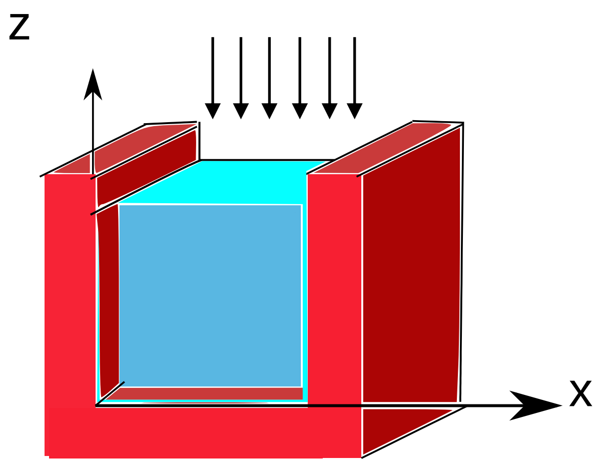
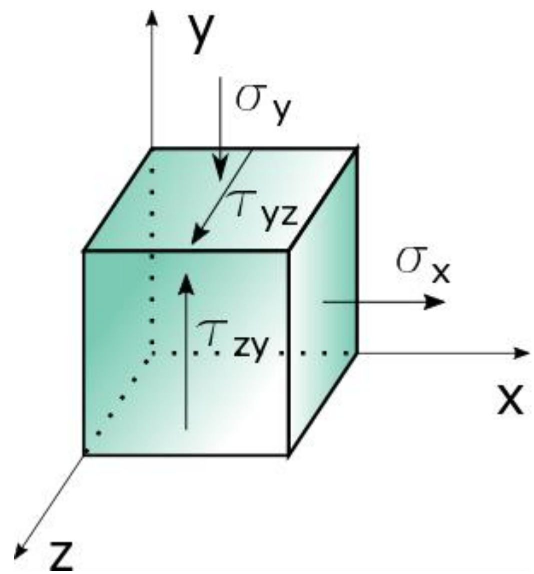
Estado de Deformaciones y Relaciones Constitutivas





Tania Poletilo - Manuela Medina - Constanza Ruffinelli

Universidad de Buenos Aires

Estabilidad II

flopez@fi.uba.ar / aterlisky@fi.uba.ar

Repaso teórico

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{n_x} \\ \varepsilon_{n_y} \\ \varepsilon_{n_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} \qquad \overline{\varepsilon_n} = [T_D] \cdot \check{n}$$

$$\overline{\varepsilon_n} = [T_D] \cdot \check{n} \qquad \varepsilon_l = \overline{\varepsilon_n} \cdot \check{n}$$

$$\overline{\varepsilon_l} = \varepsilon_l \; \check{n} \qquad \overline{\varepsilon_t} = \overline{\varepsilon_n} - \overline{\varepsilon_l}$$

Dirección principal es cuando $\overline{\varepsilon_n} = \overline{\varepsilon_l}$

$$[T_D] \cdot \check{n} = \varepsilon_l \; \check{n}$$

Deformaciones y direcciones principales

$$[T_D] \cdot \breve{n}_i = \varepsilon_i \, \breve{n}_i \quad \longrightarrow \quad ([T_D] - \varepsilon_i \, [I]) \cdot \breve{n}_i = \underline{0} \quad \longrightarrow \quad det([M]) = 0$$

Las direcciones principales son los autovectores de $[T_D]$, y son las mismas que $[T_T]$

y $|\varepsilon_i|$ son las deformaciones principales, y son los autovalores de $[T_D]$

$$det([M]) = {\varepsilon_i}^3 - I_1 \, {\varepsilon_i}^2 + I_2 \, \varepsilon_i - I_3 = 0$$

Invariantes: $I_1 = tr(T_D)$ $\quad I_2 = {}^1/_2 \left({I_1}^2 - tr([T_D] \cdot [T_D])\right)$ $\quad I_3 = det(T_D)$

$\varepsilon_V = tr(T_D)$

Clasificación del estado de deformaciones:

$I_3 \neq 0$ $\longrightarrow$ Estado triple (Ninguna deformación principal es igual a cero)

$I_3 = 0$ y $I_2 \neq 0$ $\longrightarrow$ Estado doble (Una deformación principal es igual a cero)

$I_3 = 0$ y $I_2 = 0$ y $I_1 \neq 0$ $\longrightarrow$ Estado simple (Dos deformaciones principales son iguales a cero)

