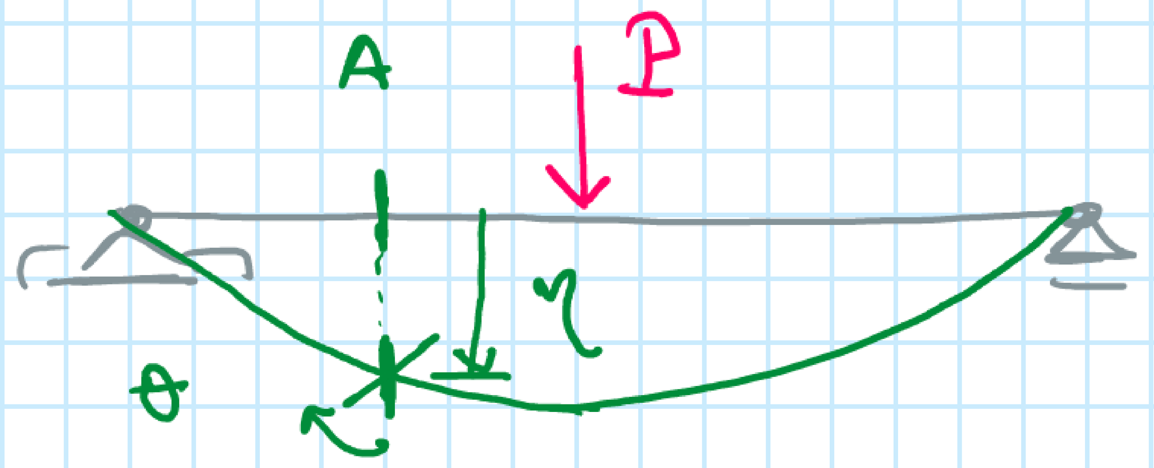
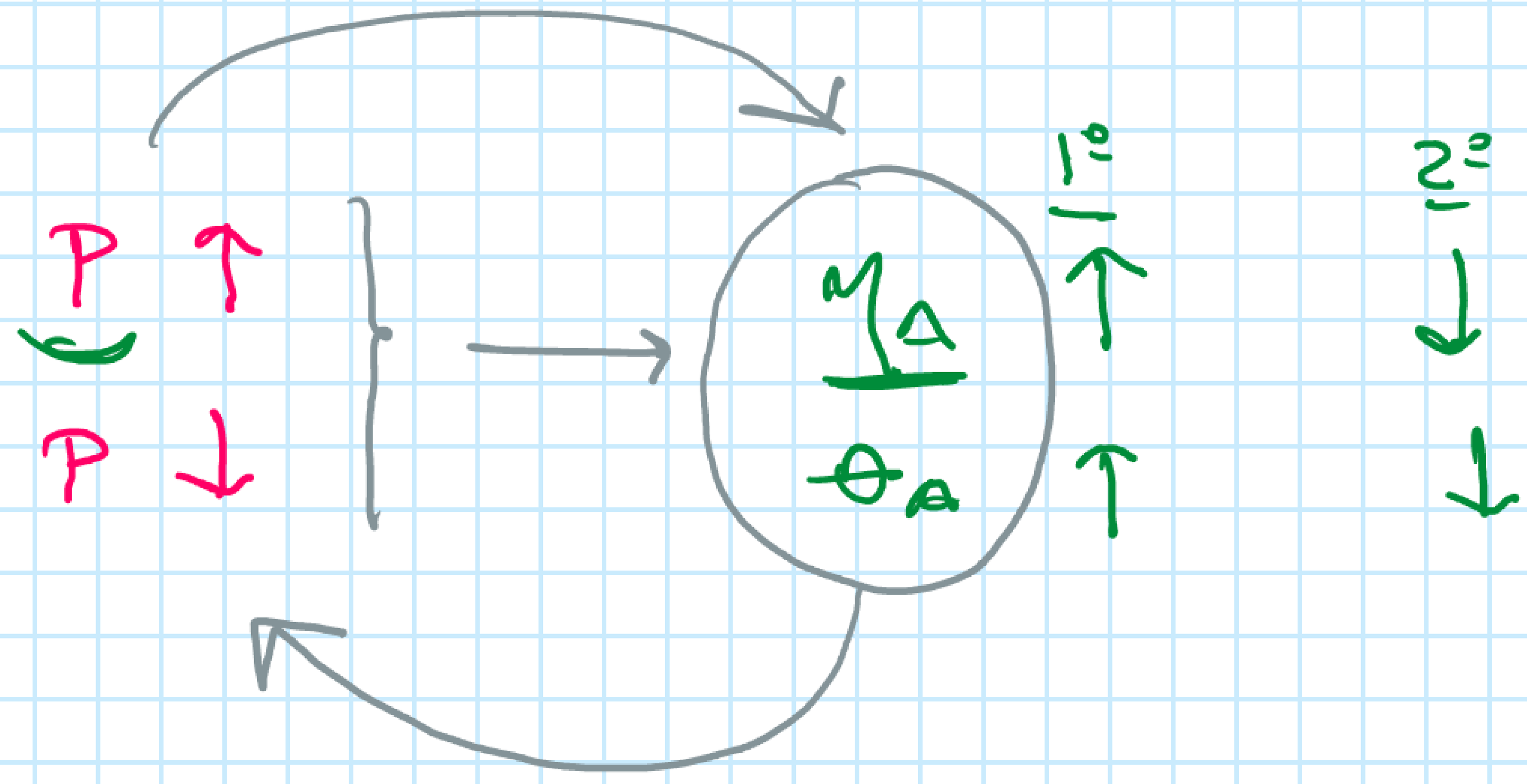
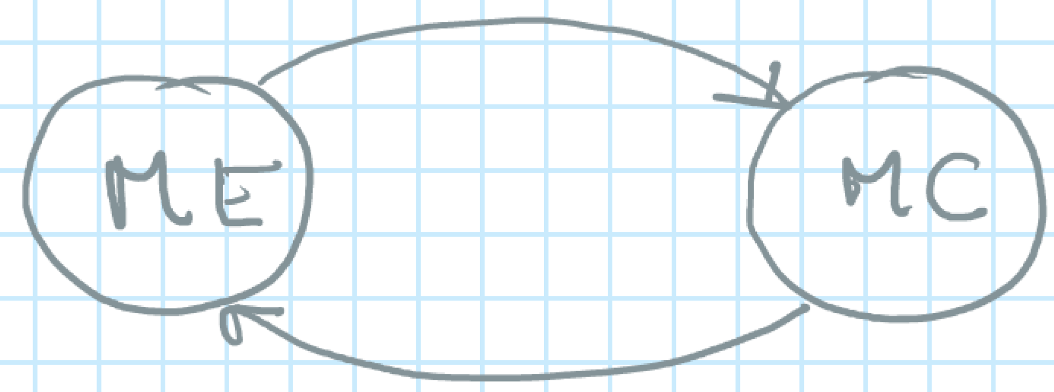
09.01 - INTRODUCCIÓN:

