\, dz \right]$$

$0 \leq z \leq z_E \rightarrow \dfrac{\sigma_x}{z} = \dfrac{\sigma_{x,F}}{z_E} \rightarrow \sigma_x = \sigma_{x,F} . \dfrac{z}{z_E}$



$z_E \leq z \leq h \rightarrow \sigma_x = \sigma_{x,F}.$

$$M_y = 2 \left[\int_0^{z_E} \sigma_{x,F} \frac{z^2}{z_E} b\, dz + \int_{z_E}^{h} \sigma_{x,F} . z\, b\, dz \right].$$

$$M_y = 2 \left[\frac{\sigma_{x,F} . b}{z_E} \int_0^{z_E} z^2\, dz + \sigma_{x,F} . b \int_{z_E}^{h} z\, dz \right]$$

$$M_y = 2\left[\frac{\sigma_{x,F}\cdot b}{z_e}\cdot\frac{z^3}{3}\Big|_0^{z_e} + \sigma_{x,F}\cdot b\,\frac{z^2}{2}\Big|_{z_e}^{h}\right] = 2\left[\frac{\sigma_{x,F}\, b}{\cancel{z_e}}\frac{z_e^{\cancel{3}\,2}}{3} + \sigma_{x,F}\, b\left(\frac{h^2}{2}-\frac{z_e^2}{2}\right)\right]$$

$$M_y = \frac{2}{3}\, b\cdot z_e^2\cdot\sigma_{x,F} + b\cdot(h^2 - z_e^2)\,\sigma_{x,F}\,.$$

$$M_y = \frac{2}{3}\, b\, z_e^2\cdot\sigma_{x,F} + b h^2\sigma_{x,F} - b z_e^2\,\sigma_{x,F}$$

$$\boxed{M_y = b h^2\sigma_{x,F} - \frac{1}{3}\, b z_e^2\,\sigma_{x,F}} \qquad (4)$$

$$\boxed{M_y = b h^2\sigma_{x,F}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{z_e^2}{h^2}\right]} \qquad (5).$$

$$(2)\quad M_{y,e} = \frac{2}{3}\, b h^2\sigma_{x,F}$$

$$\frac{M_y}{M_{y,e}} = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{M_y = \frac{3}{2} M_{y,e}}$$

$$\boxed{M_y = \frac{3}{2} M_{y,e}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{z_e^2}{h^2}\right]} \qquad (6)$$

SECCIONES "PARCIALMENTE PLASTIFICADAS".

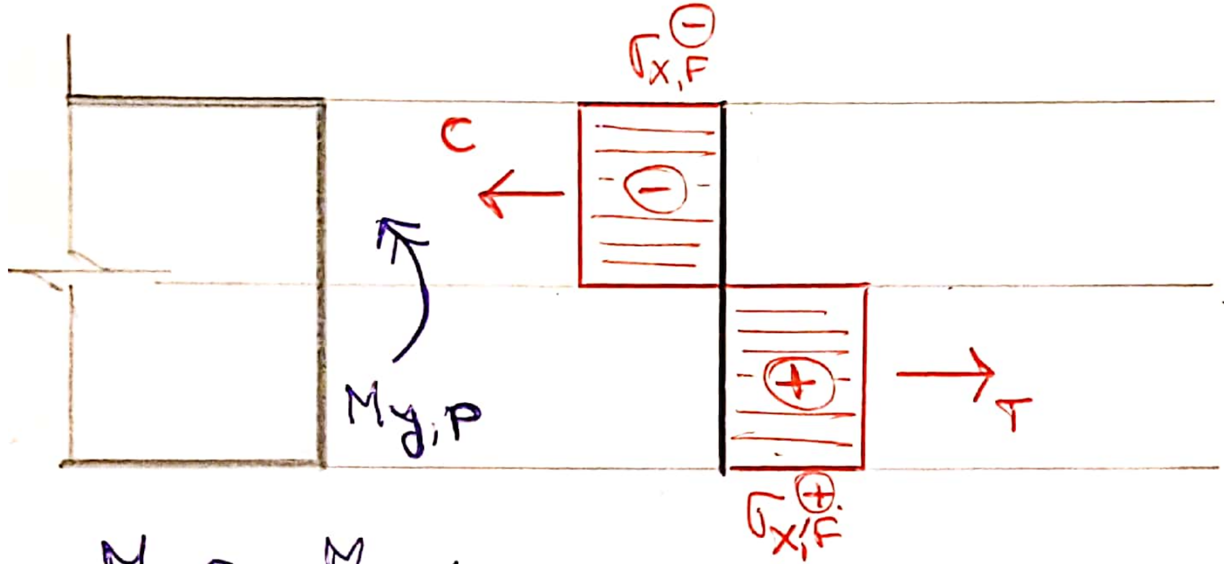
$z_e = h$

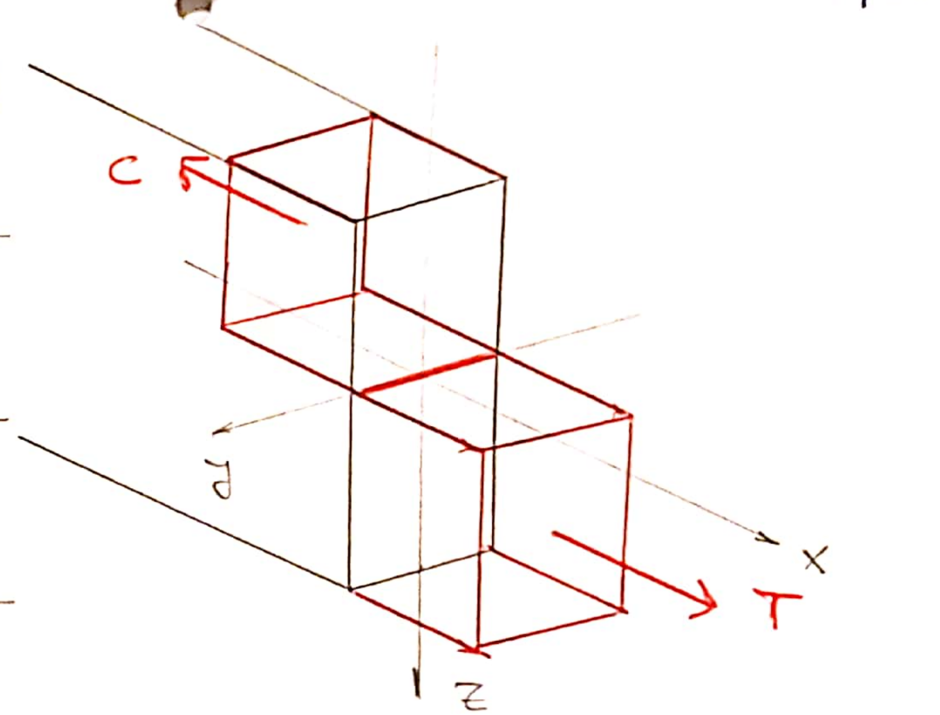
de (6) $M_y = \frac{3}{2} M_{y,e}\left[1 - \frac{1}{3}\right]$

$$M_y = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} M_{y,e}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}$$

$$\boxed{M_y = M_{y,e}}$$

SECCIÓN TOTALMENTE PLASTIFICADA:





$$M_{y,P} = M_{y,u}$$

$$C = T = \sigma_{x,F} \cdot b \cdot h. \; ; \; z = h. \; ; \; M_{y,P} = M_{y,u} = C \cdot z = T \cdot z$$

$$\boxed{M_{y,P} = M_{y,u} = \sigma_{x,F} \cdot bh.h = bh^2 \sigma_{x,F}} \quad (7).$$

EN PLASTIFICACIÓN TOTAL $z_E = 0$.

DE (4) $M_y = bh^2 \sigma_{x,F}$

DE (5) $M_y = bh^2 \sigma_{x,F}$

DE (6) $M_y = \frac{3}{2} M_{y,E}$

$$\boxed{M_{y,P} = \frac{3}{2} M_{y,E}} \quad (8).$$

FACTOR DE FORMA:

DE (2) $M_{y,E} = \frac{2}{3} b h^2 \sigma_{x,F}$

DE (7) $M_{y,P} = b h^2 \sigma_{x,F}$.

$$\frac{M_P}{M_E} = \frac{b h^2 \sigma_{x,F}}{\frac{2}{3} b h^2 \sigma_{x,F}} = \frac{3}{2} = k$$

FACTOR DE FORMA.

$$\boxed{\frac{M_E}{\sigma_F}} = \frac{\frac{2}{3} b h^2 \cancel{\sigma_{x,F}}}{\cancel{\sigma_{x,F}}} = \frac{2}{3} b h^2 = \boxed{S_y}$$

P/ SECCIÓN RECTANGULAR.

$$\boxed{\frac{M_P}{\sigma_F}} = \frac{b h^2 \cancel{\sigma_{x,F}}}{\cancel{\sigma_{x,F}}} = b h^2 = Z_y$$

Z_y: MÓDULO PLÁSTICO DE LA SECCIÓN.

$$\boxed{\begin{aligned} M_P &= Z_y \cdot \sigma_F \\ M_E &= S_y \cdot \sigma_F \end{aligned}} \quad (9).$$

P/ SECCIÓN RECTANGULAR

$$\frac{Z_y}{S_y} = \frac{b h^2}{\frac{2}{3} b h^2} = \frac{3}{2} = \frac{M_P}{M_E}.$$

P/ SECCIÓN RECTANGULAR $k = 1{,}50$.

P/ " CUADRADA $k = 2{,}00$

P/ IPN 200 $S_y = 214$

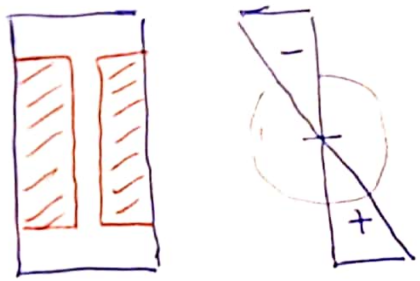
$Z_y = 250$

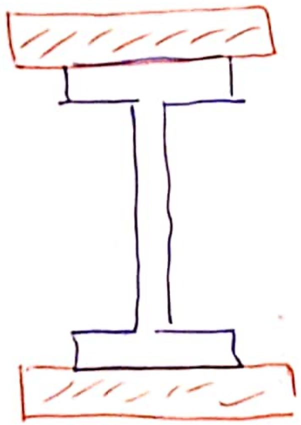
$k = 1{,}168$

- P/ DOBLE 'T' 1,08 a 1,20.

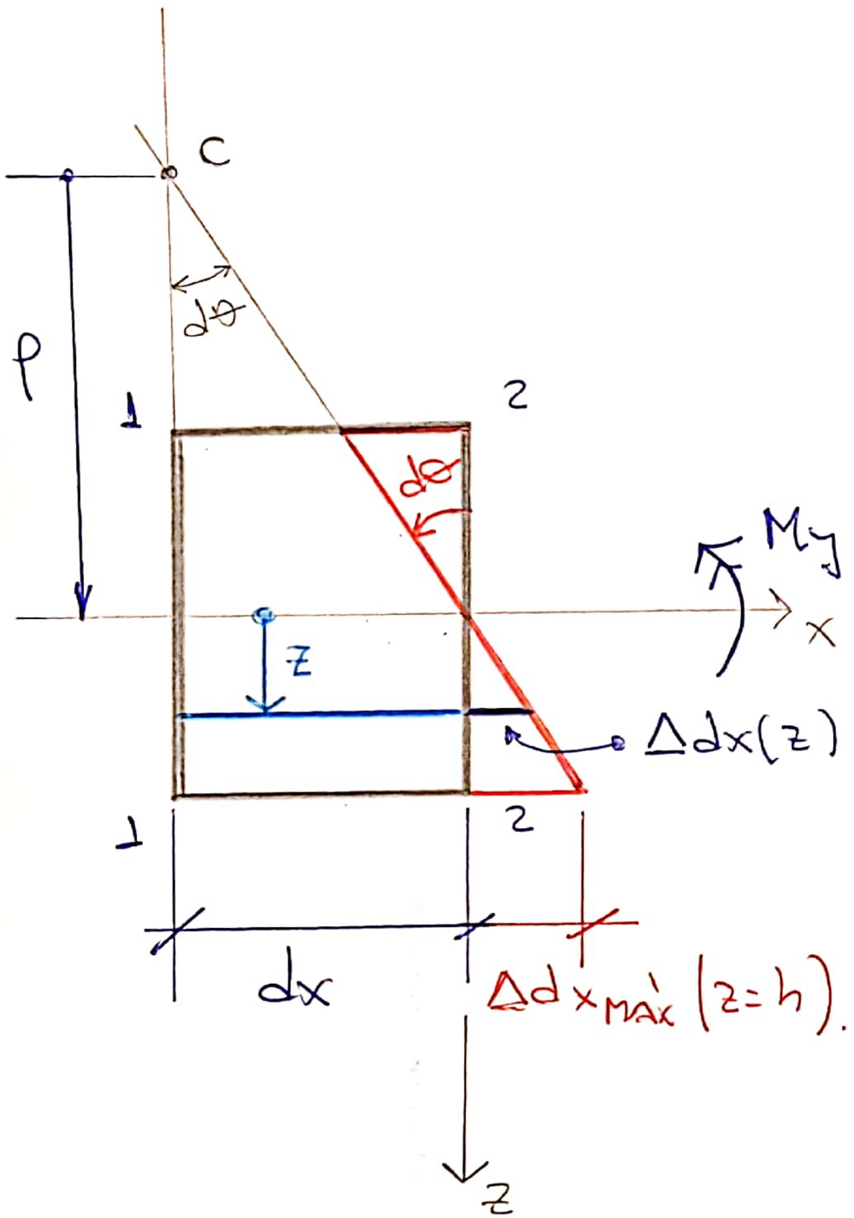
UDS ELEGIRÍAN UNA SECCIÓN CON UN FACTOR DE FORMA + GRANDE O MÁS CHICO ???

$\hookrightarrow$ k CUANTO + CHICO + SE APROVECHA LA SECCIÓN.