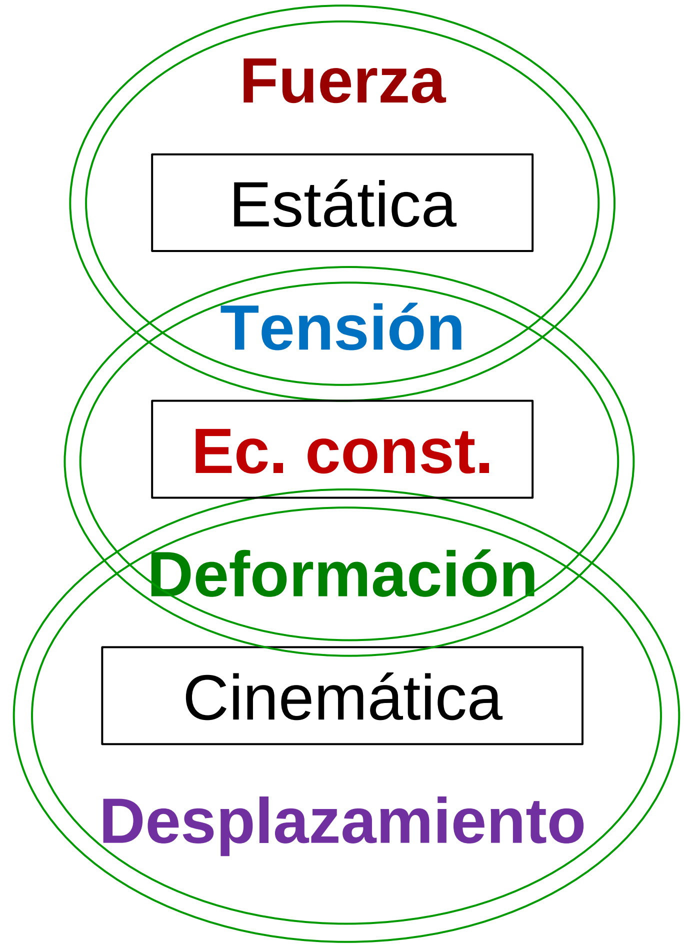
Ecuaciones constitutivas

La estática relaciona fuerza con tensión (cualquier material)

La cinemática relaciona desplazamiento con deformación (cualquier material)

Las ecuaciones constitutivas relacionan tensión con deformación (dependen del material)

Las ecuaciones constitutivas cierran la cadena de cálculo



Relaciones para materiales Isótropos

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\,\varepsilon_{xy} \\ 2\,\varepsilon_{xz} \\ 2\,\varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{(1-\mu)} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix}$$

Relaciones para materiales Isótropos

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\ \varepsilon_{xy} \\ 2\ \varepsilon_{xz} \\ 2\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

Como normal y tangencial está desacoplado

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}$$

Si lo quieren escribir como sistema de ecuaciones:

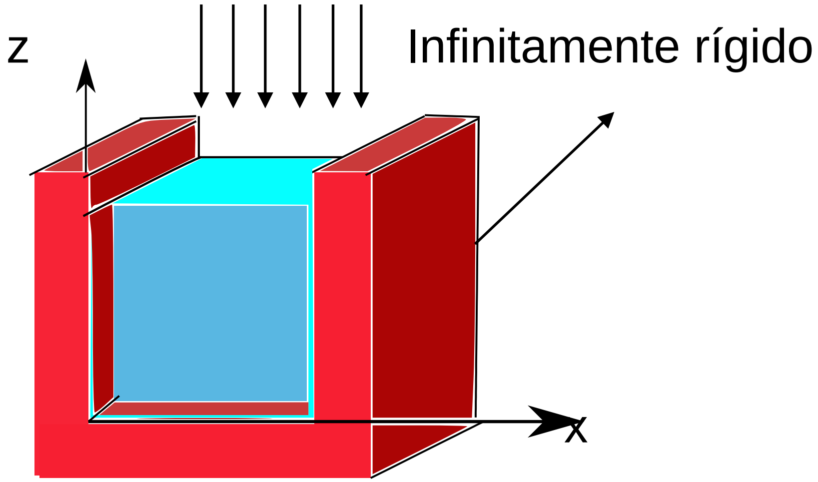
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_z$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_z$$

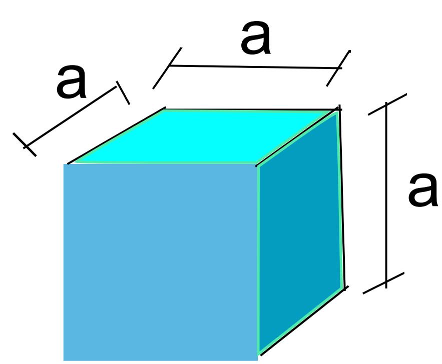
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\mu}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_x$$