martes, 30 de noviembre de 2021 08:50



L E A I

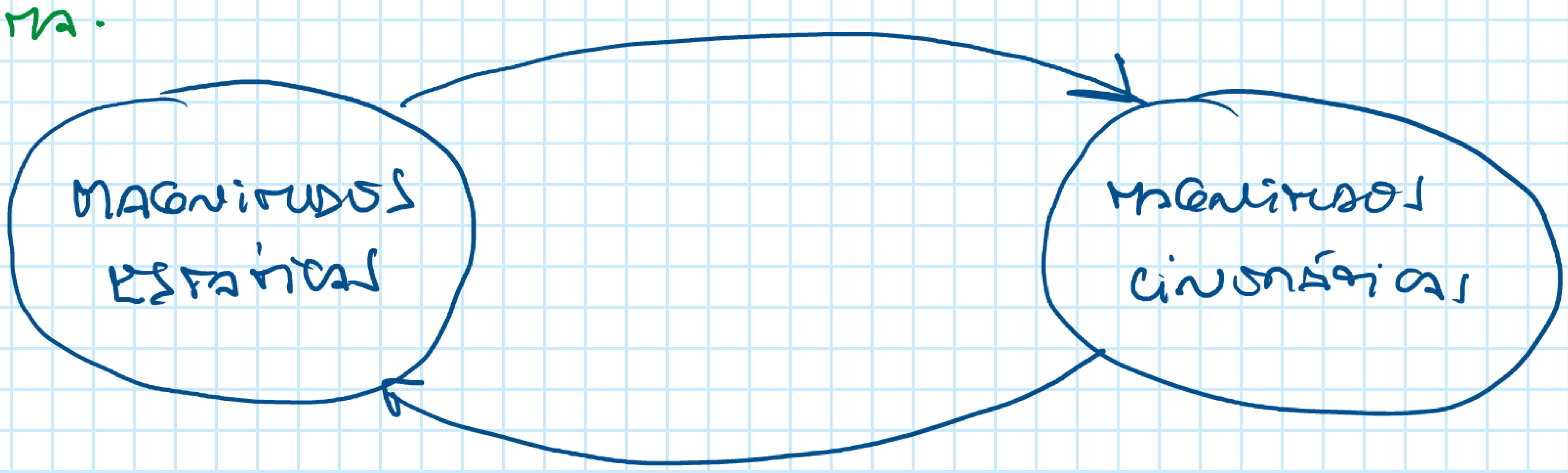


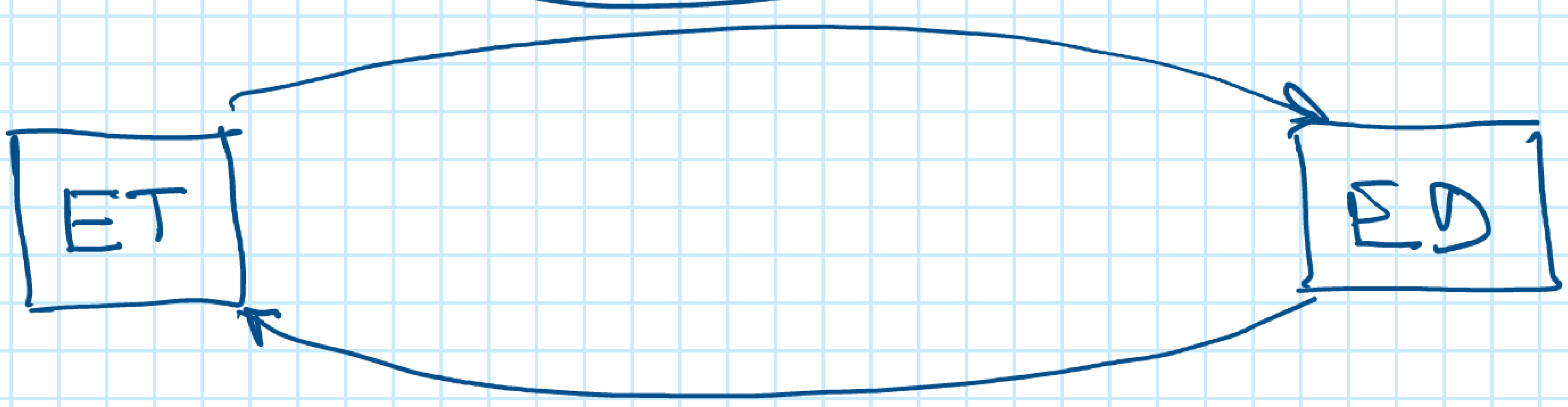


M_A ; θ_A

$\left.\begin{matrix}M_A\\ \theta_A\end{matrix}\right]_{AC}$ $\left.\begin{matrix}M_A\\ \theta_A\end{matrix}\right]_{M}$ $\left.\begin{matrix}M_A\\ \theta_A\end{matrix}\right]_{H°}$

$\left.\begin{matrix}M_A\\ \theta_A\end{matrix}\right]_{Goma.}$





ET → [TT]
ED → [TD]
→ Lógico - analítico - deductivo.

El camino que vamos a seguir p/ encontrar este vínculo entre

ME y MC → → Experimental ←
lógico
deductivo
analítico

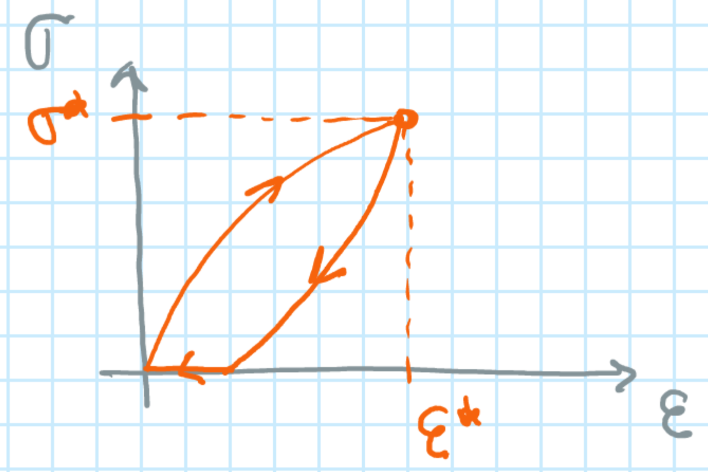
"Relaciones entre tensiones y deformaciones"

"Relaciones constitutivas"

09.02 - HIPÓTESIS - PRIMERAS RELACIONES:

martes, 30 de noviembre de 2021 08:52

- MATERIALES → HOMOGÉNEOS ✓
  ↳ ISÓTROPOS ✓
- PERÍODO DE COMPORTAMIENTO DEL MATERIAL: → ELÁSTICO. LINEAL ✓



- ME → ET → [TT] → SIMÉTRICO 3x3 → 6 VALORES DISTINTOS → $\{\bar{\sigma}\}_{6\times1}$
- MC → ED → [TD] → " " → 6 " " → $\{\bar{\varepsilon}_d\}_{6\times1}$

$$\underset{\substack{[TD]\\6\times1}}{\{\bar{\varepsilon}_d\}} = \underset{6\times6}{[B]}\ \underset{\substack{[TT]\\6\times1}}{\{\bar{\sigma}\}}$$

$$\underset{6\times1}{\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \hline \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\end{Bmatrix}} = \underset{6\times6}{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{16}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{61} & \cdots & a_{66}\end{bmatrix}} \underset{6\times1}{\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \hline \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}}$$

36 ctes.
↓
21 cte.
↓
18 ctes.
↓
3 ctes.
↓
2 ctes

DE LA REALIZACIÓN DE ENSAYOS Y EXPERIMENTOS DE LABORATORIO:

(I) POR ESTAR DENTRO DEL PERÍODO ELÁSTICO → SE CUMPLE LA "LEY DE BETTI" → LEY DE RECIPROCIDAD:

$$\boxed{a_{ij} = a_{ji}} \rightarrow [B] \rightarrow \text{SIMÉTRICA.}$$

(II) POR SER ISÓTROPO Y HOMOGÉNEO:

↳ II.a → LAS DEFORMACIONES ESPECÍFICAS LONGITUDINALES SON INDEPENDIENTES DE LAS TENSIONES TANGENCIALES τ.