DEFORMACIONES:



- Si $dx = 1 \rightarrow \frac{d\theta}{\underbrace{dx}_{=1}} = \chi$: CURVATURA DE FLEXIÓN.

$$\boxed{d\theta = \chi} \quad (10)$$

- $\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{\underbrace{dx}_{=1}} \rightarrow \boxed{\varepsilon_x = \Delta dx.} \quad (11a)$

- $\Delta dx(z) = z \cdot d\theta \rightarrow \boxed{\varepsilon_x = z \cdot \chi.} \quad (11b)$

- $\rho \cdot d\theta = dx \rightarrow \rho \cdot \chi = 1.$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\chi} \quad ; \quad \chi = \frac{1}{\rho}} \quad (12)$$

- $\boxed{\varepsilon_x = z \, \frac{1}{\rho}} \quad (13)$

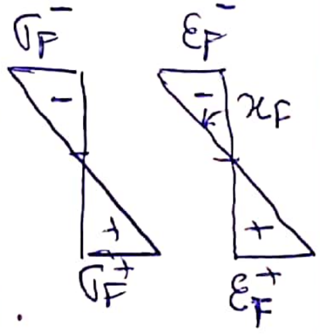
APLIQUEMOS ESTAS EXPRESIONES A NUESTRO PROBLEMA:

- Si $M_y = M_{y,E}$:

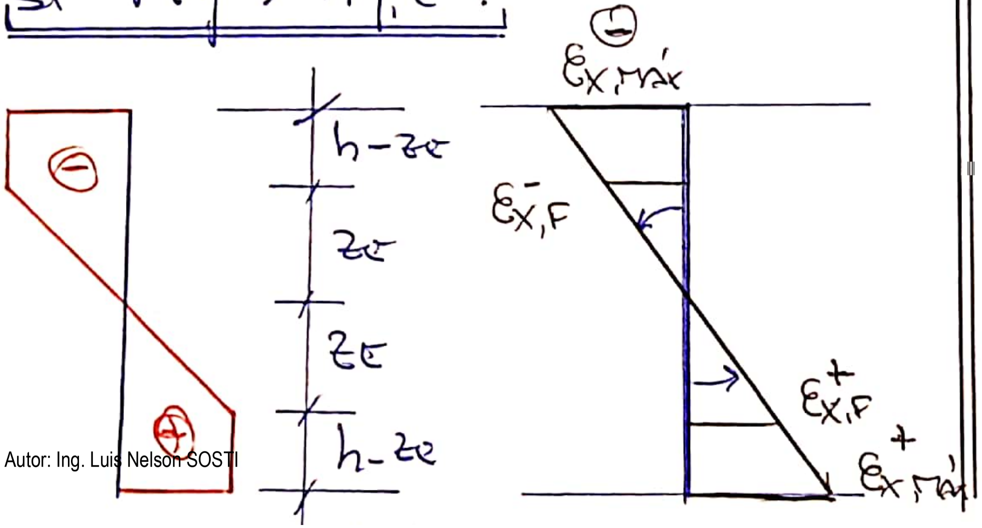
$z_E = h$. $\quad \varepsilon_{x,F} = h \cdot \chi_E = h \cdot \chi_F$

$$\boxed{\chi_F = \frac{\varepsilon_{x,F}}{h}} \quad (14a)$$

$$\boxed{\rho_F = \frac{h}{\varepsilon_{x,F}}} \quad (14b).$$



- Si $M_y > M_{y,E}$:



$$\varepsilon_{x,F} = z_E \cdot \chi \rightarrow \boxed{z_E = \frac{\varepsilon_{x,F}}{\chi}}$$

$$\varepsilon_{x,F} = z_E \frac{1}{\rho} \rightarrow \boxed{z_E = \varepsilon_{x,F} \cdot \rho} \quad (15).$$

$$(14a) \rightarrow h = \frac{\varepsilon_{x,F}}{\chi_F}$$

$$(14b) \rightarrow h = \varepsilon_{x,F} \cdot \rho_F$$

$$\frac{(15)}{(14)} \rightarrow \frac{z_E}{h} = \frac{\varepsilon_{x,F}/\chi}{\varepsilon_{x,F}/\chi_F} = \frac{\chi_F}{\chi} \quad (16a)$$

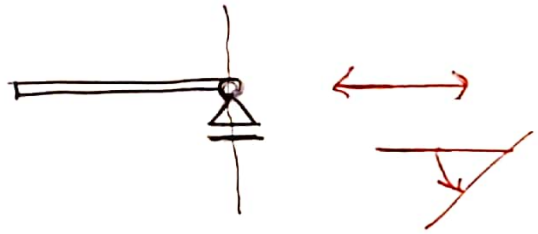
$$\rightarrow \frac{z_E}{h} = \frac{\varepsilon_{x,F} \cdot \rho}{\varepsilon_{x,F}\, \rho_F} = \frac{\rho}{\rho_F} \quad (16b).$$

12 | 17

(5) $M_y = b\,h^2\,\sigma_{x,F}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{z_e^2}{h^2}\right] = \boxed{b\,h^2\,\sigma_{x,F}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{x_F^2}{x^2}\right]}$ (17a)

(6) $M_y = \frac{3}{2}M_{y,e}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{z_e^2}{h^2}\right] = \boxed{\cancel{b\,h^2\,\sigma_x}\ \frac{3}{2}M_{y,e}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{x_F^2}{x^2}\right]}$ (17b)

$$\boxed{\begin{array}{ll} M_y = b\,h^2\,\sigma_{x,F}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{\rho^2}{\rho_F^2}\right] & (18a) \\ M_y = \overset{\frac{3}{2}M_{y,e}}{\cancel{b\,h^2\,\sigma_{x,F}}}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{\rho^2}{\rho_F^2}\right] & (18b) \end{array}}$$

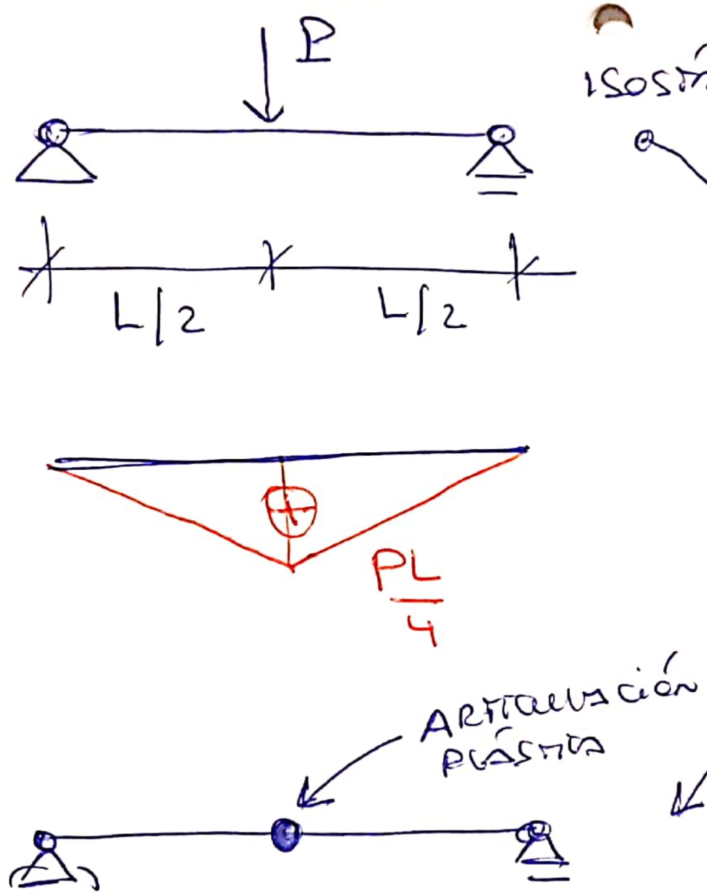


(I) si $M_y = M_{y,e} \rightarrow z_e = h \rightarrow x = x_F \wedge \rho = \rho_F$.

(II) si $M_y = M_{y,p} \rightarrow z_e = 0$ $\qquad \underbrace{\frac{z_e}{h}}_{=0} = \frac{x_F}{x} \rightarrow x \rightarrow \infty \wedge$

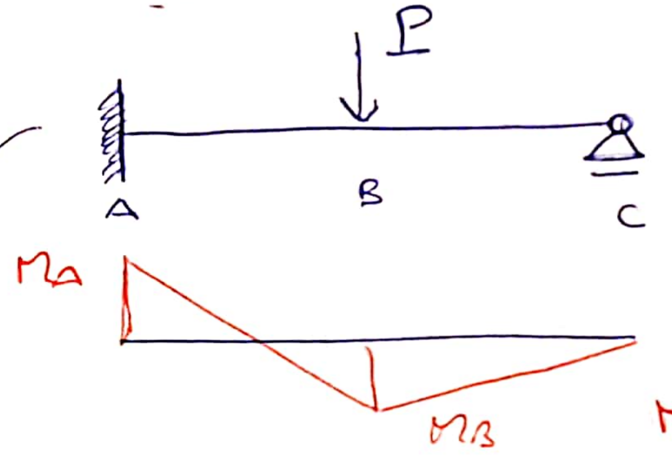
$\underbrace{\frac{z_e}{h}}_{=0} = \frac{\rho}{\rho_F} \rightarrow \rho \rightarrow 0.$

13|17



ISOSTÁTICO

HIPOSTÁTICO.

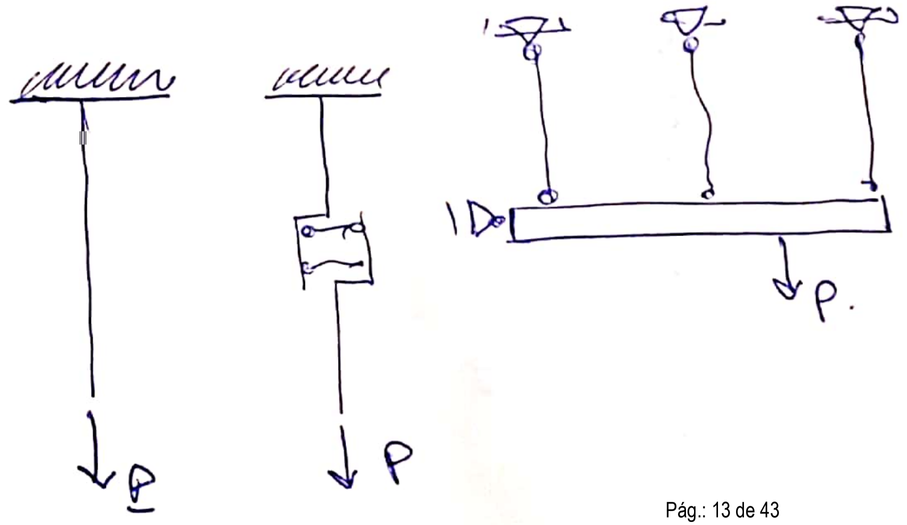


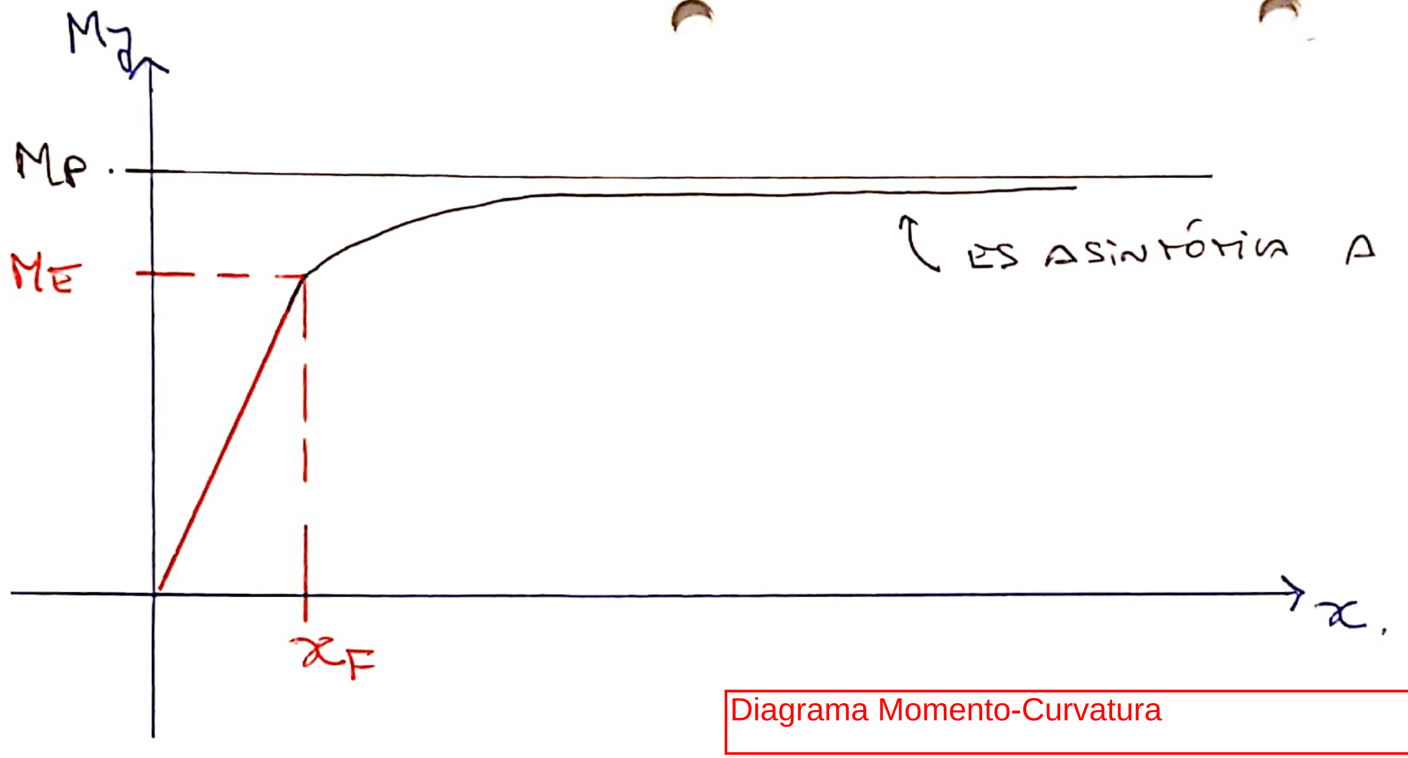
GH = 1

$M_A > M_B$.