Estas relaciones son validas para cualquier sistema de coordenadas.
Por lo tanto en coordenadas principales es lo mismo

Ejercicio 1: Calcular tensiones, fuerzas, Lfinal, ΔL, Volumen y ΔVolumen



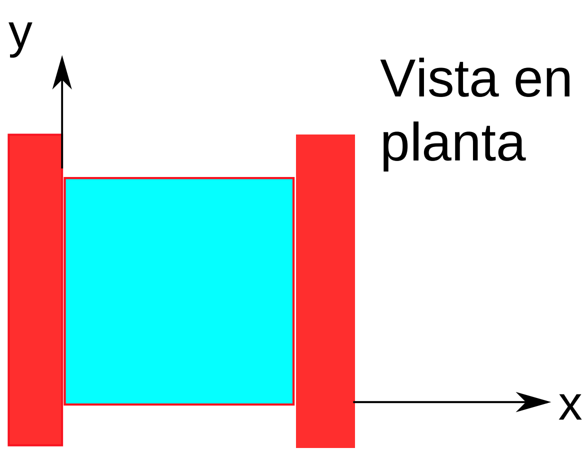
Datos:



$$a = 8cm \quad \mu = 0{,}3$$

$$Pz = 0{,}4\ kN/cm^2$$

$$E = 21000\ kN/cm^2$$

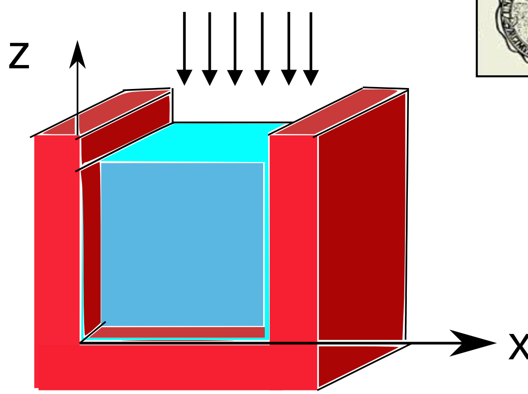


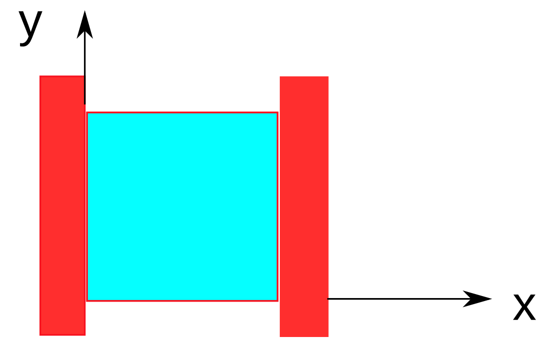
Vista en planta

Hipótesis:

- “canaleta roja” es infinitamente rígida
- Rozamiento nulo
- Peso del cubo despreciable

¿Qué cosas conocemos?





$$\sigma_x = \ ?-$$

$$\sigma_y = \ 0$$

$$\sigma_z = \ -Pz$$

$$\tau_{ij} = \ 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \ 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \ ?+$$

$$\varepsilon_{zz} = \ ?-$$

$$\gamma_{ij} = \ 0$$

Tenemos por lo tanto 3 incógnitas

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \cancel{\frac{\sigma_y}{E}} - \mu \frac{\sigma_z}{E} = 0$$

$$\sigma_x = -\mu \cdot Pz = -0{,}12 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \cancel{\frac{\sigma_y}{E}} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = +7{,}42 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \cancel{\frac{\sigma_y}{E}} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -1{,}73 \cdot 10^{-5}$$

1. Tensiones y Fuerzas

$$\sigma_x = -0{,}12\,\frac{kN}{cm^2} \qquad \sigma_y = 0\,\frac{kN}{cm^2} \qquad \sigma_z = -Pz = -0{,}4\,\frac{kN}{cm^2}$$

$$F_x = -0{,}12\,\frac{kN}{cm^2}\cdot \mathrm{A} \qquad F_y = 0\,\frac{kN}{cm^2}\cdot \mathrm{A} = 0\mathrm{kN} \qquad F_z = -0{,}4\,\frac{kN}{cm^2}\cdot \mathrm{A}$$

¿Qué valor de área tomamos?