ε_{ii} y τ_{ij} ESTÁN DISOCIADAS

↳ II.b → LAS DEFORM. ESPECÍFICAS TRANSVERSALES Y LAS TENSIONES NORMALES SON INDEPENDIENTES.

ε_{ij} y σ_{ii} → ESTÁN DISOCIADAS.

- LA EXPRESIÓN MATEMÁTICA NOS QUEDA

$$\underset{6\times1}{\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \hline \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\end{Bmatrix}} = \underset{6\times6}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{31} & \cdots & a_{33} & & & \\ \hline & & & a_{44} & \cdots & a_{46}\\ & 0 & & \vdots & & \vdots\\ & & & a_{64} & \cdots & a_{66}\end{array}\right]} \underset{6\times1}{\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \hline \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}}$$

$$\{\bar{\varepsilon}_d\} = [B]\{\bar{\sigma}\} \longleftrightarrow \{\bar{\sigma}\} = [E]\{\bar{\varepsilon}_d\}$$

[B] y [E] MATRICES CONSTITUTIVAS O DE ELASTICIDAD

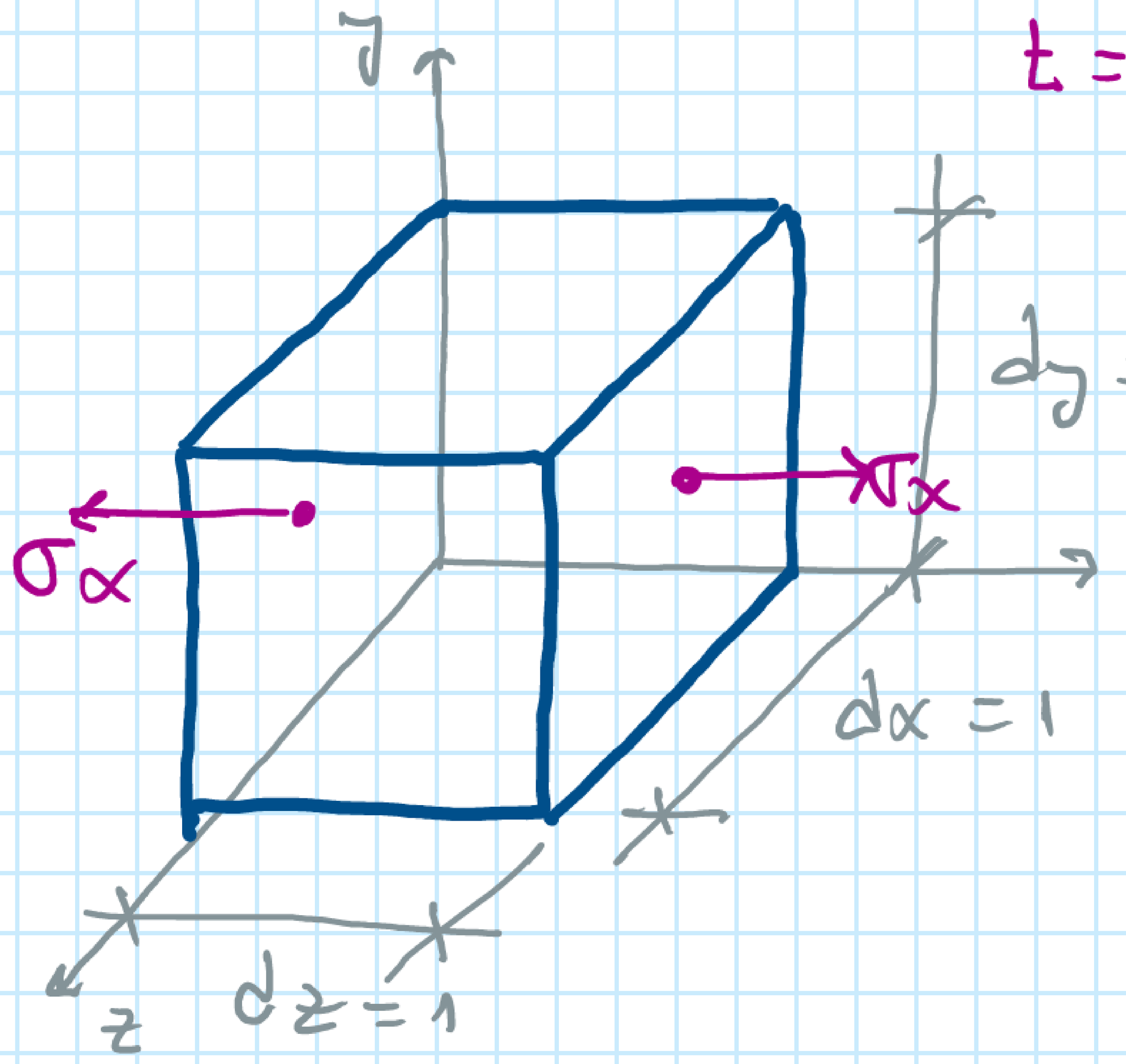
09.03 - ENSAYOS:

martes, 30 de noviembre de 2021 10:45

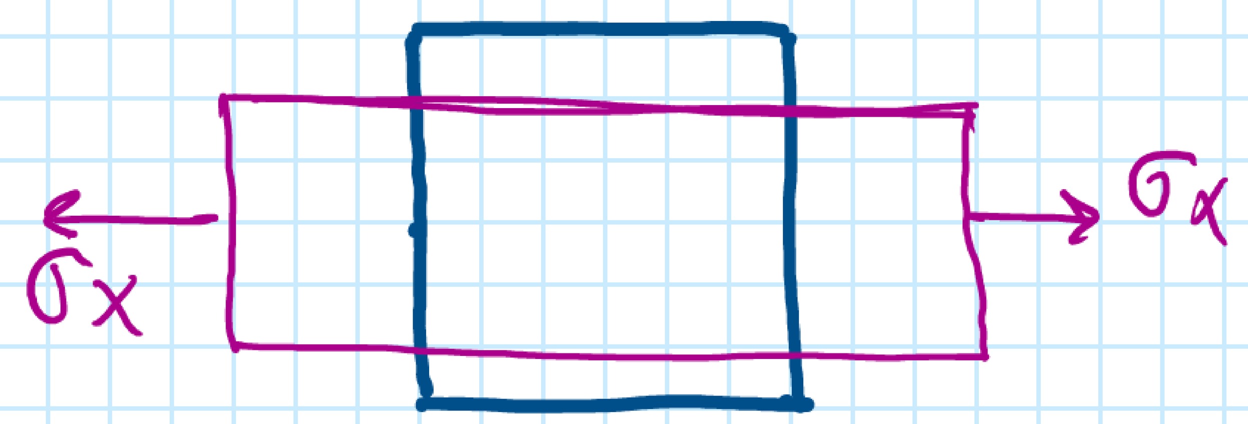
1º ENSAYO

$t = 0 \rightarrow \nexists$ cargas aplicadas

$t = 0^+ \rightarrow$ aplico cargas



$$F_x = \sigma_x \, dA = \sigma_x . \underbrace{dx}_{=1} \underbrace{dy}_{=1} = \sigma_x .$$



$$\varepsilon_{ii} = \frac{\Delta L_{ii}}{\underbrace{L_{0,i}}_{=1}} \rightarrow \varepsilon_{ii} = \Delta L_{ii}$$

1º CASO $\quad \sigma_x \neq 0 \quad \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad \sigma_x > 0$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$$

$\sigma_x > 0 \rightarrow \varepsilon_{xx} > 0$

$\varepsilon_{yy} < 0 \wedge \varepsilon_{zz} < 0.$

$$\varepsilon_{yy} = -\underline{\mu_{yx}} . \underline{\varepsilon_{xx}} = -\mu_{yx} . \frac{\sigma_x}{E}$$

$\mu_{yx} \wedge \mu_{zx}$ se definen (+)

$$\varepsilon_{zz} = -\mu_{zx} . \varepsilon_{xx} = -\mu_{zx} . \frac{\sigma_x}{E}$$

Nota:

μ_{ij}: $i \rightarrow$ coordenada efecto; $j \rightarrow$ coordenada causa.

