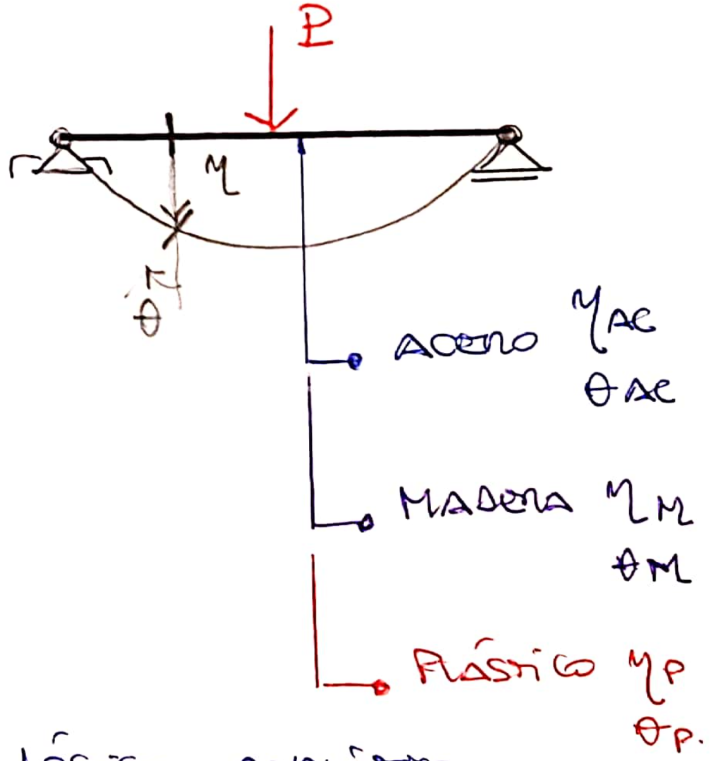
RELACIONES ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES:

ET ⇄ ED



MAGNITUDES ESTÁTICAS

MAGNITUDES CINEMÁTICAS

- EL CAMINO DE ESTUDIO P/ ET Y ED → LÓGICO - ANALÍTICO - - DEDUCTIVO → ACÁ NO VA A SER APLICABLE

- EL CAMINO A SEGUIR P/ RTyD →
  - EXPERIMENTAL
  - LÓGICO
  - ANALÍTICO
  - DEDUCTIVO

$[TT] \rightarrow 3\times3 \rightarrow 6$ SIMÉTRICO.

$[TD] \rightarrow 3\times3 \rightarrow 6$ "

$$\boxed{\{\bar{\varepsilon}_d\} = [B]\,\{\bar{\sigma}\}}$$

$\{\bar{\varepsilon}_d\} \leftarrow [TD]$, 6×1

$[B] \leftarrow 6\times6$

$\{\bar{\sigma}\} \leftarrow [TT]$, 6×1

VAMOS A TRABAJAR

- MATERIAL → ISÓTROPO
  → HOMOGÉNEO
- PERÍODO → ELÁSTICO

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \hline \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}}_{6\times1} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{61} & \cdots & a_{66} \end{bmatrix}}_{6\times6} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \hline \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}}_{6\times1}$$

- DE LA REALIZACIÓN DE LOS ENSAYOS Y EXPERIMENTOS OBSERVAMOS:

I) → POR ESTAR DENTRO DEL PERIODO ELÁSTICO → SE CUMPLE "LEY DE BETTY" → LEY DE RECIPROCIDAD:

$\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$ → [B] → SIMÉTRICA.

II) → EXISTE INDEPENDENCIA. ENTRE:

$\underbrace{\varepsilon_{ii} \text{ y } \sigma_{ij}}_{\text{DISOCIADAS}}$ ← ↳ LAS DEFORM. ESPECÍFICAS LONGITUDINALES Y LAS TENSIONES 'σ'

$\underbrace{\varepsilon_{ij} \text{ y } \tau_{ii}}_{\text{DISOCIADAS.}}$ ← ↳ LAS DEFORM. ESPECÍFICAS TRANSV. Y LAS TENSIONES 'τ'.