Suponiendo pequeñas deformaciones → Tomo el área inicial $A = a^2 = 64\ cm^2$

$$F_x = -7{,}68\ kN \qquad F_y = 0\ kN \qquad F_z = -25{,}6\ kN$$

2. L_{final} y ΔL

$$\varepsilon_x = \frac{Xf - Xi}{Xi} = \frac{\Delta X}{Xi} = 0 \longrightarrow Xf = Xi = a = 8cm$$

$$\boxed{Xf = 8\ cm}$$

$$\varepsilon_y = \frac{Yf - Yi}{Yi} = \frac{\Delta Y}{Yi} = \frac{\Delta Y}{8cm} = 7{,}43 \cdot 10^{-6} \longrightarrow Yf = 8cm + 7{,}43 \cdot 10^{-6} \cdot 8cm$$

$$\boxed{Yf = 8{,}00006\ cm}$$

$$\varepsilon_z = \frac{Zf - Zi}{Zi} = \frac{\Delta Z}{Zi} = \frac{\Delta Z}{8cm} = -1{,}73 \cdot 10^{-5} \longrightarrow Zf = 8cm - 1{,}73 \cdot 10^{-5} \cdot 8cm$$

$$\boxed{Zf = 7{,}99986\ cm}$$

¡Muy pequeñas deformaciones!

3. Volumen final y ΔVol

$\mathrm{Vol\ i} = 512\ cm^3$ $\quad$ $\mathrm{Vol}\ f = Xf \cdot Yf \cdot Zf$

$$\mathrm{Vol}\ f = Xi(1+\varepsilon_x) \cdot Yi \cdot \left(1+\varepsilon_y\right) \cdot Zi \cdot (1+\varepsilon_z) =$$

$$\mathrm{Vol}\ f = Vol\ i \cdot (1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\underbrace{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y+\varepsilon_y \cdot \varepsilon_z+\varepsilon_z \cdot \varepsilon_x+\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z}_{\text{despreciable}}) =$$

$$\varepsilon_{Vol} = \frac{Vol\ f - Vol\ i}{Vol\ i} = \frac{\Delta Vol}{Vol\ i} = \frac{\Delta Vol}{(512cm)^3} = Traza = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = -9{,}87 \cdot 10^{-6}$$

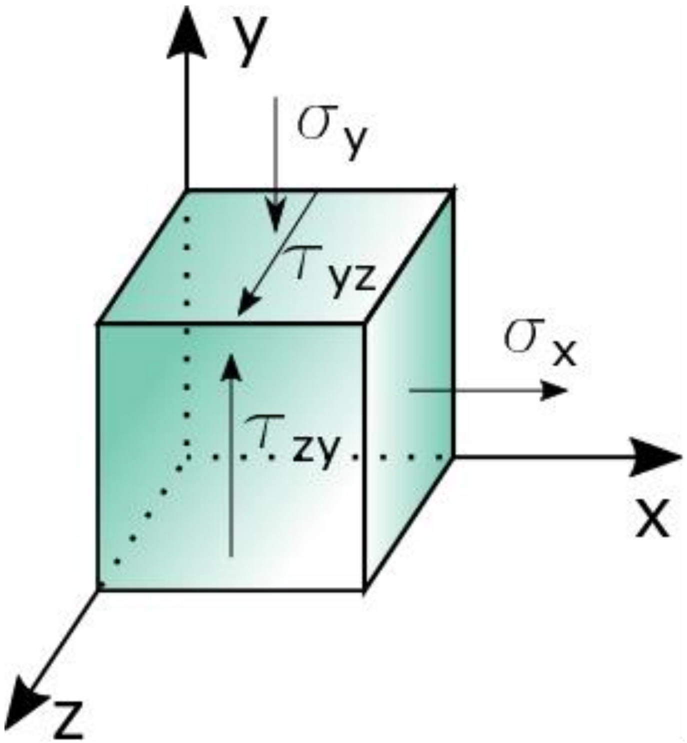
$\longrightarrow$ Invariante 1

$$\mathrm{Vol}\ f = Vol\ i + \Delta Vol = 512\mathrm{cm}^3 \cdot (1+\varepsilon_{Vol}) = 512\mathrm{cm}^3 \cdot (1+(-9{,}87 \cdot 10^{-6}))$$

$\mathrm{Vol}\ f = 511{,}995\ \mathrm{cm}^3$ $\quad$ $\Delta Vol = -5{,}05344 \cdot 10^{-3} cm^3$

Ejercicio 2: A partir del estado de tensión dado:

a) Determinar el tensor de tensiones en terna principal. Clasificar
b) Determinar el tensor de deformaciones en terna "xyz".
c) Determinar el tensor de deformaciones en terna principal. Clasificar
d) Calcular para el plano π el vector tensión y el vector deformación.