2º CASO $\quad \sigma_y \neq 0 \quad \sigma_x = \sigma_z = 0 \wedge \sigma_y > 0$

$$\begin{cases} \varepsilon_{yy} = \dfrac{\sigma_y}{E} . \\ \varepsilon_{xx} = -\mu_{xy} . \varepsilon_{yy} = -\mu_{xy} . \dfrac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_{zz} = -\mu_{zy} . \varepsilon_{zz} = -\mu_{zy} . \dfrac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

3º CASO $\quad \sigma_z \neq 0 \quad \sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \sigma_z > 0.$

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz} = \dfrac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_{xx} = -\mu_{xz} \, \varepsilon_{zz} = -\mu_{xz} \dfrac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_{yy} = -\mu_{yz} . \varepsilon_{zz} = -\mu_{yz} . \dfrac{\sigma_z}{E} . \end{cases}$$

09.03 - ENSAYOS:

martes, 30 de noviembre de 2021 10:59

MATERIALES ISÓTROPOS →

$$\mu_{yx} = \mu_{xy} = \mu_{xz} = \mu_{zx} = \mu_{yz} = \mu_{zy} = \mu$$ COEFICIENTE DE POISSON

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}$$

$\varepsilon_{\perp}$ ← DIRECCIÓN ⊥ A LA APLICACIÓN DE LA CARGA. (DEF. ESPECÍFICA LONGITUDINAL)

$\varepsilon_{\parallel}$ ← DIRECCIÓN DE APLICACIÓN DE LA CARGA (DEFORMACIÓN ESPECÍFICA LONGITUDINAL).

A μ SE LO DEFINE (+) → SE PRECEDE DE LA CONDICIÓN DEL SIGNO (−).

— o — o — o —

$\boxed{4° \text{ CASO}}$ $\sigma_x \neq 0 \wedge \sigma_y \neq 0 \wedge \sigma_z \neq 0.$

POR LA LINEALIDAD ENTRE LAS VARIABLES → PSE.

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\sigma_x}{E} - \mu\dfrac{\sigma_y}{E} - \mu\dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\sigma_y}{E} - \mu\dfrac{\sigma_x}{E} - \mu\dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\sigma_z}{E} - \mu\dfrac{\sigma_x}{E} - \mu\dfrac{\sigma_y}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \end{cases}$$

"LEY GENERALIZADA DE HOOKE"

I) μ: AL IGUAL QUE 'E', 'G' ES UNA CARACTERÍSTICA O PROPIEDAD DEL MATERIAL.

II) μ EN MATERIALES ANISÓTROPOS U ORTÓTROPOS SON ≠

$$\mu_{ij} \neq \mu_{kl}$$

$$\mu_{yx} = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} \qquad \mu_{zy} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{yy}}$$

$$\mu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{ii}}{\varepsilon_{jj}}$$