CUANDO EN 'A' SE FORMA UNA ARTICULACIÓN PLÁSTICA:

GH = 0





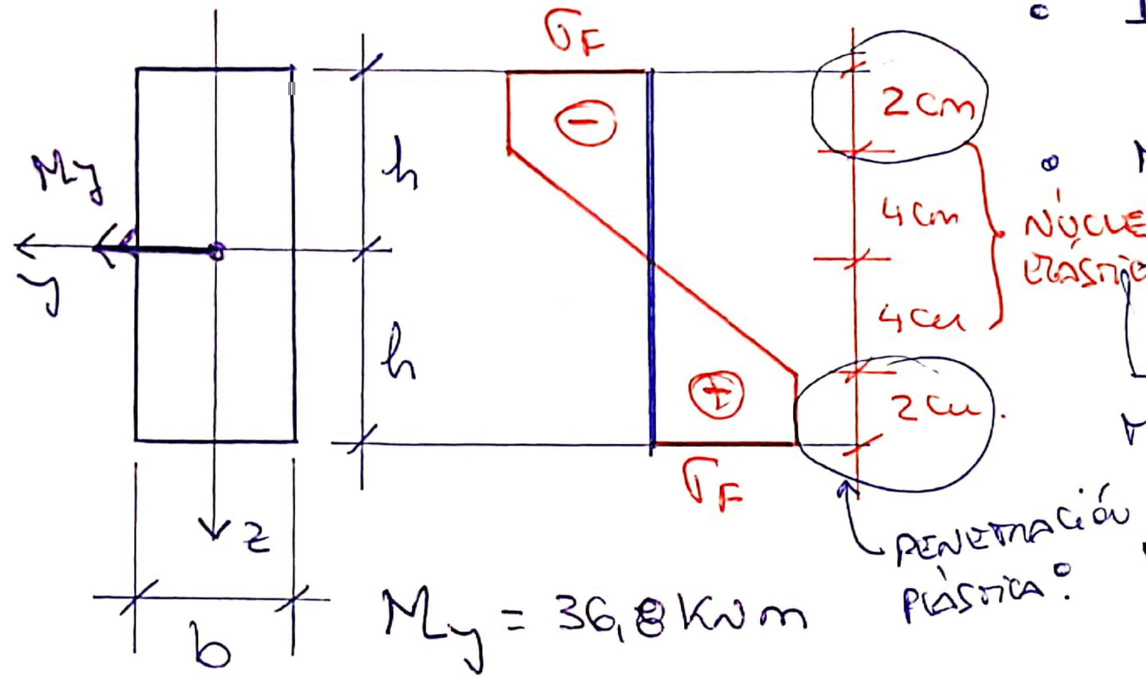
es asintótica a $M_P = M_y(\chi) = cte.$

Diagrama Momento-Curvatura

• Si $M_y \leq M_{y,E} \rightarrow \chi = \dfrac{M_y}{E I_y} \rightarrow M_y = E I_y \cdot \chi$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{E I_y} \rightarrow M_y = \frac{E I_y}{\rho}.$$

EJEMPLO:



$M_y = 36{,}8\ KNm$

DATOS:

$b = 50mm$

$h = 60mm$

$H = 120mm.$

$\sigma_F^+ = \sigma_F^- = 24\ KN/cm^2$

$E = 20000\ KN/cm^2$

$M_y = 36{,}8\ KNm.$

- $I_y = \frac{b(2h)^3}{12} = \frac{\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{12}_{\,3}} bh^3 = \frac{2}{3} bh^3.$

- $M_{y,E} = \frac{I_y}{z_{máx}} \cdot \sigma_F = \frac{2}{3} \frac{bh^3}{h} \sigma_F$

$$\boxed{M_{y,E} = \frac{2}{3} bh^2 \sigma_F}$$

$M_{y,E} = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 6^2\ 24 = 28{,}80\ KNm.$

PLÁSTICA: $M_{y,P} = \frac{3}{2} M_E = 43{,}20\ KNm$

- $M_E \leq M_y \leq M_P$

- $M_y = \frac{3}{2} M_E \left[1 - \frac{1}{3} \frac{z_E^2}{h^2} \right]$

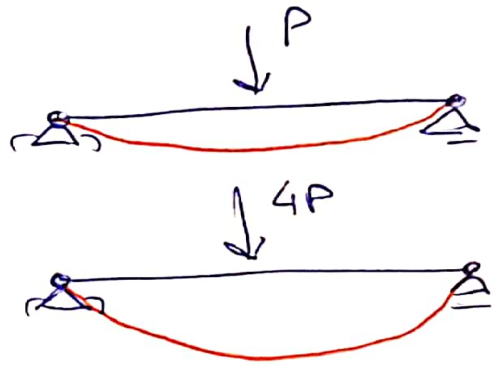
$\frac{1}{3} \frac{z_E^2}{h^2} = 1 - \frac{2}{3} \frac{M_y}{M_E}$

$z_E = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3} \frac{M_y}{M_E}\right) 3h^2}$

$$\boxed{z_E = 4cm}$$

CURVATURA - RADIO DE CURVATURA - DIAGRAMA DE DEFORMACIONES :

$$\frac{z_E}{h} = \frac{\chi_F}{\chi} \rightarrow \boxed{\chi = \chi_F \, \frac{h}{z_E}}$$



$$\chi_F = \frac{\varepsilon_{x,F}}{h}. \qquad \varepsilon_{x,F} = \frac{\sigma_F}{E} = \frac{24}{20000} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{\chi_F = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{6\,cm} = 2 \cdot 10^{-4} \, \frac{1}{cm.}}$$

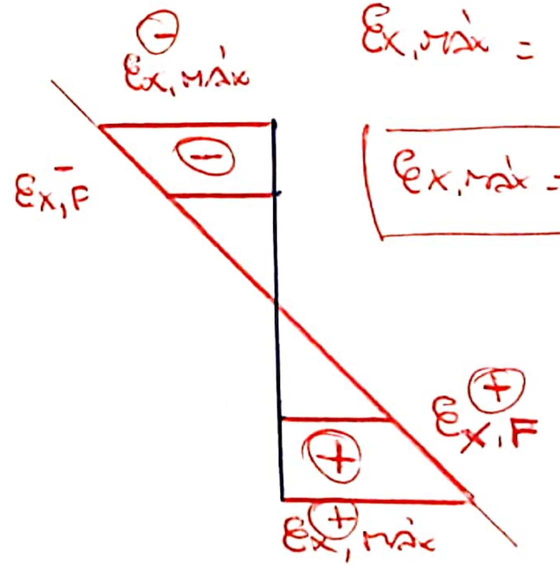
Si $M_y \uparrow \longrightarrow \chi \uparrow$

$\quad \llcorner\!\!\rightarrow \rho \downarrow$

$$\chi_F = \frac{M_E}{E\, I_y} = \text{VERIFICAR.}$$

$$\varepsilon_{x,máx} = \varepsilon_{x,F} \cdot \frac{h}{z_E}$$

$$\boxed{\varepsilon_{x,máx} = 1{,}8 \cdot 10^{-3}}$$

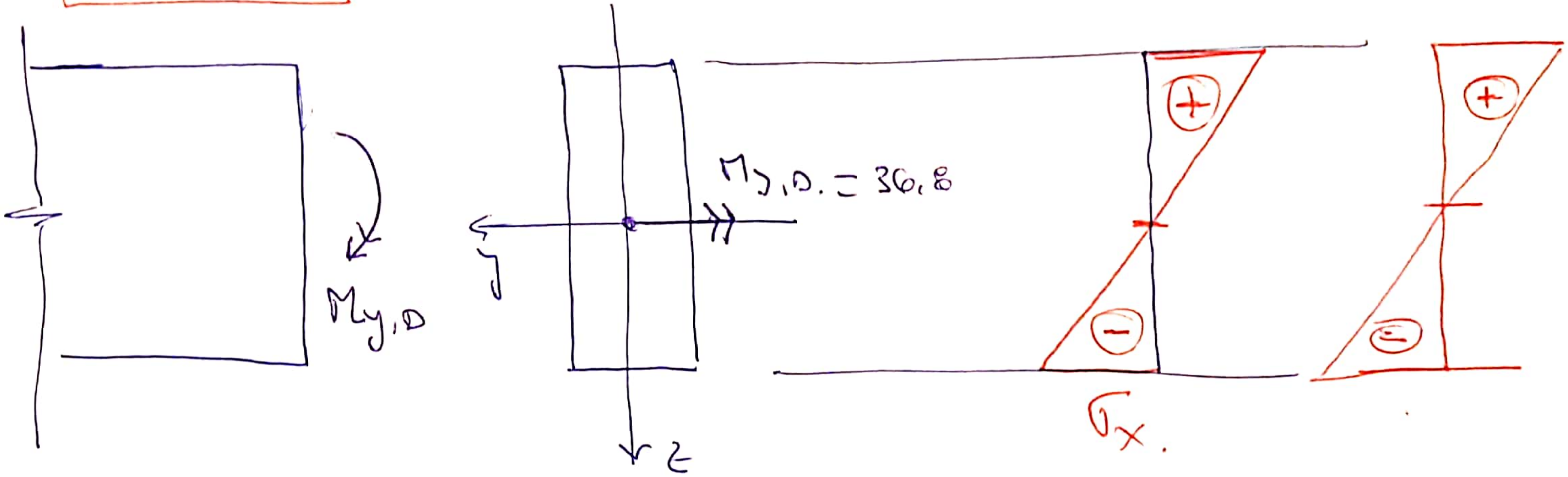


$$\chi = 2 \cdot 10^{-4} \, \frac{1}{cm} \cdot \frac{6\,cm}{4\,cm} = 3 \cdot 10^{-4} \, \frac{1}{cm}.$$

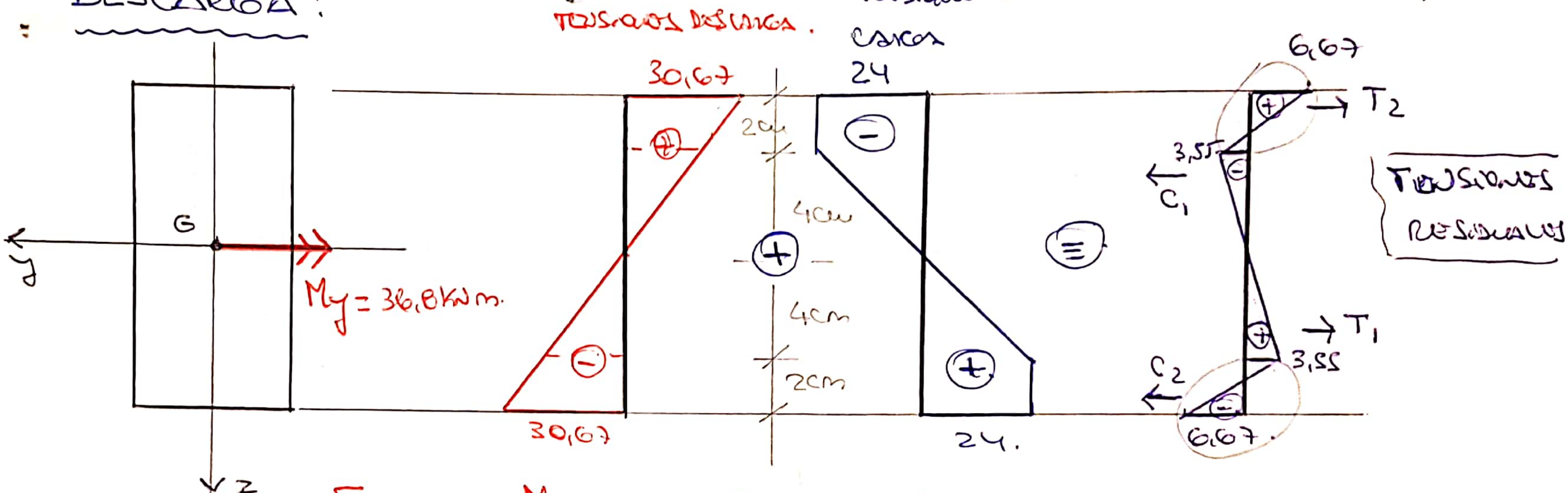
$$\rho = \frac{1}{\chi} = 3333^{\overline{33}} \text{ cm.}$$

$$\rho_F = \frac{1}{\chi_F} = 5000 \text{ cm.}$$

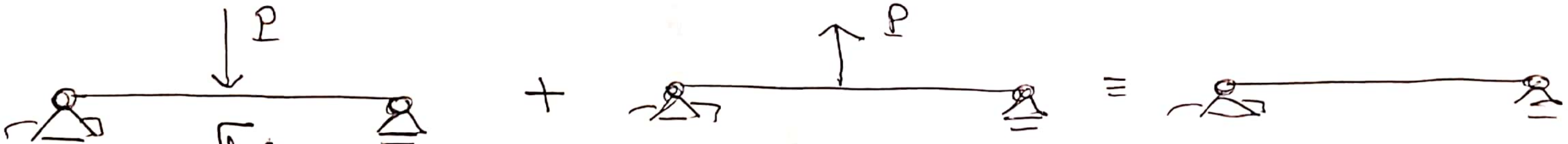
DESCARGA.