$$\|\sigma_x\| = \|\sigma_y\| = \|\tau_{zy}\| = 50MPa$$

Datos

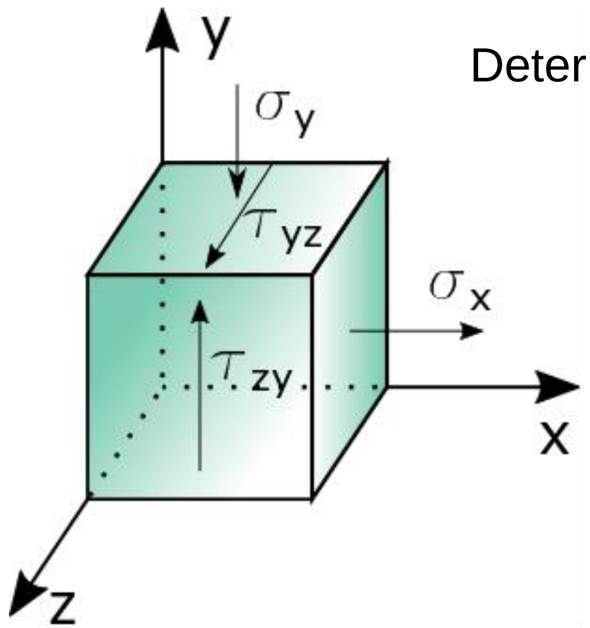
$$\hat{\eta}_\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = 210000\ MPa \qquad \mu = 0.3$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} = 80769{,}23\ MPa$$

Normal al plano π respecto a la terna "xyz"

Importante
El vector normal "$\hat{\eta}_\pi$" puede estar referido a cualquier terna.
El problema debe aclarar a cuál corresponde.



Determino tensor de tensiones a partir de los datos:

Sabiendo que:

$$\|\sigma_x\| = \|\sigma_y\| = \|\tau_{zy}\| = 50MPa$$

Por teorema de Cauchy:

$$\|\tau_{yz}\| = \|\tau_{zy}\| = 50\ MPa$$

Además a partir del cubo elemental dado se sabe que:

$$\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$$

Entonces el tensor de tensiones queda:

$$[T_t]_{xyz} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

Importante: Siempre que escribimos un tensor debemos indicar en que terna estamos trabajando

Como en el plano “x” no hay tensiones tangenciales podemos asegurar que la dirección x es una dirección principal, por lo tanto σ_x es una tensión principal.

a) Tensor de tensiones en terna principal

$$[T_t]_{xyz} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

Para calcular las tensiones principales tengo que resolver:

$$det([M]) = {\sigma_i}^3 - I_1\, {\sigma_i}^2 + I_2\, \sigma_i - I_3 = 0$$

Invariantes: $I_1 = tr(T_T)$ $\quad I_2 = {}^1/_2\left({I_1}^2 - tr([T_T]\cdot[T_T])\right)$ $\quad I_3 = det(T_T)$

$I_1 = 0\ MPa$ $\quad I_2 = -5000\ MPa^2$ $\quad I_3 = 125000\ MPa^3$

$Estado\ de\ tensión \rightarrow \quad I_3 \neq 0$ $\Longrightarrow$ **Estado triple de tensión**

$${\sigma_i}^3 + (-5000\ MPa^2)\cdot\ \sigma_i - 125000\ MPa^3 = 0 \quad \begin{cases} \sigma_a = -80{,}9\ MPa \\ \sigma_b = 30{,}9\ MPa \\ \sigma_c = 50{,}0\ MPa \end{cases}$$

Las tensiones debo ordenarlas en el tensor tal que: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ $\Longrightarrow$

$$[T_t]_{123} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 30{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & -80{,}9 \end{bmatrix} MPa$$

Calculo las direcciones principales para definir la terna “123”

Como se que “x” es una dirección principal $\Longrightarrow$ $\hat{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Calculo el vector asociado a $\sigma_2 = 30{,}9 \text{ MPa}$

$$\begin{bmatrix} 50 - 30{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & -50 - 30{,}9 & 50 \\ 0 & 50 & 0 - 30{,}9 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$-80{,}9 \cdot b_2 + 50 \cdot c_2 = 0$$

$$c_2 = \frac{80{,}9}{50} \cdot b_2 = 1{,}618 \cdot b_2 \Longrightarrow \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1{,}618 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Normalizo}} \hat{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}526 \\ 0{,}851 \end{pmatrix}$$

- Calculo el vector asociado a $\sigma_3 = -80{,}9 \text{ MPa}$

Tengo dos opciones:

- Realizo el mismo procedimiento que para calcular $\hat{\eta}_2$
- Sabiendo que $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ se que las direcciones principales asociadas a los mismos son perpendiculares entre sí

$$\hat{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}526 \\ 0{,}851 \end{pmatrix} \qquad \hat{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}851 \\ 0{,}526 \end{pmatrix}$$

b) Calculo el tensor de deformaciones en terna "xyz"

$$[T_t]_{xyz} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix} MPa \quad \xLeftrightarrow{\text{Ecuaciones constitutivas}} \quad [T_d]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Ecuaciones constitutivas