- LA EXPRESIÓN MATEMÁTICA QUEDARÁ SIMPLIFICADA:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \hline \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \underline{0} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ \hline & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & \underline{0} & & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ & & & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \hline \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\varepsilon}_d\} = [B]\{\bar{\sigma}\}$$

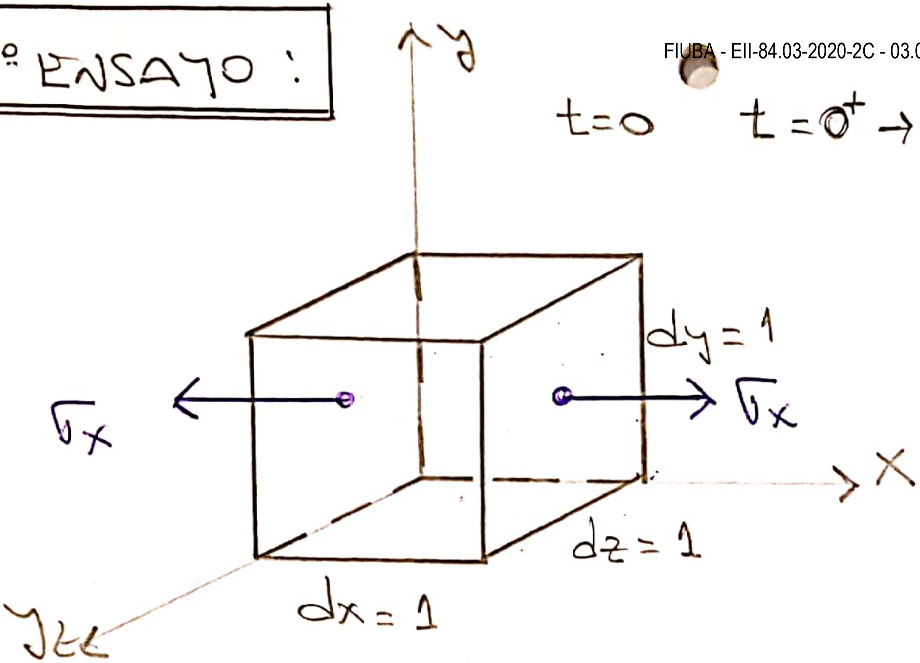
MATRICES CONSTITUTIVAS

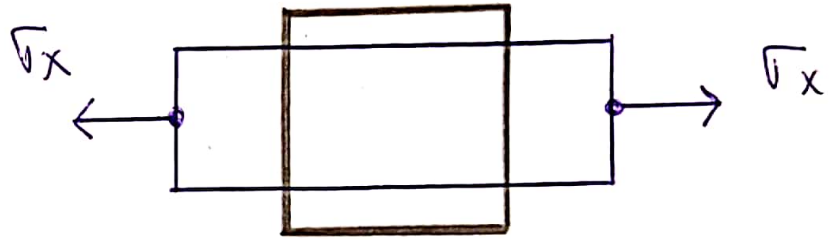
$$\{\bar{\sigma}\} = [E]\{\bar{\varepsilon}_d\}$$

$\rightarrow [B]$ y $[E] \rightarrow$ MATRICES DE ELASTICIDAD.

1º ENSAYO:

$t = 0 \qquad t = 0^+ \rightarrow$ APLICO FZAS





$$\varepsilon_{ii} = \frac{\Delta L_{ii}}{L_{0,i} = 1} \rightarrow \varepsilon_{ii} = \Delta L_{ii}$$

1º CASO: $\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\mu_{yx}\, \varepsilon_{xx} = -\mu_{yx} \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\mu_{zx} \cdot \varepsilon_{xx} = -\mu_{zx} \frac{\sigma_x}{E}$$

μ_{ij} — i: EFECTO, j: CAUSA

2º CASO: $\sigma_y \neq 0 \quad \sigma_x = \sigma_z = 0$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_{xx} = -\mu_{xy} \cdot \varepsilon_{yy} = -\mu_{xy} \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\mu_{zy} \cdot \varepsilon_{yy} = -\mu_{zy} \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

3º CASO: $\sigma_z \neq 0 \quad \sigma_x = \sigma_y = 0$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_{xx} = -\mu_{xz} \cdot \varepsilon_{zz} = -\mu_{xz} \cdot \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\mu_{yz} \cdot \varepsilon_{zz} = -\mu_{yz} \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\underbrace{\mu_{yx} = \mu_{xy} = \mu_{zx} = \mu_{xz} = \mu_{yz} = \mu_{zy}}_{\text{MATERIALES ISÓTROPOS}} = \mu$$ COEFICIENTE DE POISSON.

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}$$

$\varepsilon_{\perp}$: LA DEFORMACIÓN EN LA DIRECCIÓN $\perp$ A LA APLICACIÓN DE LA CARGA.

$\varepsilon_{\parallel}$: LA DEFORMACIÓN EN LA DIRECCIÓN DE APLICACIÓN DE LA CARGA.

μ: SE DEFINE (+).

QUÉ PASARÍA SI APLICAMOS $\sigma_x \neq 0$ $\sigma_y \neq 0$ $\sigma_z \neq 0$ EN FORMA SIMULTÁNEA.

→ APLICAMOS PSE POR LA RELACIÓN LINEAL ~~[illegible]~~ ENTRE LAS VARIABLES:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right].$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right].$$

LEY DE HOOKE GENERALIZADA

I) μ: ES UNA CARACTERÍSTICA O PROPIEDAD DEL MATERIAL.