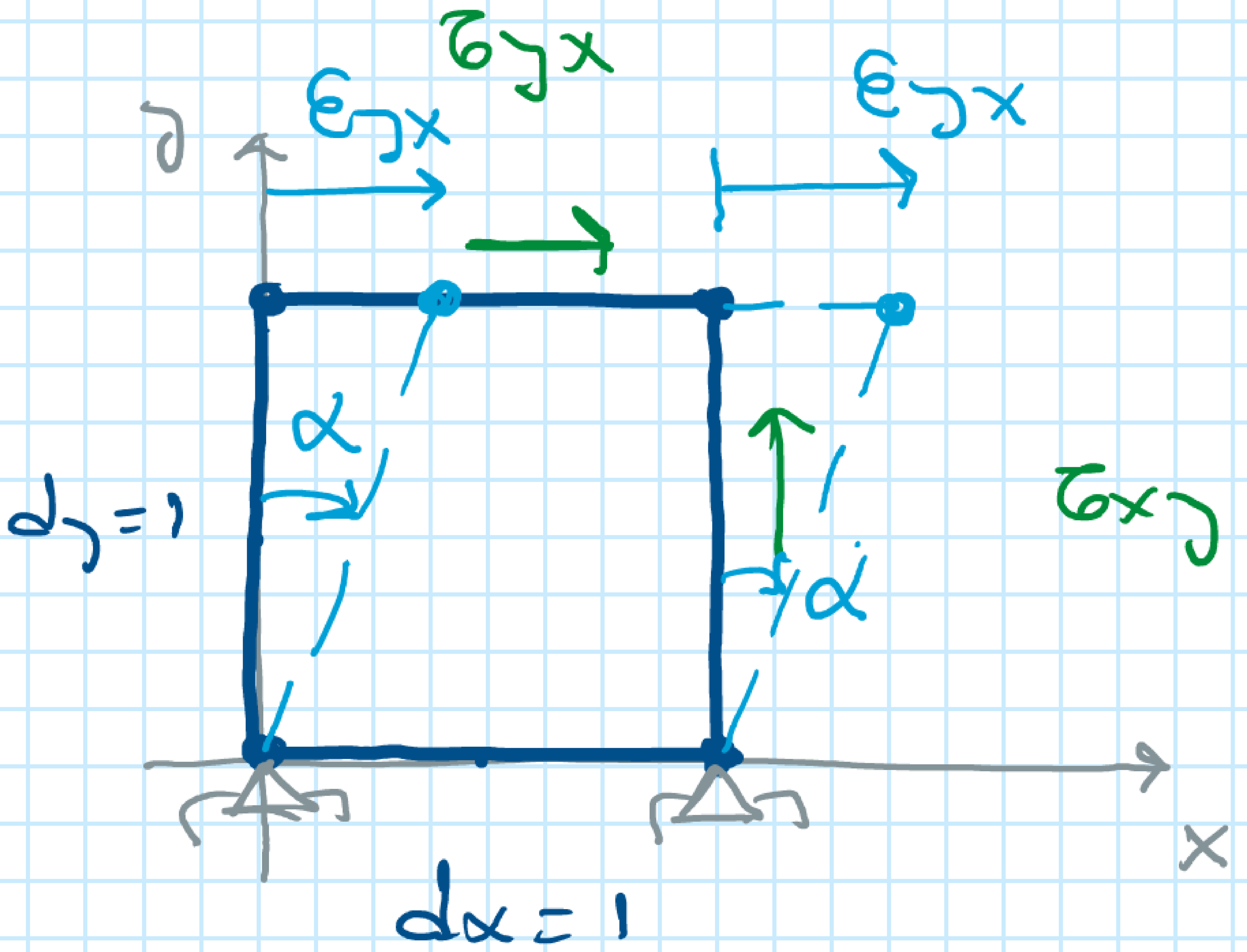
ε_{ii} ← EFECTO

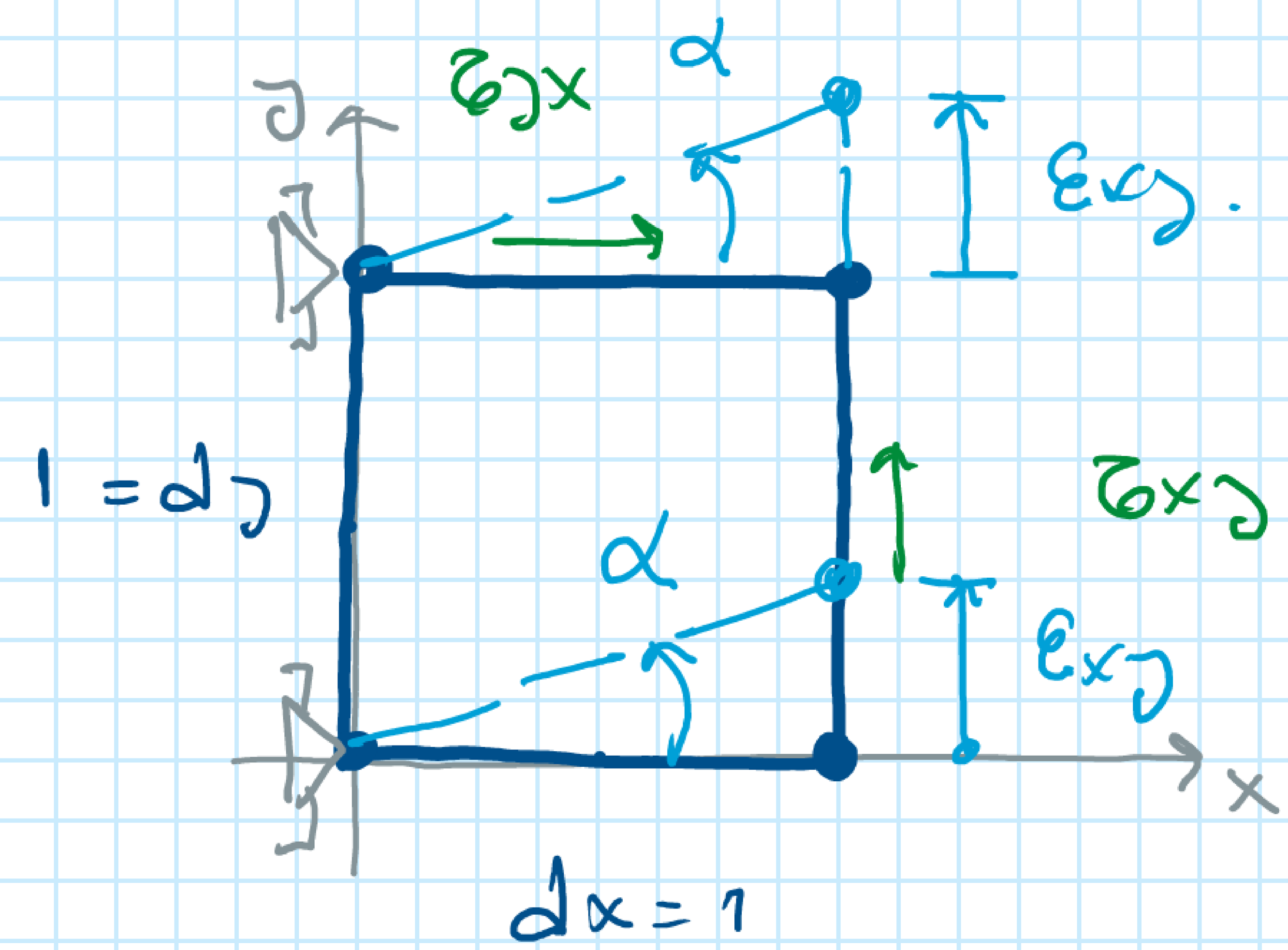
ε_{jj} ← CAUSA. (ⅎ EFECTO).

09.03 - ENSAYOS:

martes, 30 de noviembre de 2021 11:10

$\boxed{2^{\circ}\ \text{ENSAYO}}$ → Vincular a las tens. tangenciales con las deformaciones específicas transversales.





Hipótesis de pequeños desplazamientos:

Arco ≡ cuerda ≡ tangente

$$\alpha \cdot \underbrace{dy}_{=1} = \varepsilon_{yx} \rightarrow \boxed{\alpha = \varepsilon_{yx}} \quad (1)$$

$$\alpha \cdot \underbrace{dx}_{=1} = \varepsilon_{xy} \Rightarrow \boxed{\alpha = \varepsilon_{xy}} \quad (2)$$

α para ambos ensayos es el mismo.

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \alpha = \varepsilon_{yx} \\ (2) & \alpha = \varepsilon_{xy} \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}}$$

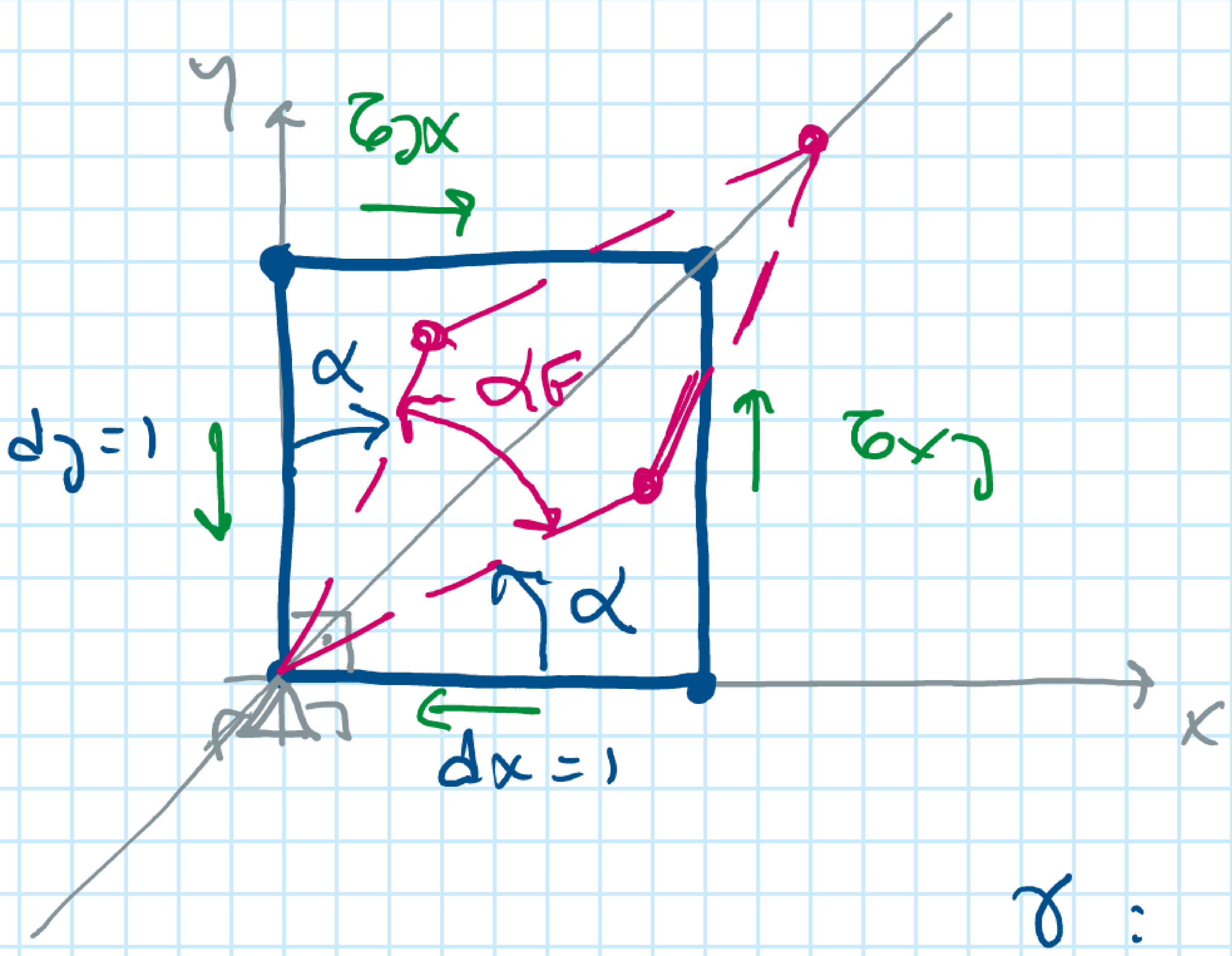
Haciendo lo mismo p/ los otros planos:

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} \quad \wedge \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}}$$

09.03 - ENSAYOS:

martes, 30 de noviembre de 2021 11:25



$$\begin{cases} \alpha_{0,xy} = \dfrac{\pi}{2} = 90^\circ . \\ \alpha_{F,xy} \end{cases}$$

$$\alpha_{0,xy} - \alpha_{F,xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{F,xy} = \gamma_{xy}$$

γ : Distorsión angular entre 2 direcciones, en este caso entre x e y.

$$\gamma_{xy} = \alpha + \alpha = 2\alpha = 2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_{yx} .$$

$$\underbrace{\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}}_{\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}} = \underbrace{2\varepsilon_{yx} = \gamma_{yx}}_{\varepsilon_{yx} = \frac{\gamma_{yx}}{2} .}$$

$$\boxed{\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad \wedge \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}}$$

Si se aplica ley de Hooke:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 2\varepsilon_{xy} \longleftrightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 2\varepsilon_{yz} \longleftrightarrow \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{\gamma_{yz}}{2}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 2\varepsilon_{xz} \longleftrightarrow \varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{\gamma_{xz}}{2}$$

09.04 - LEY DE HOOKE GENERALIZADA:

martes, 30 de noviembre de 2021 11:35

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \hline \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/E & -\mu/E & -\mu/E & & & \\ -\mu/E & 1/E & -\mu/E & & \underline{0} & \\ -\mu/E & -\mu/E & 1/E & & & \\ \hline & & & 1/2G & 0 & 0 \\ & \underline{0} & & 0 & 1/2G & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1/2G \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \hline \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

E : módulo de elasticidad longitudinal

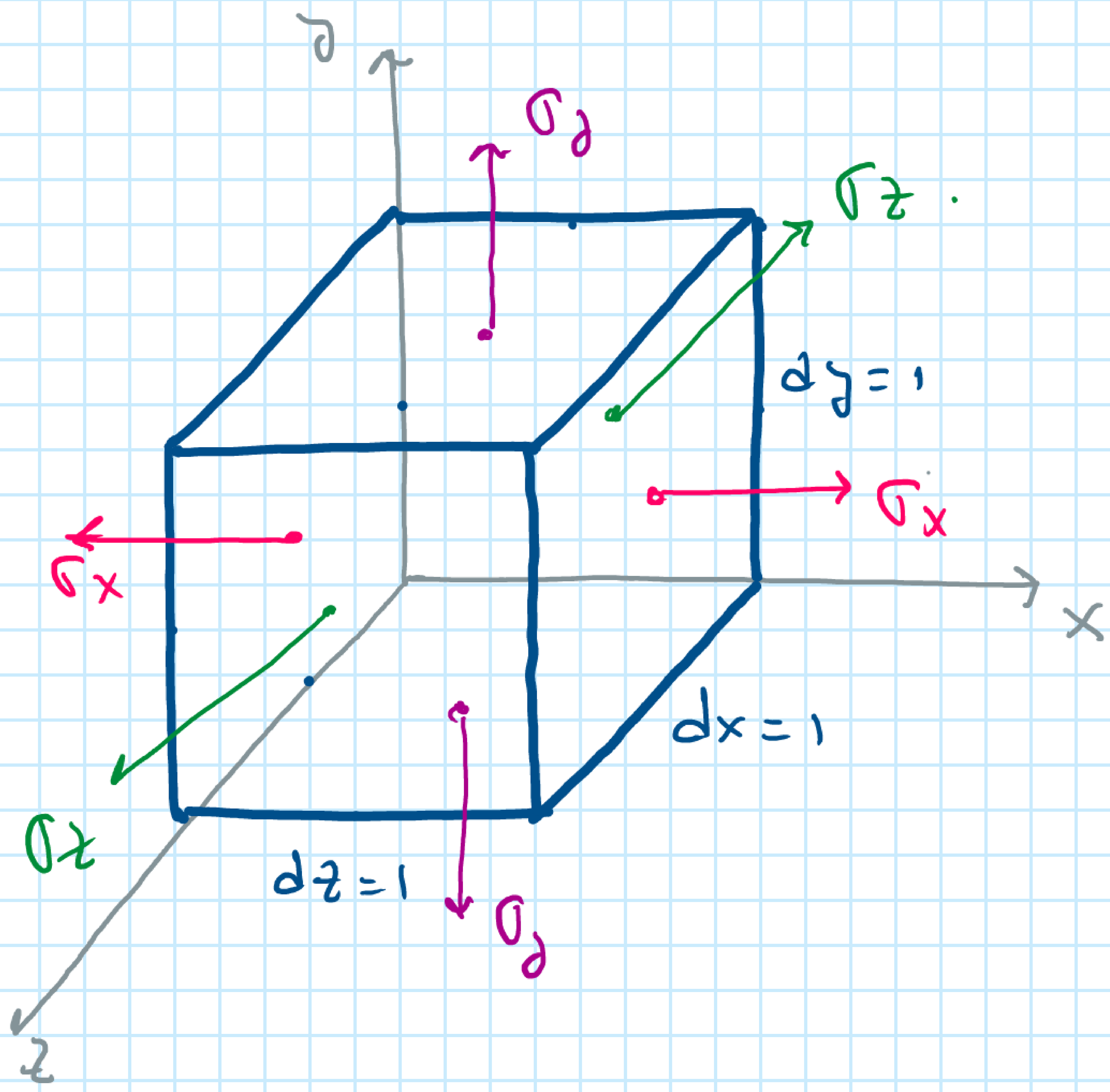
G : " " " transversal

μ : coeficiente de Poisson

} constantes elásticas del material.