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{50\ MPa}{210000\ MPa} - \frac{0{,}3}{210000\ MPa} \cdot (-50\ MPa + 0) = 3{,}095 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{-50\ MPa}{210000\ MPa} - \frac{0{,}3}{210000\ MPa} \cdot (50\ MPa + 0) = -3{,}095 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{0\ MPa}{210000\ MPa} - \frac{0{,}3}{210000\ MPa} \cdot (50\ MPa - 50\ MPa) = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}}{2 \cdot G} = \frac{0\ MPa}{2 \cdot 80769{,}23\ MPa} = 0 \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{\tau_{xz}}{2 \cdot G} = \frac{0\ MPa}{2 \cdot 80769{,}23\ MPa} = 0$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{\tau_{yz}}{2 \cdot G} = \frac{50\ MPa}{2 \cdot 80769{,}23\ MPa} = 3{,}095 \cdot 10^{-4}$$

Entonces el tensor de deformaciones queda:

$$[T_d]_{xyz} = \begin{bmatrix} 3{,}095 & 0 & 0 \\ 0 & -3{,}095 & 3{,}095 \\ 0 & 3{,}095 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

c) Tensor de deformaciones en terna principal

$$[T_d]_{123} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

$$([T_D] - \varepsilon_i\ [I]) \cdot \breve{n}_i = \underline{0}$$

$$det([M]) = {\varepsilon_i}^3 - I_1\ {\varepsilon_i}^2 + I_2\ \varepsilon_i - I_3 = 0$$

Realizo el mismo procedimiento que para el cálculo de tensiones y direcciones principales

Pero ¿es la única forma?

Hay una forma mucho más fácil y sobre todo más corta de calcular el tensor de deformaciones

Las ecuaciones constitutivas relacionan las tensiones con las deformaciones, para cualquier terna. Por lo tanto, teniendo el tensor de tensiones principales, puedo calcular directamente las deformaciones principales.

$$[T_t]_{123} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 30{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & -80{,}9 \end{bmatrix} MPa$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{50\ MPa}{210000\ MPa} - \frac{0{,}3}{210000\ MPa} \cdot (30{,}9\ MPa - 80{,}9\ MPa) = 3{,}095 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{30{,}9\ MPa}{210000\ MPa} - \frac{0{,}3}{210000\ MPa} \cdot (50\ MPa - 80{,}9\ MPa) = 1{,}913 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{-80{,}9\ MPa}{210000\ MPa} - \frac{0{,}3}{210000\ MPa} \cdot (50\ MPa + 30{,}9\ MPa) = -5{,}008 \cdot 10^{-4}$$

$$[T_d]_{123} = \begin{bmatrix} 3{,}095 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}913 & 0 \\ 0 & 0 & -5{,}008 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Estado triple de deformación

Las direcciones principales son únicas, por lo tanto:

$$\hat{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}526 \\ 0{,}851 \end{pmatrix} \qquad \hat{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}851 \\ 0{,}526 \end{pmatrix}$$

d) Vector tensión y vector deformación para el plano π

$$\hat{\eta}_\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normal al plano π respecto a la terna “xyz” → Utilizo $[T_t]_{xyz}$ y $[T_d]_{xyz}$

$$\overline{\rho_\pi} = [T_t]_{xyz} \cdot \hat{\eta}_\pi = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{\sqrt{2}} & -\frac{50}{\sqrt{2}} & \frac{50}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} MPa$$

$$\sigma_\pi = \overline{\rho_\pi} \cdot \hat{\eta}_\pi = \begin{pmatrix} \frac{50}{\sqrt{2}} & -\frac{50}{\sqrt{2}} & \frac{50}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} MPa \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0\ MPa$$

$$\overline{\sigma_\pi} = \sigma_\pi \cdot \hat{\eta}_\pi = (0 \quad 0 \quad 0)\ MPa$$

$$\overline{\tau_\pi} = \overline{\rho_\pi} - \overline{\sigma_\pi} = \begin{pmatrix} \frac{50}{\sqrt{2}} & -\frac{50}{\sqrt{2}} & \frac{50}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} MPa$$

- Vector de deformación

$$\overline{\varepsilon_\pi} = [T_d]_{xyz} \cdot \hat{\eta}_\pi = \begin{bmatrix} 3{,}095 & 0 & 0 \\ 0 & -3{,}095 & 3{,}095 \\ 0 & 3{,}095 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = (2{,}188 \quad -2{,}188 \quad 2{,}188)^{\mathrm{T}} \cdot 10^{-4}$$