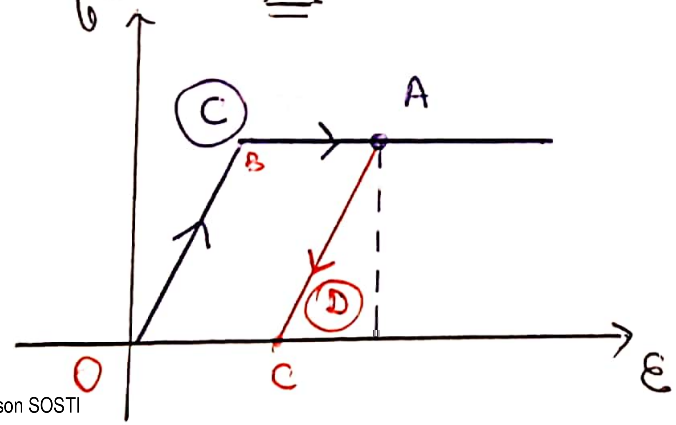


DESCARGA:



$$\sigma_{x,desc} = \frac{M_y}{I_y}\cdot z \rightarrow \sigma_{x,desc,\,máx} = \frac{M_y}{I_y}\cdot z_{máx} = \frac{3680\,KN\,cm}{720\,cm^4}\cdot 6\,cm. = 30{,}67$$





$\overline{OB} \,//\, \overline{AC}$ → EFECTO BAUSCHINGER. $\boxed{\text{BAUSCHINGER.}}$

→ SE ADOPTA QUE $\boxed{\overline{OC} \,//\, \overline{AC}}$

2)26

$$\frac{30{,}67}{6} = \frac{\sigma_x]_{zc}}{4\,cm}$$

$$\sigma_x]_{zc} = \frac{4}{6} \cdot 30{,}67 \frac{kN}{cm^2} = 20{,}45 \frac{kN}{cm^2}$$

Verificación:

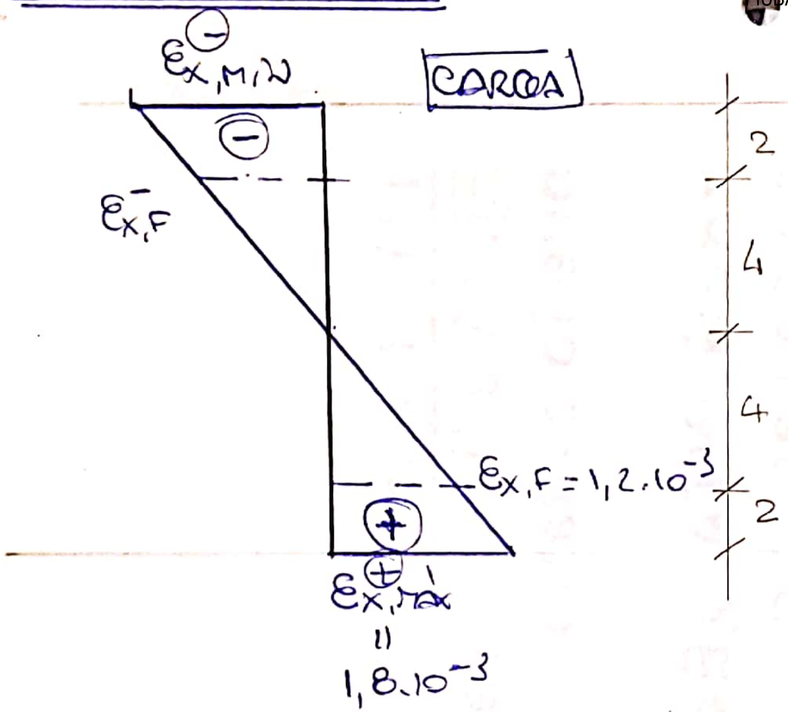
$$|T_1| = |C_1|$$

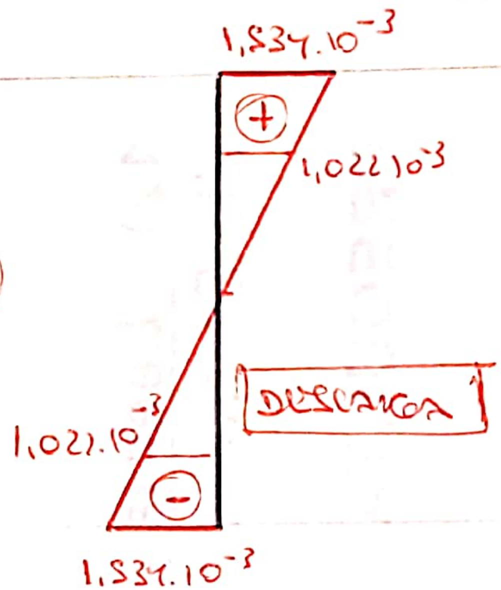
$$|T_2| = |C_2|$$

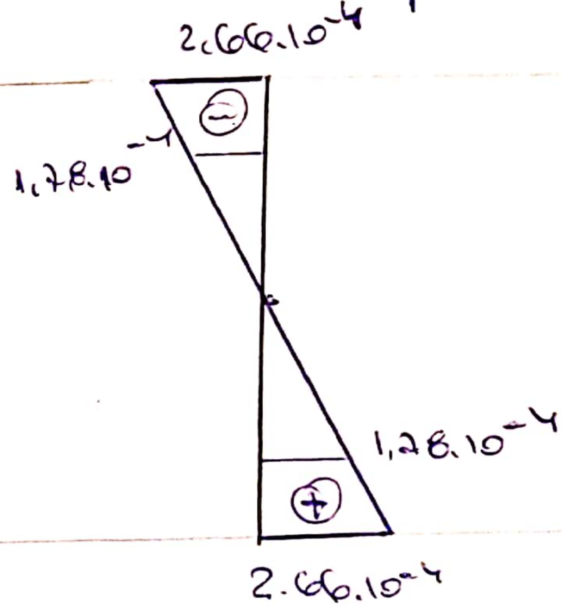
$$T_1 \cdot z_1 = C_1 \cdot z_1$$

$$T_2 \cdot z_2 = C_2\, z_2$$

DEFORMACIONES







$$\varepsilon_{x,máx} = \frac{\sigma_{x,máx}}{E}.$$

$$\varepsilon_{x,máx} = \frac{30,67}{20000}$$

$$\varepsilon_{x,máx} = 1,534 \cdot 10^{-3}.$$

$$\frac{\varepsilon_{x,máx}}{6} = \frac{\varepsilon_{x,ze}}{4}.$$

$$\boxed{\varepsilon_{x,ze} = 1,022 \cdot 10^{-3}}$$

$$\underbrace{\frac{\sigma_{x,res,ze}}{E} = \varepsilon_{x,res,ze}}$$

$-z_e \le z \le +z_e$ es válida la ley de Hooke.

$$\frac{3,55}{20000} = 1,78 \cdot 10^{-4}.$$

CURVATURAS + RADIOS DE CURVATURA

CARGA

$$\begin{cases} \chi = 3.10^{-4}\ \dfrac{1}{cm} \\ \rho = 3333^{\underline{33}}\ cm \end{cases}$$

DESCARGA

$$\chi_{DESC} = \frac{\varepsilon_{max,DESC}}{h} = \frac{1{,}8.10^{-3}}{6cm} = 2{,}557.10^{-4}\ \frac{1}{cm}$$

$$\rho_{DESC} = \frac{1}{\chi_{DESC}} = 3911^{\underline{34}}\ cm$$

$$\chi_{DESC} = \frac{M_{y,DESC}}{E\ I_y} = \frac{3680\ kNcm}{20000 \cdot 720} = 2{,}5561 0^{-4}\ \frac{1}{cm}$$

RESIDUALES

$$\chi_{RES} = \frac{2{,}66.10^{-4}}{6} = \frac{1{,}725.10^{-4}}{4}$$

$$\chi_{RES} = 4{,}44.10^{-5}\ \frac{1}{cm}$$

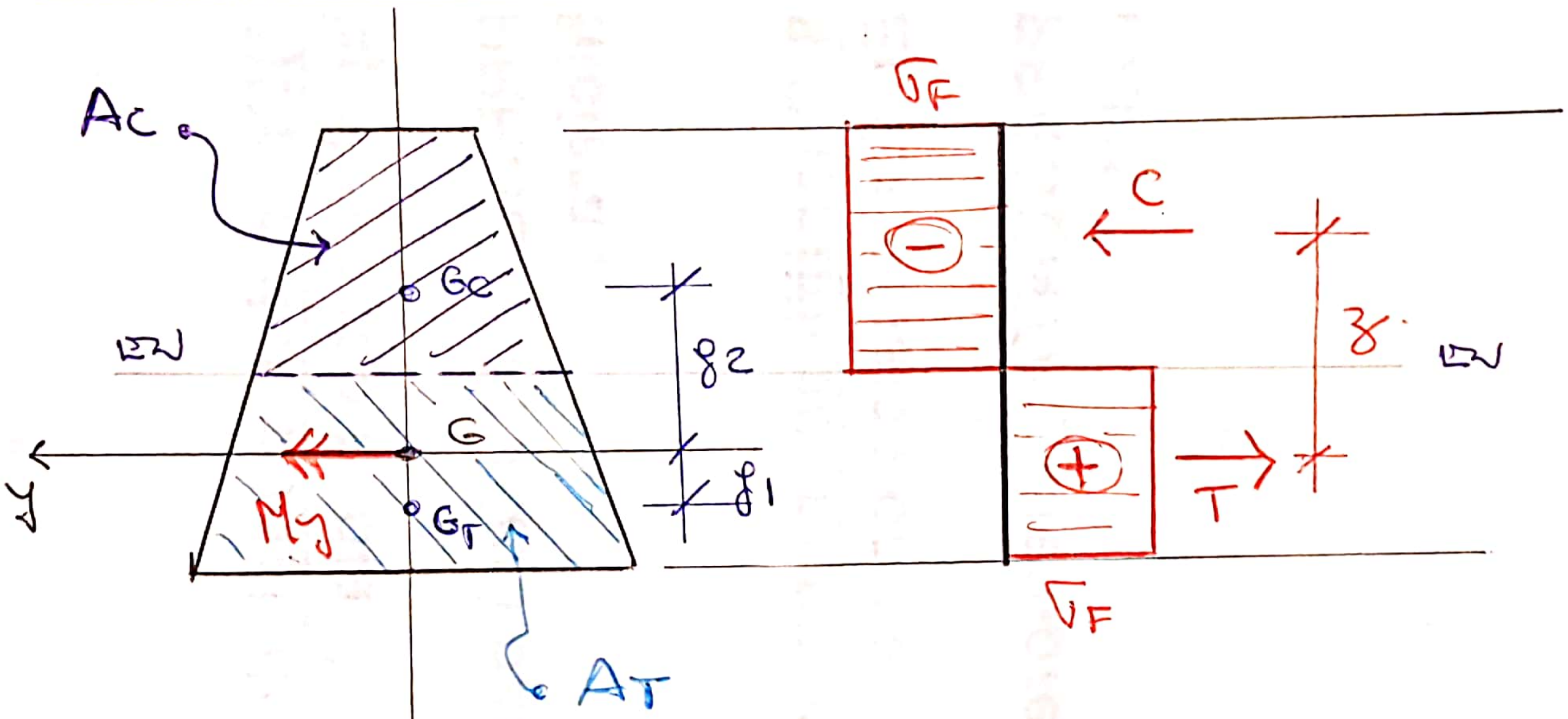
$$\chi_{RES} = \chi_{CARGA} + \chi_{DESCARGA}$$

$$\chi_{RES} = 3.10^{-4} + (-2{,}557.10^{-4})$$

$$\boxed{\chi_{RES} = 4{,}44.10^{-5}\ \frac{1}{cm}}$$

$$\rho_{RESID} = 22471^{\underline{90}}\ cm$$

SECCIONES c) ⊥ EJE DE SIMETRÍA:



$$T = C$$

SI LA SECCIÓN ESTÁ TOTALMENTE PLASTIFICADA:

$$\sigma_F^{(+)} \cdot A_T = \sigma_F^{(-)} \cdot A_C$$

SI $\sigma_F^{(+)} = \sigma_F^{(-)}$.

$$\boxed{A_T = A_C}$$

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA = 0 \rightarrow T = C = R$$

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \, dA \rightarrow \begin{cases} R_T = T \\ R_C = C \end{cases}$$

- NOTA:

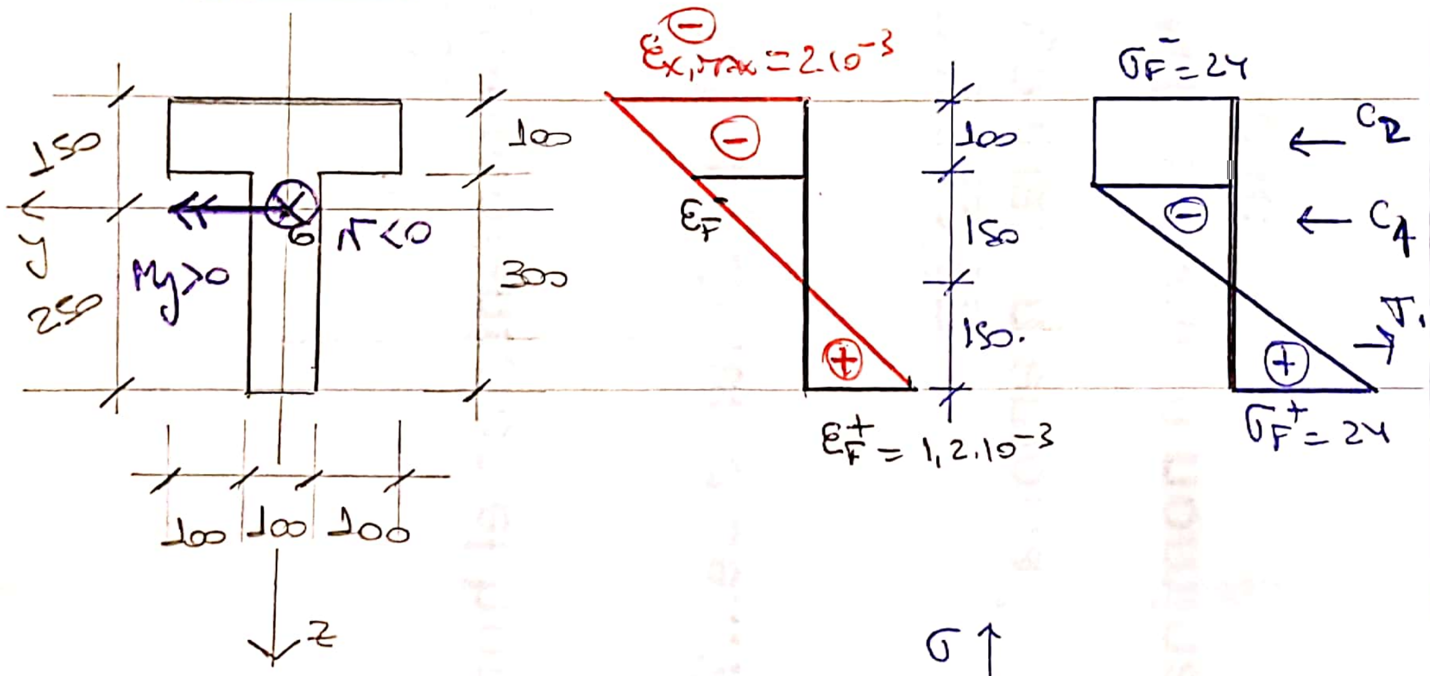
HASTA EL COMIENZO DE LA PLASTIFICACIÓN → "EN" DIVIDE ~~DIVIDIDO~~ A LA SECCIÓN EN ÁREAS DE IGUAL MOMENTO ESTÁTICO → EN ES BARICÉNTRICO

6) 26

FLEXIÓN COMPUESTA

$N = \int_A \sigma_x \, dA$ y $M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \, dA$.