09.05 - VARIACIÓN ESPECÍFICA DE VOLUMEN:

martes, 30 de noviembre de 2021 11:54



$$V_0 = dx\,dy\,dz = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$\boxed{X}$ L_{0x}

$$\begin{cases} L_{fx} = L_{0x} + \Delta L_x = dx + \Delta L_x \\ L_{fx} = 1 + \Delta L_x \end{cases}$$

$$\Delta L_x = L_{fx} - L_{0x} = L_{fx} - 1$$

$$\Delta L_x = 1 + \underbrace{\Delta L_x}_{\Delta dx} - 1 = \Delta dx.$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_{0x}} = \frac{\Delta dx}{L_{0x}} = \frac{\Delta dx}{dx} = \Delta dx$$

$$\underline{\varepsilon_{xx} = \Delta dx}$$

$\boxed{Y}$ $\varepsilon_{yy} = \Delta dy$ $\boxed{Z}$ $\varepsilon_{zz} = \Delta dz.$

$$V_f = L_{fx} \cdot L_{fy} \cdot L_{fz} = (1+\Delta dx)(1+\Delta dy)(1+\Delta dz) =$$

$$= (1+\varepsilon_{xx})(1+\varepsilon_{yy})(1+\varepsilon_{zz}) =$$

$$= 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} + \cancel{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}} + \cancel{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}} + \cancel{\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}} + \cancel{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}}$$

<u>2 HIPÓTESIS</u> TÉRMINOS DE O.S.

i) → DE PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS

ii) → " " DEFORMACIONES.

$$\boxed{V_f = 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}$$

$$\Delta V = V_f - V_0 = 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{1} \rightarrow \boxed{\varepsilon_V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \text{TRAZA}[TD] = I_1[TD]}$$

$$\varepsilon_V = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\varepsilon_V = \frac{1}{E}\left[(\sigma_x - 2\mu\sigma_x) + (\sigma_y - 2\mu\sigma_y) + (\sigma_z - 2\mu\sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_V = \frac{1}{E}\left[\sigma_x(1-2\mu) + \sigma_y(1-2\mu) + \sigma_z(1-2\mu)\right]$$

$$\boxed{\varepsilon_V = \frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{(1-2\mu)}{E}\,\text{TRAZA}[TT] = \frac{(1-2\mu)}{E}\,I_1[TT]}$$

09.05 - VARIACIÓN ESPECÍFICA DE VOLUMEN:

martes, 30 de noviembre de 2021 11:54

$$\boxed{\varepsilon_V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \text{traza}[TD] = I_1[TD]}$$

$$\boxed{\varepsilon_V = \frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \left(\frac{1-2\mu}{E}\right)\text{traza}[TT] = \left(\frac{1-2\mu}{E}\right) I_1[TT]}$$

PARTICULARIDADES:

I $\quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p > 0$

$$\varepsilon_V = \frac{(1-2\mu)}{E}\cdot 3p = \frac{\Delta V}{V_0} > 0 \quad \text{porque } \Delta V > 0$$

$$(1-2\mu)\cancel{\frac{3p}{E}} > 0 \rightarrow 1 - 2\mu > 0 \rightarrow \boxed{\mu < \frac{1}{2} = 0,5}$$

II $\quad \varepsilon_V = \frac{3(1-2\mu)}{E}\, p = \frac{p}{\underbrace{\frac{E}{3(1-2\mu)}}_{K}} = \frac{p}{K} \rightarrow \varepsilon_V = \frac{p}{K}$

$$p = K\cdot\varepsilon_V \quad ; \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

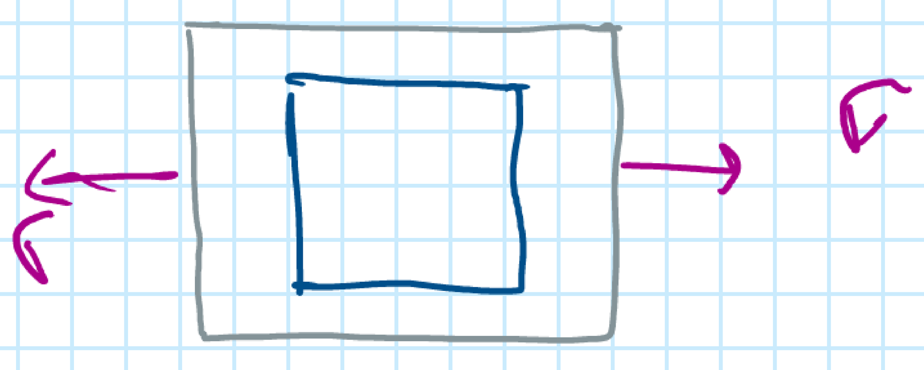
• si $\mu \rightarrow 0,5 \rightarrow K \rightarrow \infty \rightarrow \boxed{\varepsilon_V \rightarrow 0}$

$\mu \rightarrow 0,5 \rightarrow$ el material es cada vez + rígido.

si $\mu = 0,5 \rightarrow$ " " sería infinitamente rígido.

• si $\mu \rightarrow 0 \rightarrow K = \frac{E}{3} \rightarrow \boxed{\varepsilon_V = \frac{3p}{E}}$

• si $\mu \rightarrow -\infty \rightarrow K \rightarrow 0 \rightarrow \varepsilon_V \rightarrow \infty \rightarrow$ rigidez nula.



material con $\mu < 0$

• $\boxed{0 \le \mu < 0,5}$

→ aumenta la rigidez

disminuye la rigidez. ←

• si $\mu > 0,5 \rightarrow K < 0$ un material traccionado → disminuiría su volumen.

09.06 - RELACIÓN ENTRE E, G Y μ:

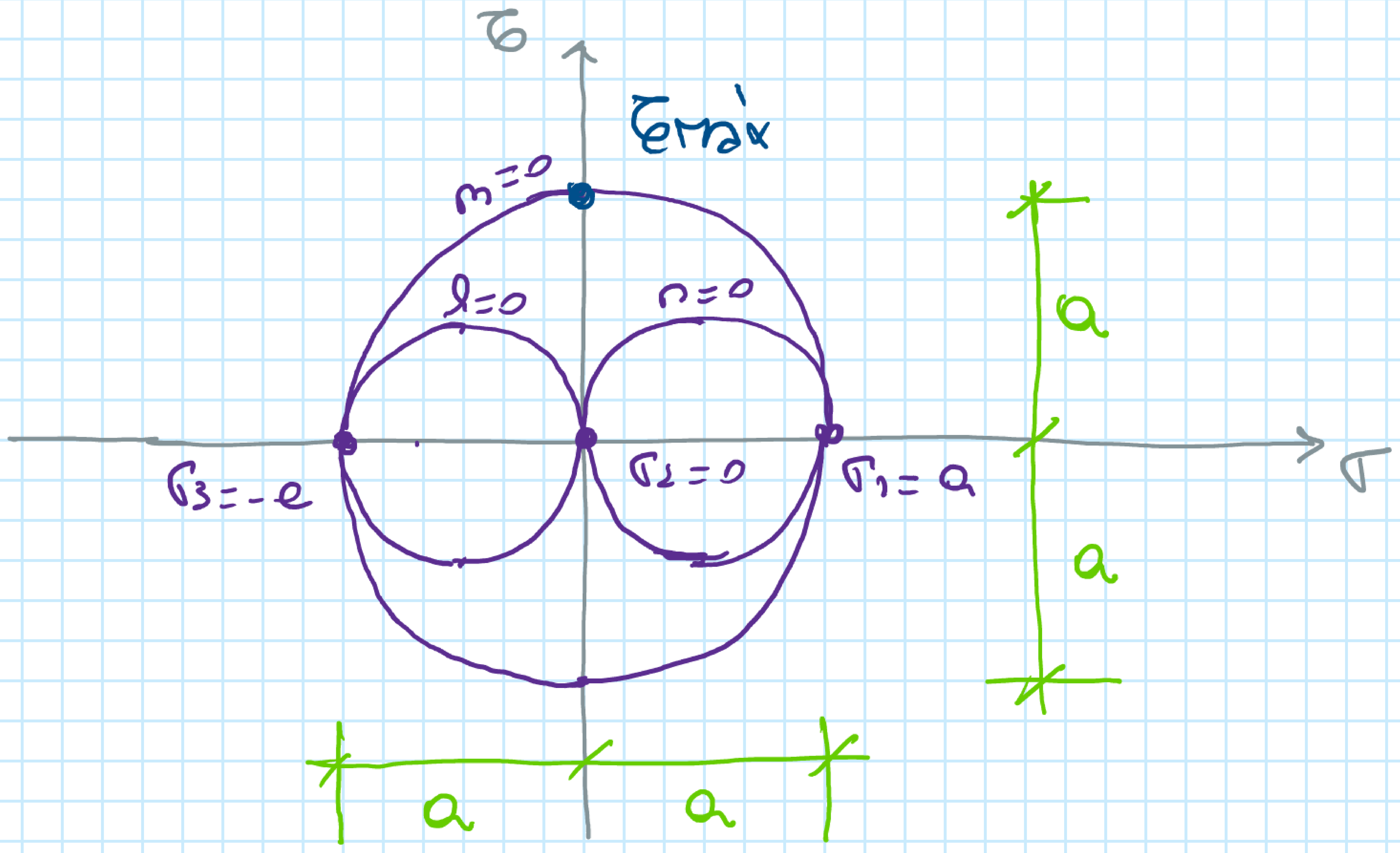
martes, 30 de noviembre de 2021 12:24

Vamos a trabajar con un caso particular de torsión:

→ Terna principal:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -a \end{cases}$$

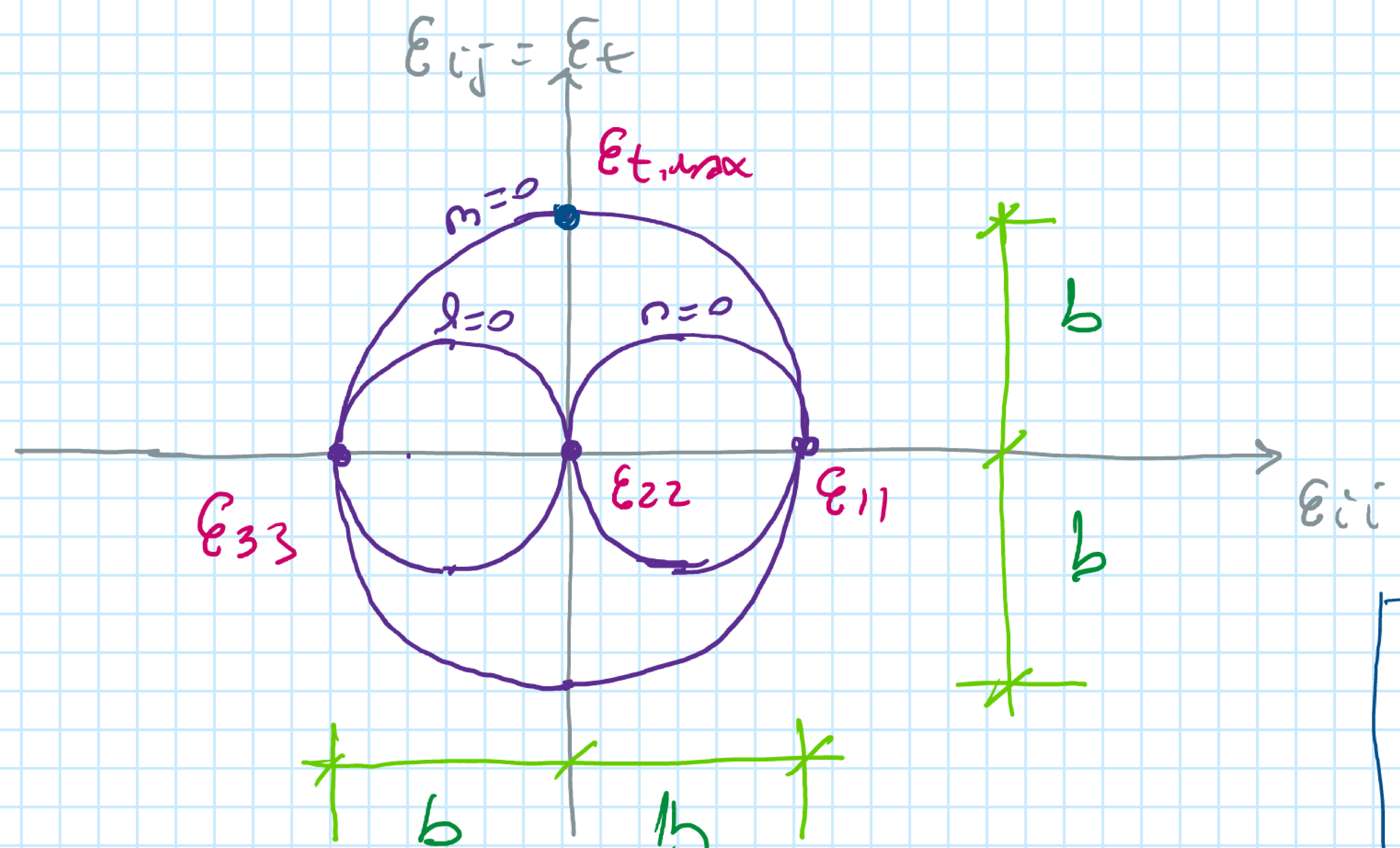
• Mostramos a través de un círculo de Mohr:



$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2+\sigma_3)\right] = \frac{1}{E}\left[a - \mu(-a)\right] = \frac{(1+\mu)}{E}\,a \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1+\sigma_3)\right] = \frac{1}{E}\left[0 - \mu(a-a)\right] = 0 \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1+\sigma_2)\right] = \frac{1}{E}\left[-a - \mu(a+0)\right] = -\frac{(1+\mu)}{E}\,a \end{cases}$$

$$\varepsilon_{t,máx} = \,?$$

$$\boxed{\varepsilon_{t,máx} = \frac{\tau_{máx}}{2G} = \frac{a}{2G} = b}$$



$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{t,máx}.$$

$$\underbrace{\frac{(1+\mu)}{E}\cdot\cancel{a}}_{b} = \underbrace{\frac{\cancel{a}}{2G}}_{b}$$

$$\boxed{\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1+\mu)} \\ E &= 2(1+\mu)\,G \\ \mu &= \frac{E}{2G} - 1 \end{aligned}}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{2G} = \frac{\tau_{ij}}{2\cdot\frac{E}{2(1+\mu)}} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\,\tau_{ij}} \leftarrow$$

09.07 - LEY DE HOOKE GENERALIZADA:

martes, 30 de noviembre de 2021 12:37

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \hline \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\mu & -\mu & & & \\ -\mu & 1 & -\mu & & \underline{0} & \\ -\mu & -\mu & 1 & & & \\ \hline & & & (1+\mu) & 0 & 0 \\ & \underline{0} & & 0 & (1+\mu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & (1+\mu) \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \hline \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2} = \frac{(1+\mu)}{E} \tau_{ij} \rightarrow \gamma_{ij} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{ij}$$

$1/G$

$$\boxed{\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}}$$