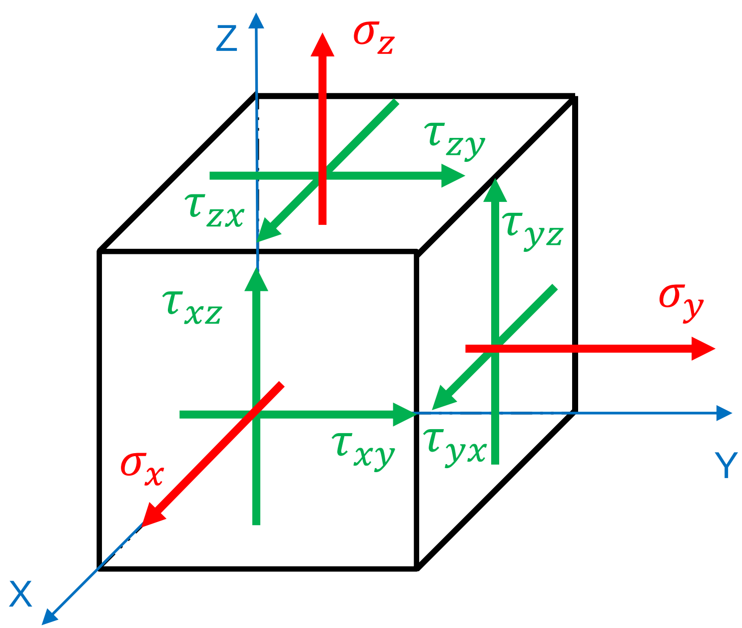
$$\varepsilon_l = \overline{\varepsilon_\pi} \cdot \hat{\eta}_\pi = (2{,}188 \quad -2{,}188 \quad 2{,}188)^{\mathrm{T}} \cdot 10^{-4} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{\varepsilon_l} = \varepsilon_l \cdot \hat{\eta}_\pi = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\overline{\varepsilon_t} = \overline{\varepsilon_\pi} - \overline{\varepsilon_l} = (2{,}188 \quad -2{,}188 \quad 2{,}188)^{\mathrm{T}} \cdot 10^{-4}$$

Ejercicio 3: Para el punto “A” de un sólido

1) Determinar el Tensor de Tensiones en la terna (x, y, z)
2) Clasificar el estado tensional del punto “A”



$$[T_T]_{XYZ} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Datos

Material: $E = 200.000\ MPa$
$\mu\ = 0{,}25$

Por la acción de fuerzas en equilibrio, se dan las siguientes cuestiones:

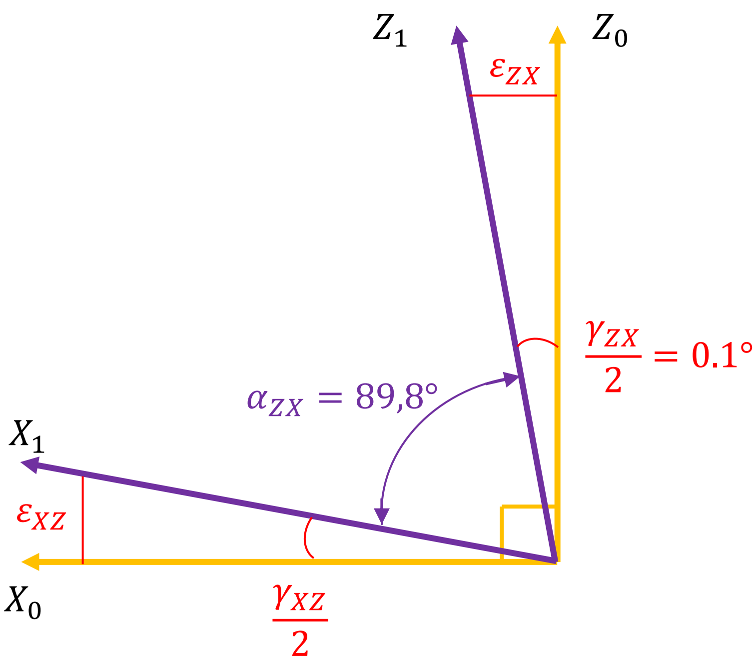
A) Solo un ángulo entre dos de las rectas inicialmente perpendiculares cambia su valor a $\alpha_{ZX} = 89{,}8°$.

B) En dirección perpendicular a las dos anteriores (Y) el sólido tiene impedido deformarse axialmente.