$\boxed{\text{CARGA}}$



$$\frac{\varepsilon^-_{x,max}}{250} = \frac{\varepsilon^-_{x,F}}{150} \rightarrow$$

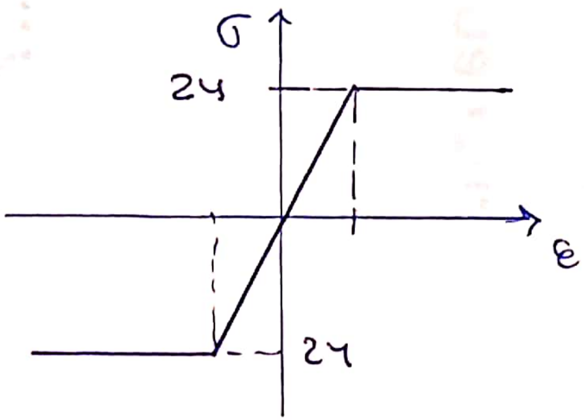
$$\boxed{\varepsilon^{(-)}_{x,max} = 2 \cdot 10^{-3}.}$$

$A = 600 \text{ cm}^2$

$I_y = 85000 \text{ cm}^4$

$W_{yS} = S_{yS} = 5666^{67} \text{ cm}^3.$

$W_{yI} = S_{yI} = 3400 \text{ cm}^3.$



$E = 20000 \text{ kN/cm}^2.$

$$\varepsilon_F = \frac{24}{20000} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} = 1{,}2‰$$

7/26

$$N = \underbrace{+\,24\,\tfrac{kN}{cm^2}\cdot\tfrac{15\cdot 10\,cm^2}{2}}_{T_1} - \underbrace{24\,\tfrac{kN}{cm^2}\cdot\tfrac{15\cdot 10\,cm^2}{2}}_{C_1} - \underbrace{24\,\tfrac{kN}{cm^2}\cdot 30\cdot 10\,cm^2}_{C_2} = \boxed{-7200\,kN}$$

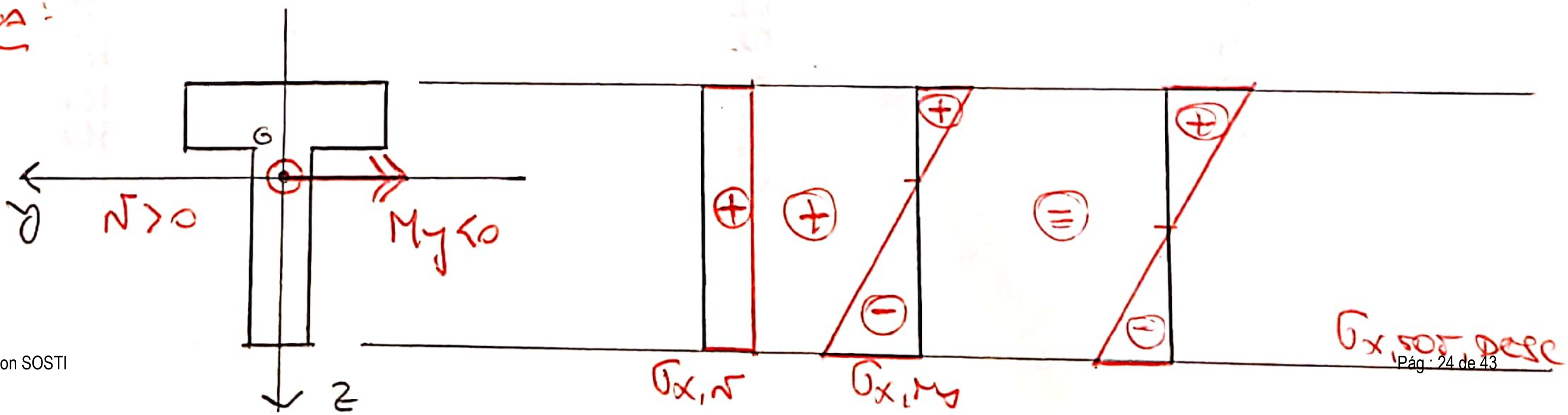
$$M_y = \underbrace{+\underbrace{24\cdot\tfrac{15\cdot 10}{2}}_{T_1}\cdot\underbrace{(25-5)}_{z_{T_1}}}_{M_{y,T_1}} + \underbrace{\underbrace{24\cdot\tfrac{15\cdot 10}{2}}_{C_1}\cdot\underbrace{(15-15)}_{z_{C_1}}}_{M_{y,C_1}} + \underbrace{\underbrace{24\cdot 30\cdot 10}_{C_2}\cdot\underbrace{(15-5)}_{z_{C_2}}}_{M_{y,C_2}} =$$

$=0$

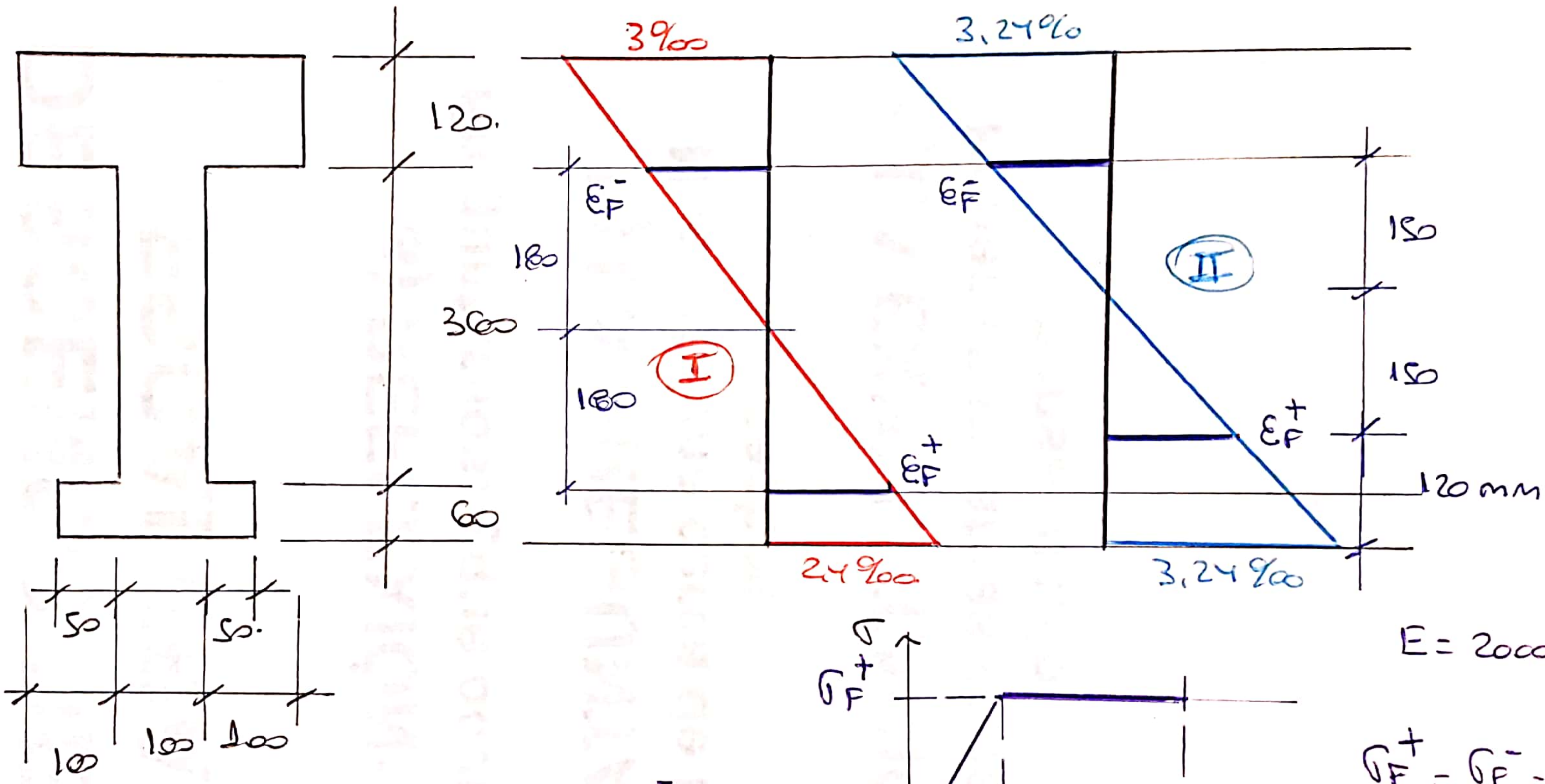
$$M_y = 36000 + 0 + 72000 \rightarrow \boxed{M_y = 108.000\,kNcm = 1080\,kNm}$$

$\boxed{\text{FLEXIÓN COMPUESTA RECTA}}$

DESCARGA:

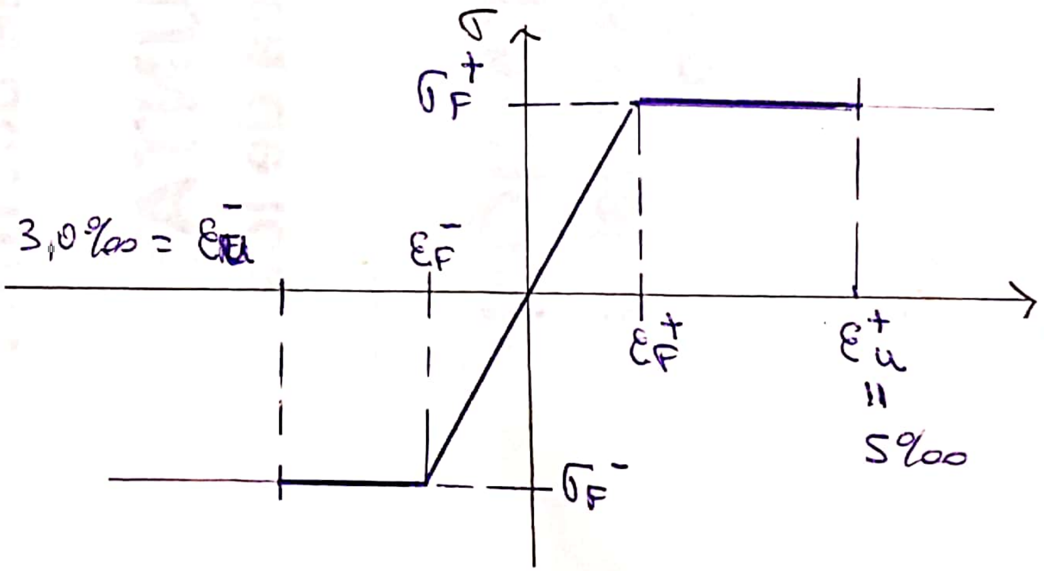


8|26



$E = 20000 \frac{kN}{cm^2}$

$\sigma_F^+ = \sigma_F^- = 36 \frac{kN}{cm^2}$



EPI

EPR

$$\begin{cases} \varepsilon_F^+ = \dfrac{\sigma_F^+}{E} = \dfrac{36}{20000} = 1{,}8 \cdot 10^{-3} = 1{,}8‰ \\ \varepsilon_F^- = \dfrac{\sigma_F^-}{E} = \dfrac{36}{20000} = 1{,}8 \cdot 10^{-3} = 1{,}8‰ \end{cases}$$

DIAGRAMA 1

$$\frac{\varepsilon_{máx}^-}{300} = \frac{\varepsilon_F^-}{180} \rightarrow \varepsilon_{máx}^- = 3‰$$

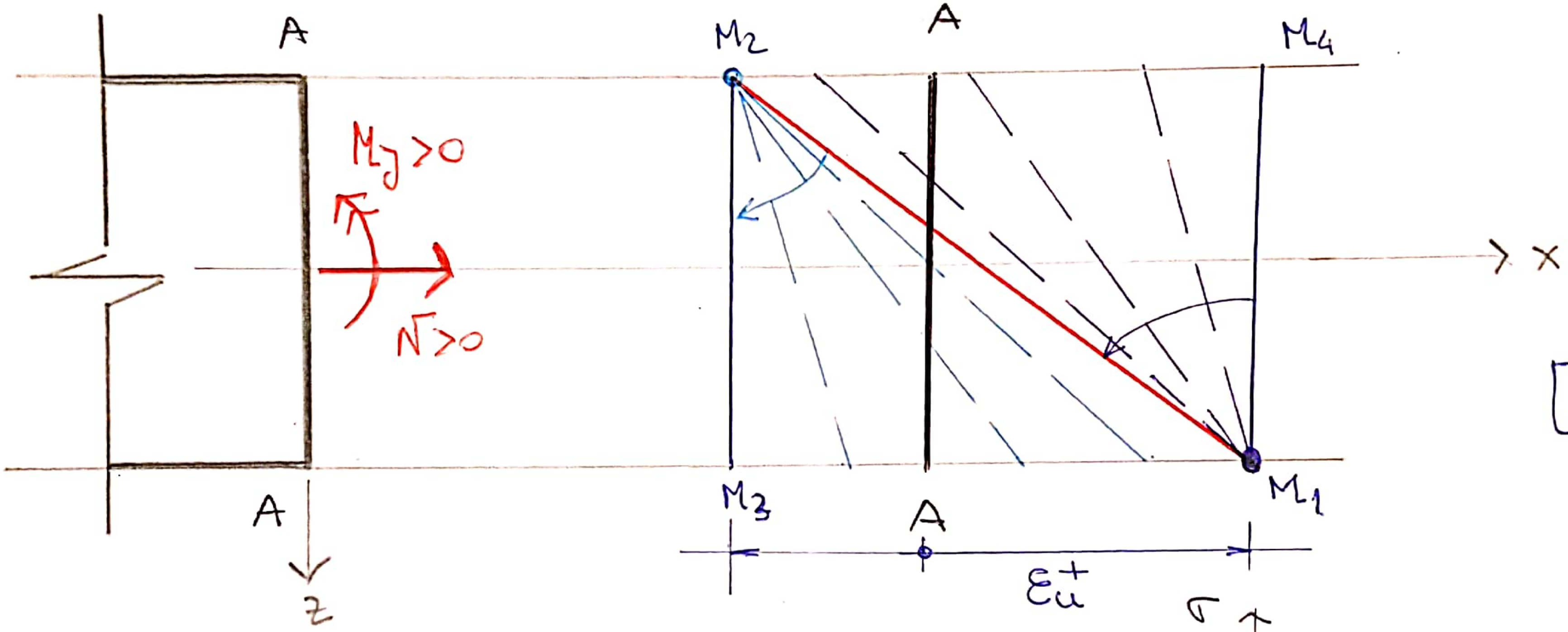
$$\frac{\varepsilon_{máx}^+}{240} = \frac{\varepsilon_F^+}{180} \rightarrow \varepsilon_{máx}^+ = 2{,}4‰,$$

DIAGRAMA 2:

$$\frac{\varepsilon_{máx}^-}{270} = \frac{\varepsilon_F^-}{150} \rightarrow \varepsilon_{máx}^- = 3{,}24‰$$

$$\frac{\varepsilon_{máx}^+}{270} = \frac{\varepsilon_F^+}{150} \rightarrow \varepsilon_{máx}^+ = 3{,}24‰$$

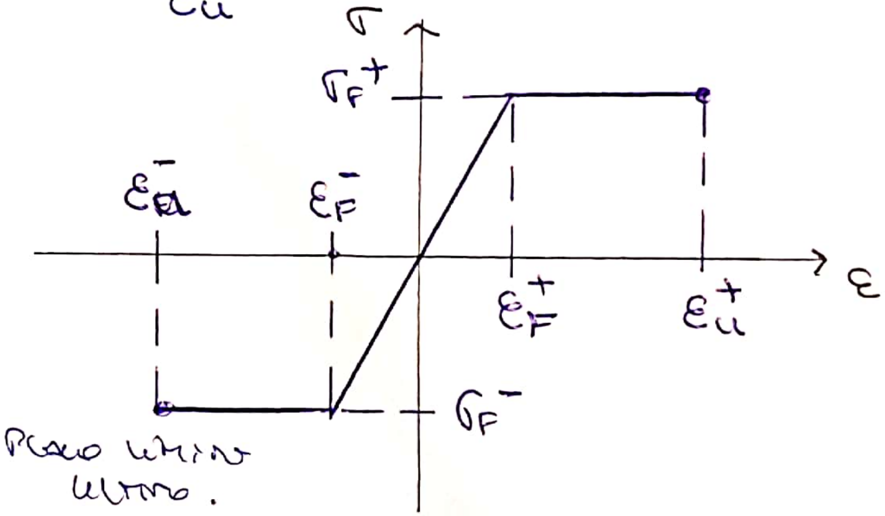
DIAGRAMA VÁLIDO $\rightarrow$ I.



EPR

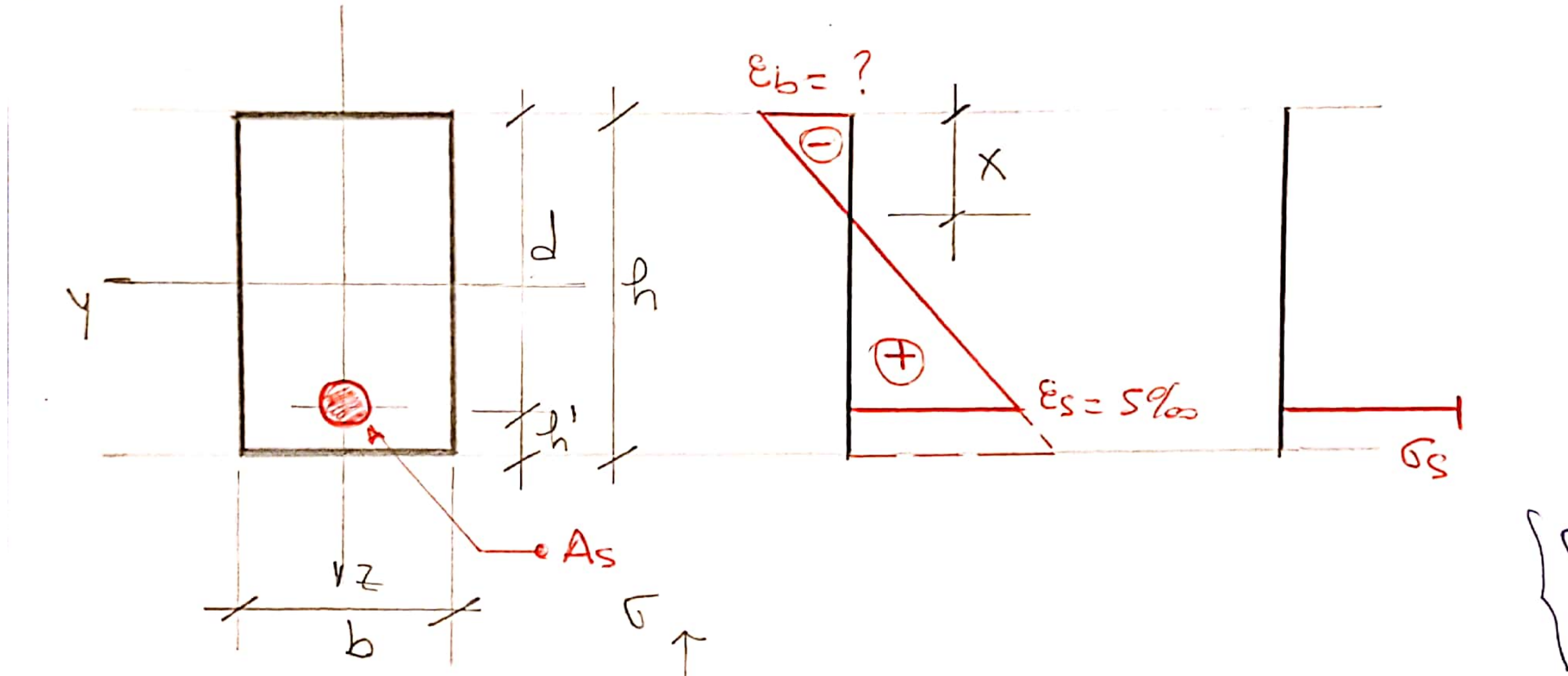
AA PLANO DE LA SECCIÓN ANTES DE LA APLICACIÓN DE LA SOLICITACIÓN.

PLANO <u>NO</u> DEFORMADO.



- Si $N>0$ y $M_y=0$ → M_1-M_4 → PLANO LÍMITE ÚLTIMO.
- Si $N<0$ y $M_y=0$ → M_2-M_3 → PLANO LÍMITE ÚLTIMO DE DEFORMACIÓN

11 / 26



$b = 0{,}30\,m$

$h = 0{,}50\,m$

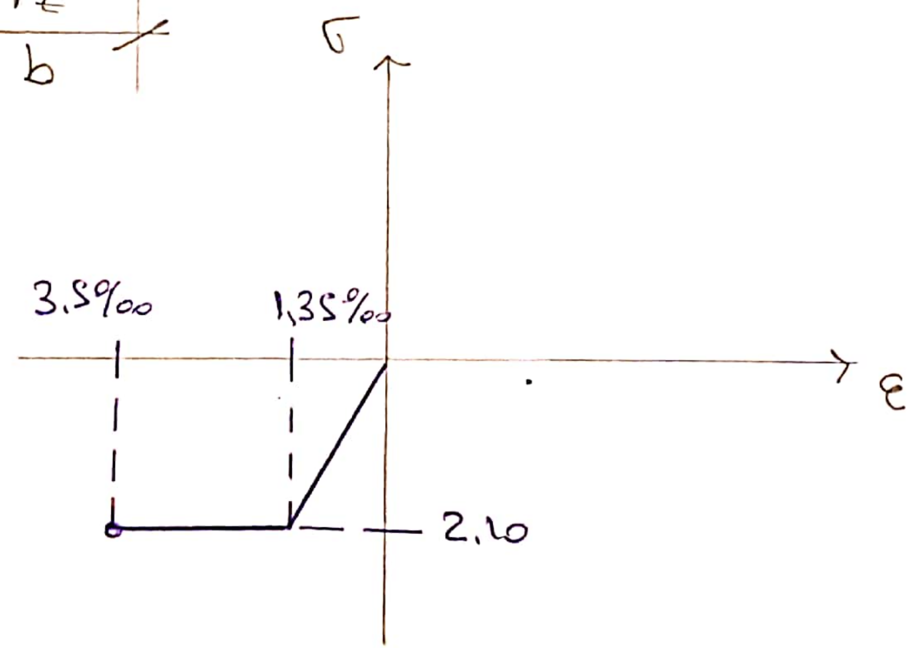
$h' = 0{,}10\,m$

$A_S = 4\,cm^2$,

$M_y = +100\,kNm$

$$\begin{cases} \sigma_{F,H} = 2{,}10\,kN/cm^2 \\ \sigma_{F,S} = 170\,kN/cm^2 \end{cases}$$

$\varepsilon_S = \varepsilon_{AC,u} = 5‰$.



$$CS = \frac{M_u}{M} \geq 1{,}75$$

12

1) PLANTEO DE DEFORMACIONES:

$$\frac{\varepsilon_b}{x} = \frac{5‰}{40-x} \qquad (1).$$

2) EC. DE EQUIVALENCIA:

$$N = \int_A \sigma_x \, dA = 0$$

$$N = \int_A \sigma_x \, . \, dA = \underbrace{\int_{AC} \sigma . dA}_{\text{Fza que toma el acero}} + \underbrace{\int_{H} \sigma . dA}_{\text{Fza que toma el H°}} \cong 0$$

(2)

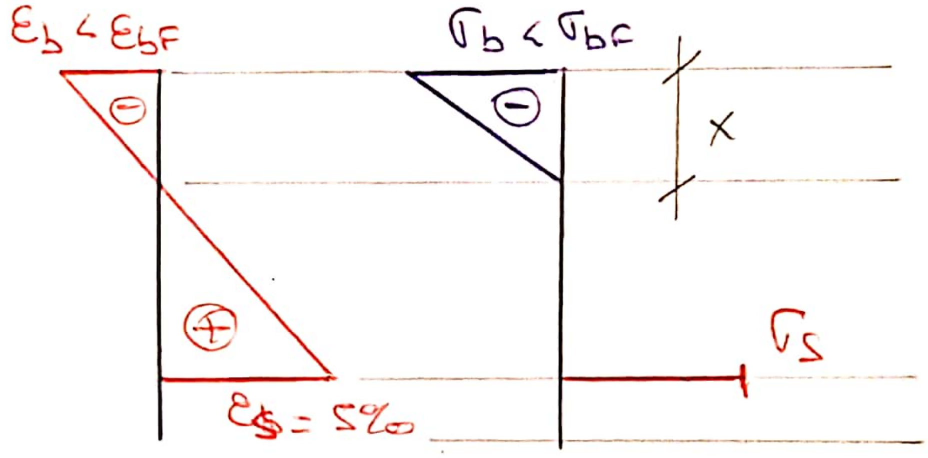
INCÓGNITAS

ε_b

x

σ_b

$\boxed{1^{\circ} \text{CASO}}$ { ACERO PLASTIFICADO. H° EN PERIODO ELÁSTICO }



DE (1) $\varepsilon_b = \dfrac{5.x}{40-x}$.

DE (2) $\sigma_s . A_s - \sigma_b . \dfrac{b.x}{2} = 0$

$$\sigma_b = E_b . \varepsilon_b = E_b . \frac{5x}{40-x}.$$

$$\sigma_{Fb} = E_b . \varepsilon_{Fb} \rightarrow E_b = \frac{\sigma_{Fb}}{\varepsilon_{Fb}} =$$

$$= \frac{2{,}10}{(1{,}35/1000)} = 1555{,}6 \text{ KN/cm}^2$$

DE (2) $\sigma_s A_s = \sigma_b \cdot \frac{b x}{2} = E_b \varepsilon_b \cdot \frac{b x}{2}$. $\longrightarrow$ $\sigma_b = \frac{\sigma_s \cdot A_s \cdot 2}{b\, x_1}$

$\sigma_s A_s = E_b \frac{5x}{40-x} \cdot \frac{b x}{2}$

$2 \cdot \sigma_s A_s (40-x) = 5 E_b \cdot x^2$

$2 \sigma_s A_s (40-x) = 5 \cdot \frac{\sigma_{Fb}}{\varepsilon_{Fb}} \cdot x^2$

$2 \sigma_s A_s (40-x)\, \varepsilon_{Fb} = 5 \sigma_{Fb} \cdot x^2$

reemplazo valores, opero y obtengo:

$0{,}315 \frac{1}{cm} x^2 + 1.836 x - 73{,}44\, cm = 0$

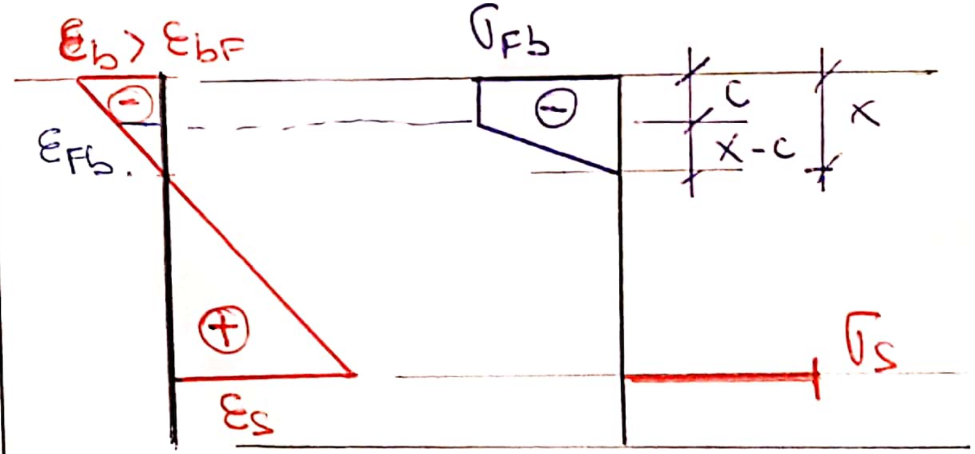
$x_1 = 12{,}63\, cm$

$x_2 = -18{,}46\, cm$ NO ES POSIBLE LO DESCARTO.