C) Hay una variación de volumen del cubo elemental $\varepsilon_V = -8 \cdot 10^{-4}$.

D) Para un plano dado (π) se conoce la tensión normal al mismo $\sigma_\pi = -200\ MPa$, y con ángulos a los ejes (X,Y,Z)=(30,90,60)°

A) Solo un ángulo entre dos de las rectas inicialmente perpendiculares cambia su valor a $\alpha_{ZX} = 89{,}8°$.



Por Hip. de pequeñas deformaciones

$$sen(\theta) \sim tan(\theta) \sim \theta$$

$$\varepsilon_{ZX} = \varepsilon_{XZ} = \frac{\gamma_{zx}}{2} = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$$

En radianes

$$\varepsilon_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G} \qquad G = \frac{E}{2(1+\mu)} = 80000\ MPa$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = 279{,}25 \text{ MPa}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$$

$$[T_T]_{XYZ} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 279{,}25 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 279{,}25 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} MPa$$

“Las deformaciones longitudinales, dependen exclusivamente de las tensiones normales y son las responsables del cambio de volumen”

B) En dirección perpendicular a las dos anteriores (Y) el sólido tiene impedido deformarse axialmente.

$$\varepsilon_Y = 0$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E}(\sigma_Y - \mu \cdot \sigma_X - \mu \cdot \sigma_Z) = 0$$

$$\sigma_Y = \mu(\sigma_X + \sigma_Z) = 0{,}25 \cdot (\sigma_X + \sigma_Z) \qquad 1$$

C) Hay una variación de volumen del cubo elemental $\varepsilon_V = -8 \cdot 10^{-4}$.

$$\varepsilon_V = \varepsilon_X + \overset{0}{\cancel{\varepsilon_Y}} + \varepsilon_Z = -8 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_V = \overbrace{\frac{1}{E}(\sigma_X - \mu \cdot \sigma_Y - \mu \cdot \sigma_Z)}^{\varepsilon_X} + \overbrace{\frac{1}{E}(\sigma_Z - \mu \cdot \sigma_X - \mu \cdot \sigma_Y)}^{\varepsilon_Z} = -8 \cdot 10^{-4}$$

$$(1-\mu)\,\sigma_X - 2\mu \cdot \sigma_Y + (1-\mu)\,\sigma_Z = -8 \cdot 10^{-4} \cdot E$$

$$0{,}75\ \sigma_X - 0{,}5\ \sigma_Y + 0{,}75\ \sigma_Z = -160\ MPa$$

$$1{,}5\ (\sigma_X + \sigma_Z) + 320\ MPa = \sigma_Y \qquad 2$$

Uniendo 1 con 2 obtenemos $\sigma_Z = -\sigma_x - 256\ MPa$ 3

D) Para un plano dado (π) se conoce la tensión normal al mismo $\sigma_\pi = -200\ MPa$, y con ángulos a los ejes (X,Y,Z)=(30,90,60)°

$$\{n_\pi\} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_x) \\ cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

El vector tensión asociado al plano π

$$\{\rho_\pi\} = [T_T]_{XYZ} \cdot \{n_\pi\}$$

$$\{\rho_\pi\} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 279{,}25 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 279{,}25 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} MPa \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma_x + 0{,}5 \cdot 279{,}25 \\ 0 \\ 0{,}5 \cdot \sigma_z + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 279{,}25 \end{pmatrix}$$

Tensión normal asociada al plano π

$$|\{\sigma_\pi\}| = \{\rho_\pi\}^T \cdot \{n_\pi\}$$

$$|\{\sigma_\pi\}| = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma_x + 0{,}5 \cdot 279{,}25 \\ 0 \\ 0{,}5 \cdot \sigma_z + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 279{,}25 \end{pmatrix}^T MPa \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = -200\ MPa$$

$$0{,}75 \cdot \sigma_X + 0{,}25 \cdot \sigma_Z + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 279{,}25\ MPa = -200\ \mathrm{MPa} \qquad (4)$$

Uniendo 3 con 4 obtenemos $\sigma_X = -755{,}68\ \mathrm{MPa}$

$\sigma_Z = 499{,}68\ \mathrm{MPa}$

De 2 obtengo $\sigma_Y = -64\ \mathrm{MPa}$

1) Determinar el Tensor de Tensiones en la terna (x, y, z)

$$[T_T]_{XYZ} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -755{,}68 & 0 & 279{,}25 \\ 0 & -64 & 0 \\ 279{,}25 & 0 & 499{,}68 \end{pmatrix} MPa$$

2) Clasificar el estado tensional del punto “A”

$$I_3 = det([T_T]_{XYZ}) \neq 0$$

Estado triple (o espacial) de tensiones