$\sigma_b = \frac{170 \cdot 4 \cdot 2}{30 \cdot 12{,}63} = 3{,}59\, kN/cm^2$.

NO ES POSIBLE PORQUE ES $> \sigma_{bF}$

2º CASO: { ACERO PLASTIFICADO
Hº PARCIALMENTE PLASTIFICADO



$\varepsilon_b = \frac{5x}{40-x}$ DE (1)

De (2)

$$\sigma_s \cdot A_s = \sigma_{Fb} \cdot c\, b + \sigma_{Fb} \cdot \frac{(x-c)\, b}{2} \qquad (A)$$

$$\frac{\varepsilon_{Fb}}{x-c} = \frac{5}{40-x} \rightarrow (40-x)\,\varepsilon_{Fb} = 5(x-c)$$

$$40\,\varepsilon_{Fb} - \varepsilon_{Fb}\, x = 5\,(x-c).$$

$$\boxed{c = 1{,}27\,X - 10{,}80} \qquad (B).$$

reemplazo (B) en (A).

$$\begin{cases} X = 14{,}268\ \text{cm} \\ c = 7{,}32\ \text{cm} \end{cases}$$

Cálculo del Mu:

. Tomo momentos respecto de G del acero:

$$M_u = \sigma_{Fb} \cdot c \cdot b \cdot \left(40 - \frac{c}{2}\right) +$$

$$+ \sigma_{Fb} \cdot \frac{(x-c) \cdot b}{2} \cdot \left[40 - c - \frac{1}{3}(x-c)\right]$$

reemplazo valores:

$$\boxed{M_u = 234{,}04\ \text{kNm}.}$$

Verificación del $CS_{mín}$:

$$\frac{M_u}{M} = \frac{234{,}04}{100} = 2{,}34 > 1{,}75$$

Verifica

DIAGRAMA DE INTERACCIÓN:

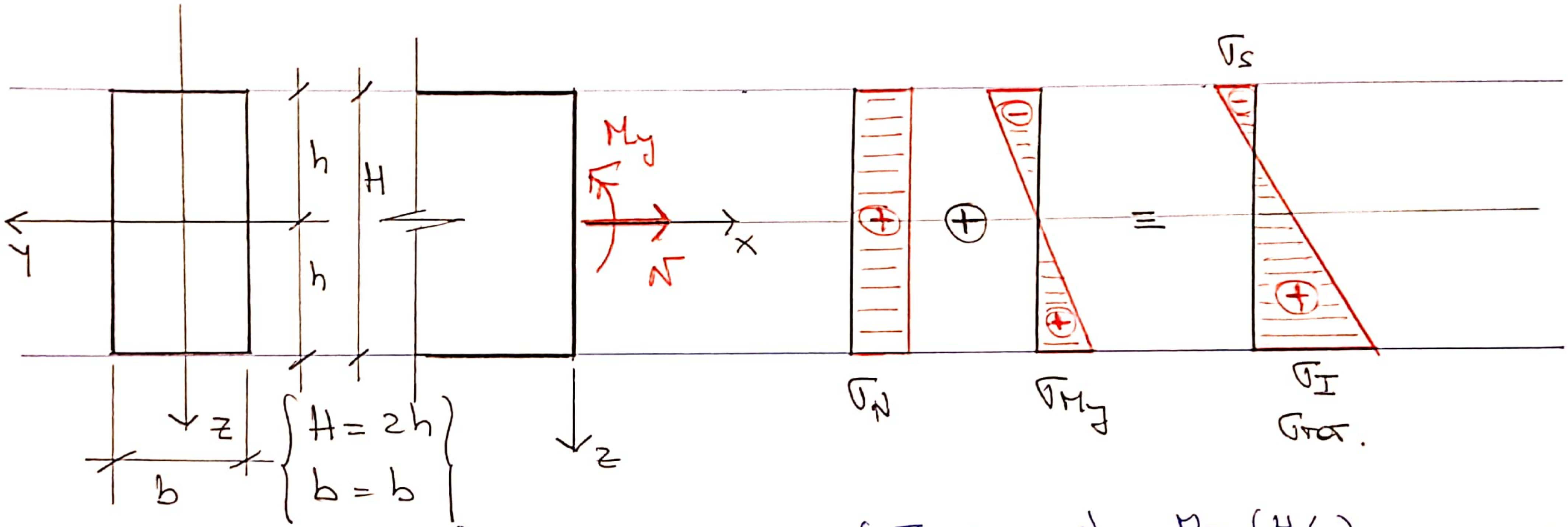
- SIENDO EL PROBLEMA DE 'FCm' SIMILAR AL DE 'FS' EN CUANTO A QUE EL INCREMENTO DE LOS ~~TENSIONES~~ ESFUERZOS INTERNOS PRODUCEN LOS INCREMENTOS DE LAS TENSIONES HASTA SUS MÁXIMOS NIVELES;
- SIN EMBARGO EL PROBLEMA EN LA 'FCm' ES MÁS COMPLEJO PORQUE SON 2 LOS ESFUERZOS O CAUSAS QUE PRODUCEN LAS TENSIONES;
- LOS DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN VIENEN O SE CREAN P/ RELACIONAR LAS COMBINACIONES DE ESFUERZOS QUE CONDUCEN A:

I) COMIENZO DE LA PLASTIFICACIÓN;

II) LA PLASTIFICACIÓN TOTAL;

III) PLASTIFICACIÓN PARCIAL CON DISTINTOS NIVELES DE PENETRACIÓN PLÁSTICA.

I) Comienzo de la plastificación:



$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_{My}^{máx} = \pm \frac{M_y}{I_y} (H/2)$$

$$\sigma_{TOT} = \sigma_N + \sigma_{My}$$

$$\sigma_{S,mín} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} (H/2)$$

$$\sigma_{I,máx} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} (H/2)$$

• Si $\sigma_{TOT} = \sigma_{máx} = \sigma_F = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \left(\frac{H}{2}\right)$

$$1 = \frac{N}{A\sigma_F} + \frac{M_y}{I_y\sigma_F}\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{N}{A\sigma_F} + \frac{M_y}{\frac{I_y\sigma_F}{(H/2)}}$$

$N_F = N_E$ $\qquad$ $M_{yE} = M_{yF}$

$$\boxed{\frac{N}{N_F} + \frac{M_y}{M_F} = 1} \quad (1).$$

→ (I) LA (1) REPRESENTA LA TOTALIDAD DE LAS POSIBLES COMBINACIONES DE N y M QUE CAUSAN AL COMIENZO DE LA PLASTIFICACIÓN.

(II) DEFORMACIÓN PLÁSTICA → 'NULA' → $C = 0$.

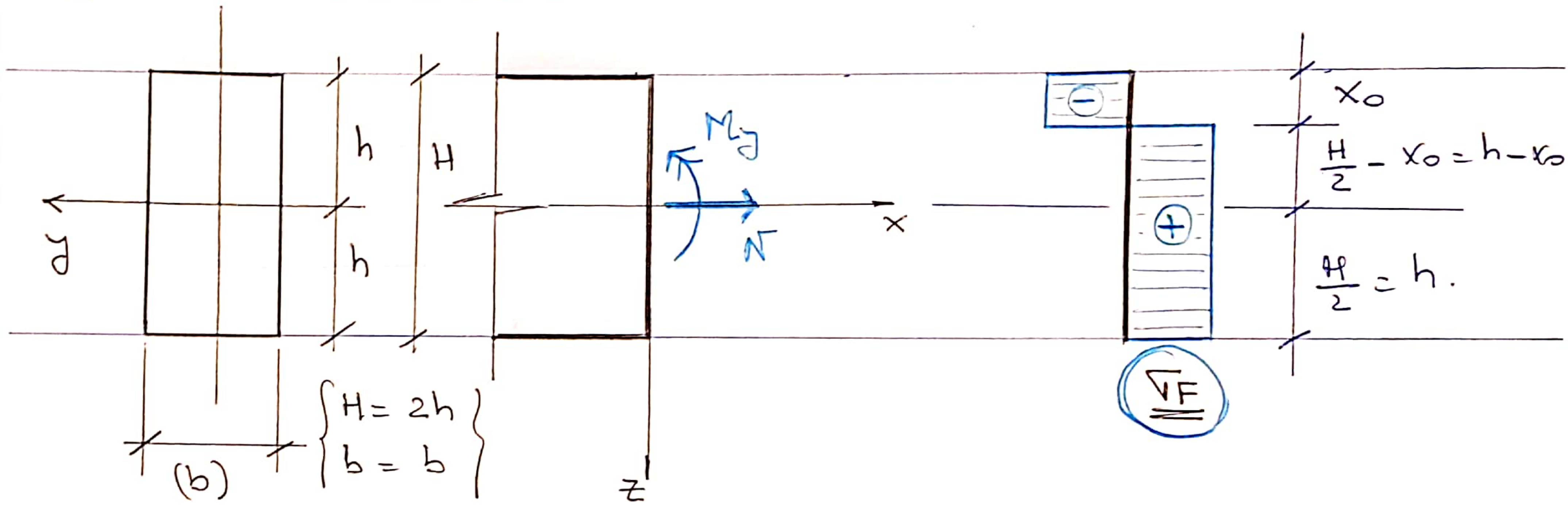
(III) LA (1) ES LA EC. DE UNA RECTA.

(IV) CONSIDERANDO EXTREMOS:

- SI $N \neq 0$ y $M_y = 0$ → $\frac{N}{N_F} = 1$ → SOLICIT. AXIL
- SI $N = 0$ y $M_y \neq 0$ → $\frac{M_y}{M_F} = 1$ → FLEXIÓN SIMPLE.

(V) SOLAMENTE LAS FIBRAS MÁS ALEJADAS ALCANZAN LA TENSIÓN DE FLUENCIA

II PLASTIFICACIÓN TOTAL:



- La combinación de N y M es tal que las tensiones que producen son 'σ_F' en todos los puntos de la sección → la sección está totalmente plastificada.

- Si sólo SA → $M = 0$ → $x_0 = 0$ y $\underline{N_F = \sigma_F . b . H = \sigma_F . b 2h}$ (20)

- Si sólo SF simple $\rightarrow N = 0 \rightarrow x_0 = \frac{H}{2} = h \rightarrow \boxed{M_P = \sigma_F b h^2 = \sigma_F b \frac{H^2}{4}}$ (26)

- Si $N \neq 0$ y $M \neq 0$ se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{M_y}{\sigma_F . \frac{bH^2}{4}} + \frac{N^2}{\sigma_F^2 . b^2 H^2} = 1$$

(ver demostración al final).

y siendo $\sigma_F \, b . H = N_F \quad \wedge \quad \sigma_F \frac{bH^2}{4} = M_P = \frac{3}{2} M_E = \frac{3}{2} M_F$

- Luego:

$$\boxed{\frac{2}{3} \frac{M_y}{M_F} + \frac{N^2}{N_F^2} = 1} \quad (3)$$

↳ Curva cuadrática que proporciona todas las combinaciones de N y M_y que ~~conducen~~ conducen a una plastificación total de la sección.

• Veamos qué ocurre para valores intermedios de 'N' y 'M'

→ I) Proyección sobre eje 'x':

$$-\int_{-h}^{-(h-x_0)} \sigma_F \underbrace{dA}_{b\,dz} + \int_{-(h-x_0)}^{+h} \sigma_F \underbrace{dA}_{b\,dz} = N.$$

$$-\sigma_F b \cdot z \Big|_{-h}^{-(h-x_0)} + \sigma_F b \cdot z \Big|_{-(h-x_0)}^{+h} = N$$

$$\cancel{\sigma_F b h} - \sigma_F b x_0 - \cancel{\sigma_F b h} + \sigma_F b h + \sigma_F b h - \sigma_F b x_0 = N$$

$$2\sigma_F b h - 2\sigma_F b x_0 = N.$$

$$\boxed{\sigma_F b(2h - 2x_0) = \sigma_F b(H - 2x_0) = N} \quad (4)$$

→ II) Momentos respecto del eje 'y':

$$\sigma_F b x_0 \cdot \left(h - x_0 + \frac{x_0}{2}\right) - \sigma_F b (h - x_0) \cdot \frac{(h-x_0)}{2} + \sigma_F b \cdot h \, \frac{h}{2} = M_y$$

$$\sigma_F b\left[h x_0 - \frac{1}{2} x_0^2 - \left(\frac{1}{2} h^2 - h x_0 + \frac{1}{2} x_0^2\right) + \frac{1}{2} h^2\right] = M_y$$

$$\sigma_F b\left[h x_0 - \frac{1}{2} x_0^2 - \cancel{\frac{1}{2} h^2} + h x_0 - \frac{1}{2} x_0^2 + \cancel{\frac{1}{2} h^2}\right] = M_y.$$

$$\sigma_F b\left[2h x_0 - x_0^2\right] = M_y \rightarrow \boxed{M_y = \sigma_F b\left[2h x_0 - x_0^2\right] = \sigma_F b\left[H x_0 - x_0^2\right]} \quad (5)$$

→ De (4) → $\boxed{x_0 = h - \frac{N}{2\sigma_F b} = \frac{H}{2} - \frac{N}{2\sigma_F b}}$ (6)

→ Reemplazando en (5):

$$M_y = \sigma_F b \left[2h \cdot h - \frac{2h\,N}{2\sigma_F b} - \left(h - \frac{N}{2\sigma_F b} \right)^2 \right]$$

$$M_y = \sigma_F\, b \cdot h^2 - \frac{N^2}{4b\sigma_F} = \sigma_F \cdot \frac{bH^2}{4} - \frac{N^2}{4b\sigma_F}$$

$$\boxed{\frac{M_y}{\sigma_F \frac{bH^2}{4}} + \frac{N^2}{b^2 H^2 \sigma_F^2} = 1} \quad (7).$$

→ Para sección rectangular:

$$M_P = \sigma_F \cdot b\, h^2 = \sigma_F \frac{bH^2}{4} = \frac{3}{2} M_E = \frac{3}{2} M_F \quad (8)$$

$$N_E = N_F = \sigma_F\, b\, H = \sigma_F\, b\, 2h$$

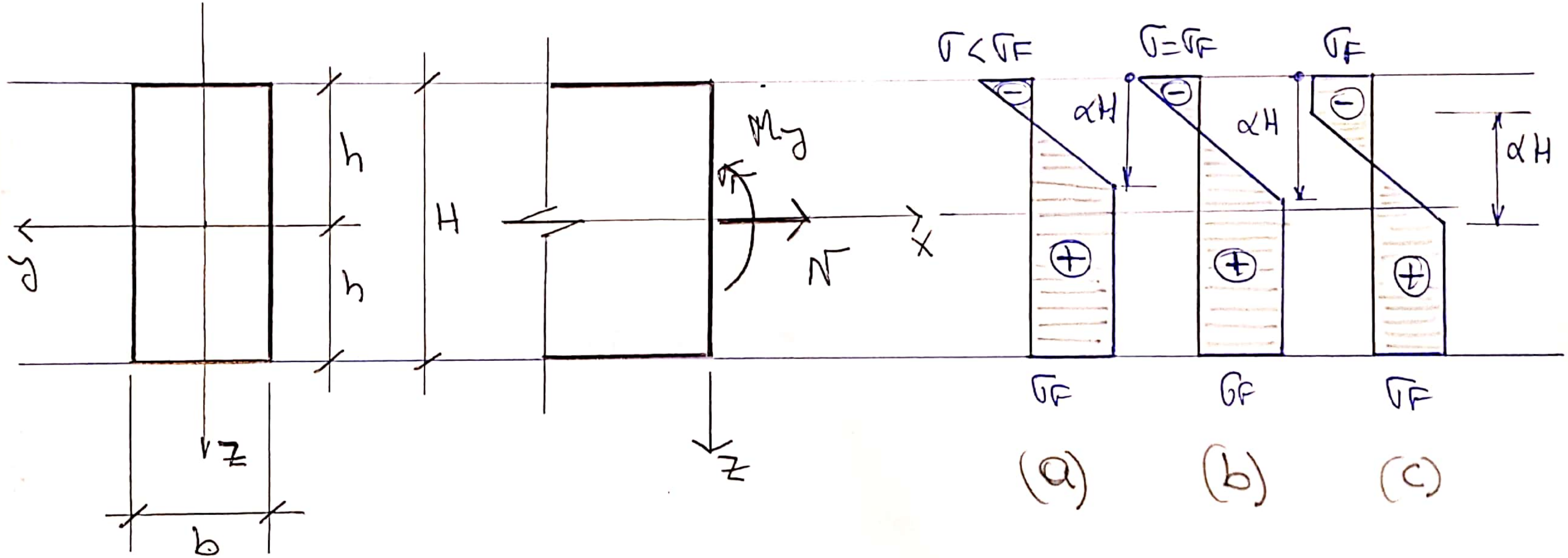
$$N_F^2 = \sigma_F^2 b^2 H^2 = 4\sigma_F^2 b^2 h^2. \quad (9)$$

$$\boxed{\frac{2}{3}\frac{M_y}{M_F} + \left(\frac{N}{N_F}\right)^2 = 1} \quad (10)$$

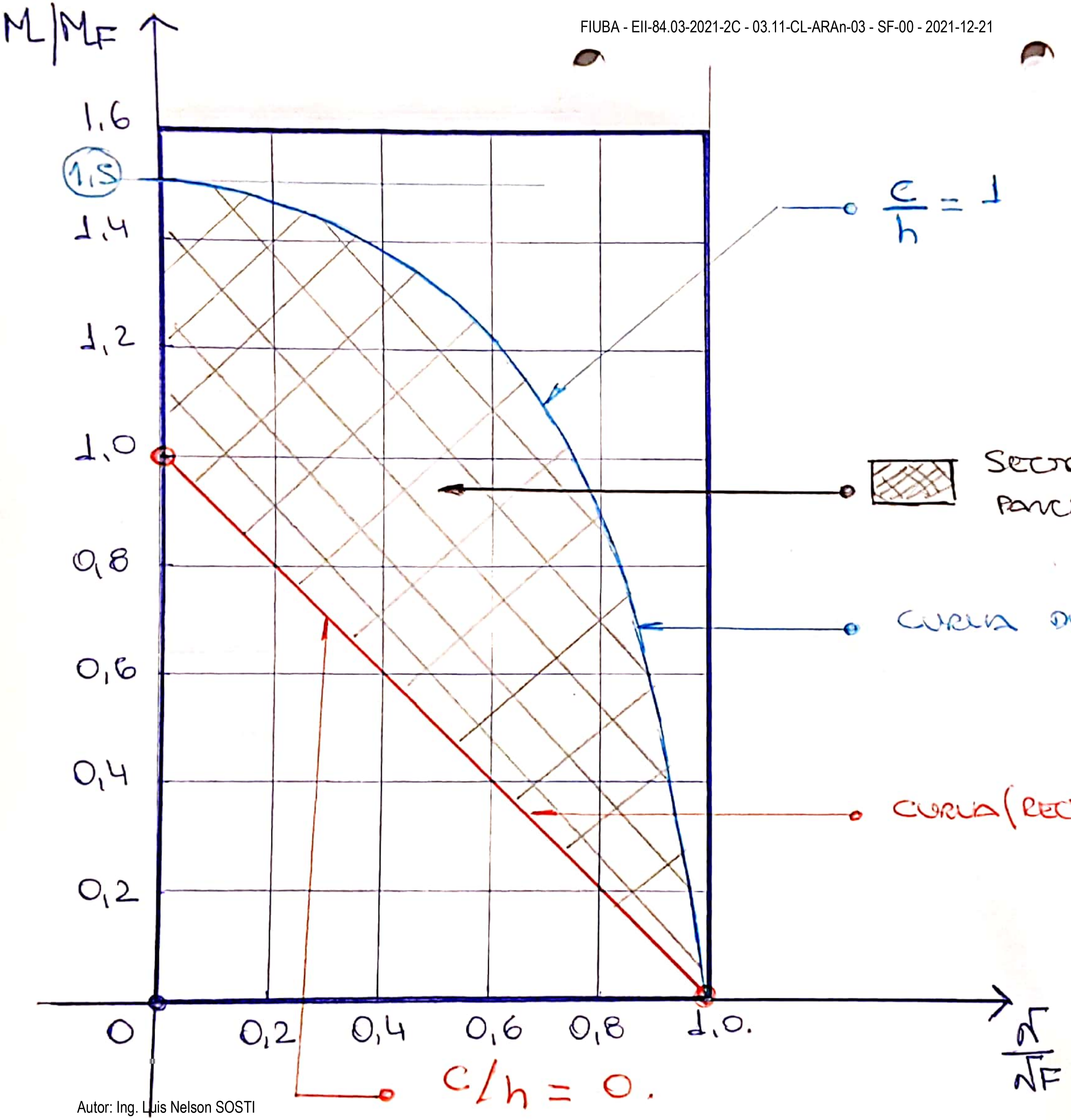
→ Es una curva límite de todas las combinaciones de N y M_y p/ plastificación total de la sección:

III) PLASTIFICACIÓN PARCIAL:

- SE PRESENTAN 3 POSIBLES CASOS Q/SON ILUSTRADOS Y PARA LOS CUALES SE REQUIERE RESOLVER LAS ECUACIONES SIMILARES A LAS PRECEDENTES.



C: PENETRACIÓN PLÁSTICA.



$\frac{c}{h} = 1$

SECTOR O ZONA DE PLASTIFICACIONES PARCIALES.

CURVA DE PLASTIFICACIÓN TOTAL (EXPRESIÓN (3))

CURVA (RECTA) → COMIENZO DE LA PLASTIFICACIÓN
→ EXPRESIÓN (1).

→ PARA UNA SECCIÓN RECTANGULAR Y PARA FLEXIÓN COMPUESTA; SE TIENE:

$$\frac{M}{N} = e = \text{cte.} \quad ; \quad N_F = \sigma_F\, b\, H \quad ; \quad M_F = \frac{\sigma_F . I_y}{z_{máx}} = \frac{\sigma_F\, b H^{\cancel{3}\,2}}{\frac{\cancel{H}}{\cancel{2}_1}\ \cancel{12}\,6} = \frac{\sigma_F\, b H^2}{6}$$

$$\frac{M_F}{N_F} = \frac{\cancel{\sigma_F} . \cancel{b} . H^{\cancel{2}}}{6 . \cancel{\sigma_F}\, \cancel{b}\cancel{H}} = \frac{H}{6} = \text{cte p/ una sección rectangular.}$$

$$\frac{M/N}{M_F/N_F} = \frac{6 . e}{H} = \text{cte.} = k.$$

$$\boxed{\frac{M}{M_F} : \frac{N}{N_F} = \frac{6e}{H} = k} \longrightarrow \text{FAMILIA DE RECTAS}$$

(11)

→ 3 PROBLEMAS:

1) SECCIÓN RECTANGULAR DADA.
σ_F DEFINIDO.
e: DATO
c: DATO
→ ¿Cuál es N = ?

- $k = \dfrac{6e}{H}$
- recta 'n' intersección con curva de penetración plástica 'c' → $\dfrac{N}{N_F}$ → N

---

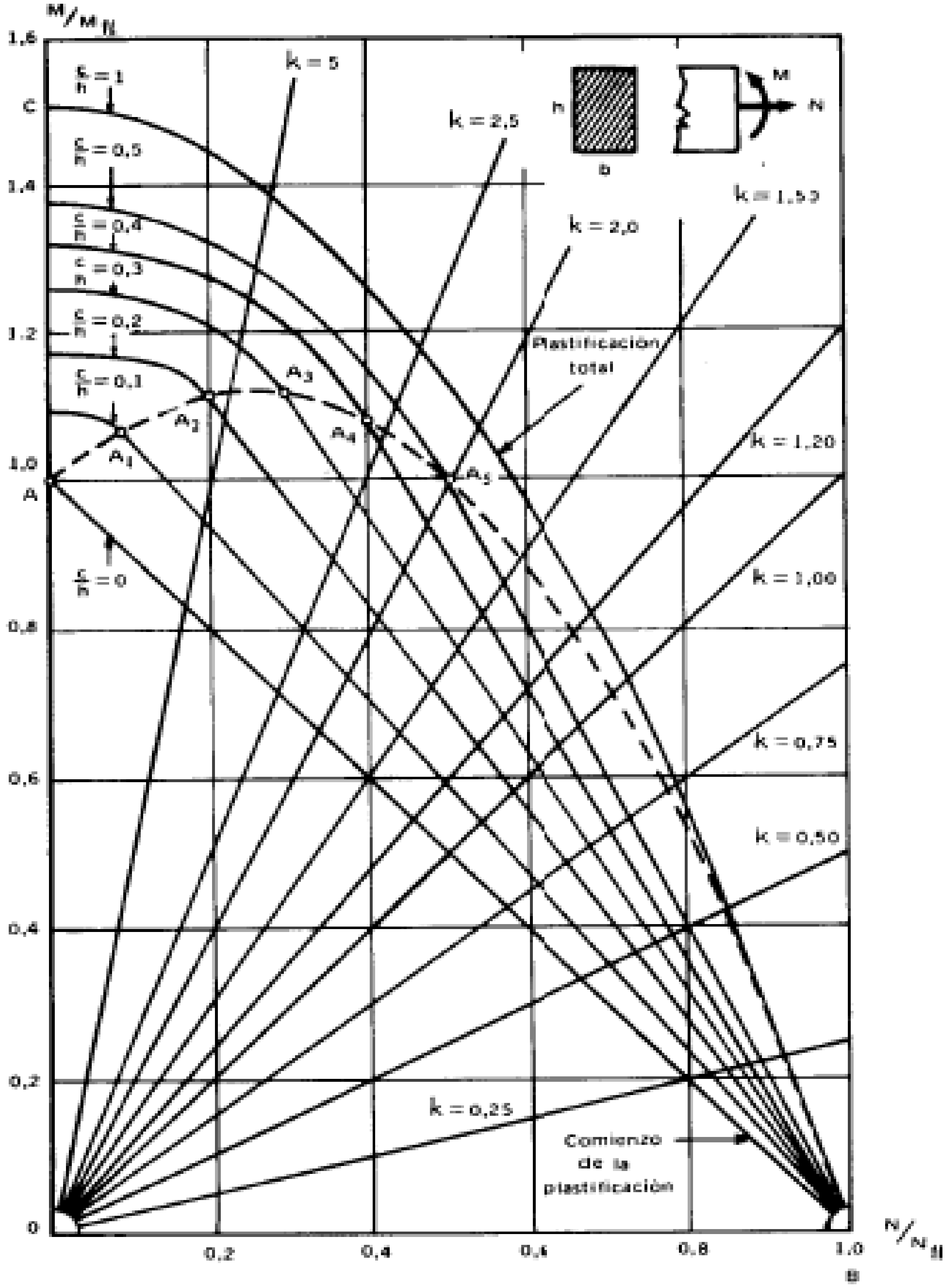
2) SECCIÓN RECTANGULAR
σ_F
M y N
→ ¿Cuál 'c'?

- M/M_F
- N/N_F
- CON ~~LAS~~ ABSCISA Y LA ORDENADA SE OBTIENEN 'c', 'k' y 'e'!

---

3) SECCIÓN RECTANGULAR
σ_F
M, N
→ ¿Cuál es el régimen de trabajo?

- M/M_F y N/N_F
- LA INTERSECCIÓN DEFINE EL PUNTO, EL PUNTO DEFINE LA ZONA.
  - ELÁSTICO
  - PARCIALMENTE PLÁSTICO
  - PLÁSTICO


M/M
1,6
C
1,4
1,2
1,0
A
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
B
N/N
c/h = 1
c/h = 0,5
c/h = 0,4
c/h = 0,3
c/h = 0,2
c/h = 0,1
c/h = 0
A1
A2
A3
A4
A5
k = 5
k = 2,5
k = 2,0
k = 1,50
k = 1,20
k = 1,00
k = 0,75
k = 0,50
k = 0,25
h
b
M
N
Plastificación total
Comienzo de la plastificación