II) EN ANISÓTROPOS Y ORTÓTROPOS → LOS μ_{ij} SON $\neq 0$.

$$\mu_{yx} = - \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} \qquad \mu_{zy} = - \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{yy}}.$$

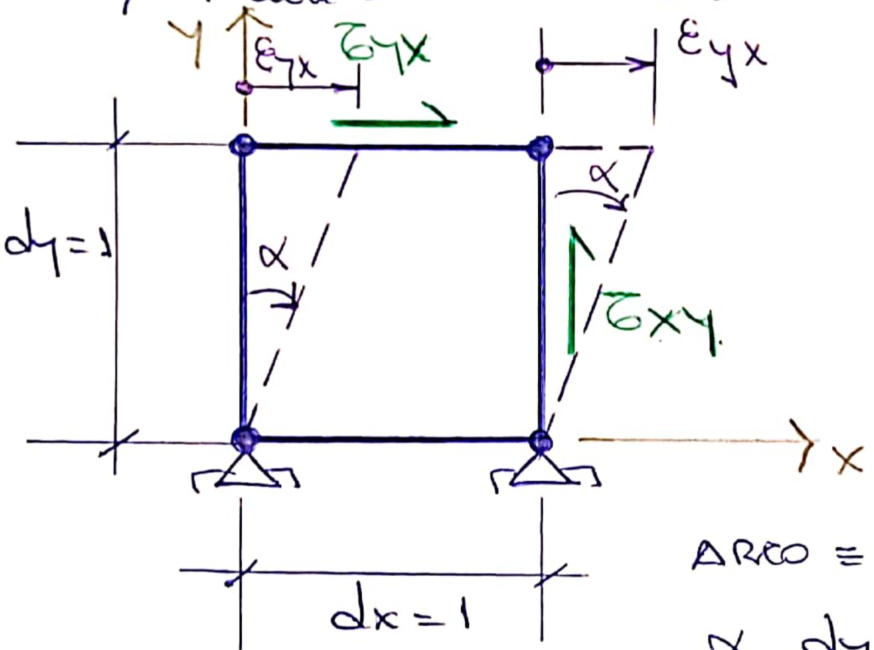
EFECTO

$$\mu_{ij} = - \frac{\varepsilon_{ii}}{\varepsilon_{jj}}$$

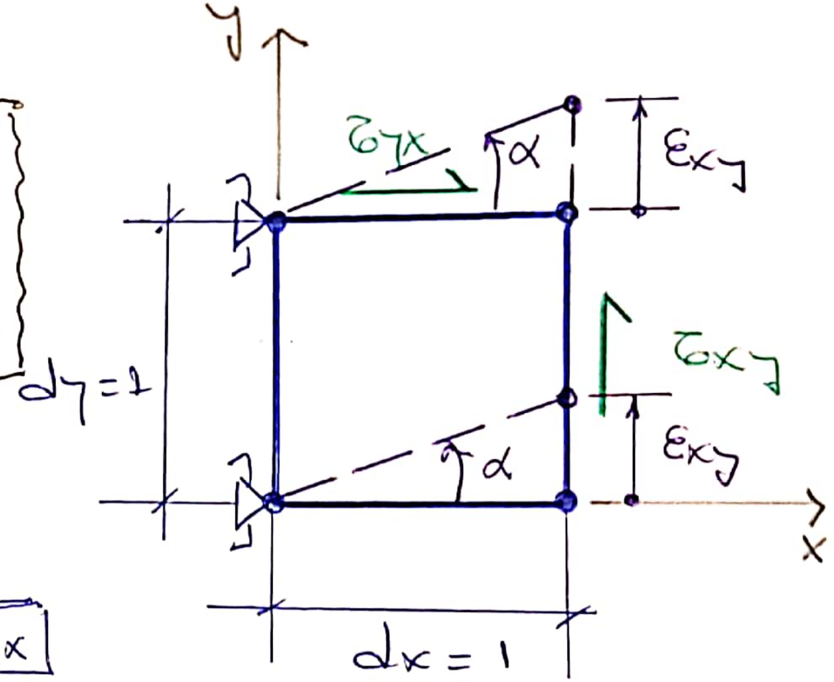
CAUSA.

2º ENSAYO:

↳ VINCULAR A LAS TENS. TANGENCIALES CON LAS DEFORM. ESPEC. TRANSVERSALES.



HIPÓTESIS DE PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS



ARCO ≡ CUERDA ≡ TANGENTE

$$\alpha \cdot \underbrace{dy}_{=1} = \varepsilon_{yx} \rightarrow \boxed{\alpha = \varepsilon_{yx}} \quad (1)$$

ARCO ≡ CUERDA ≡ TANGENTE

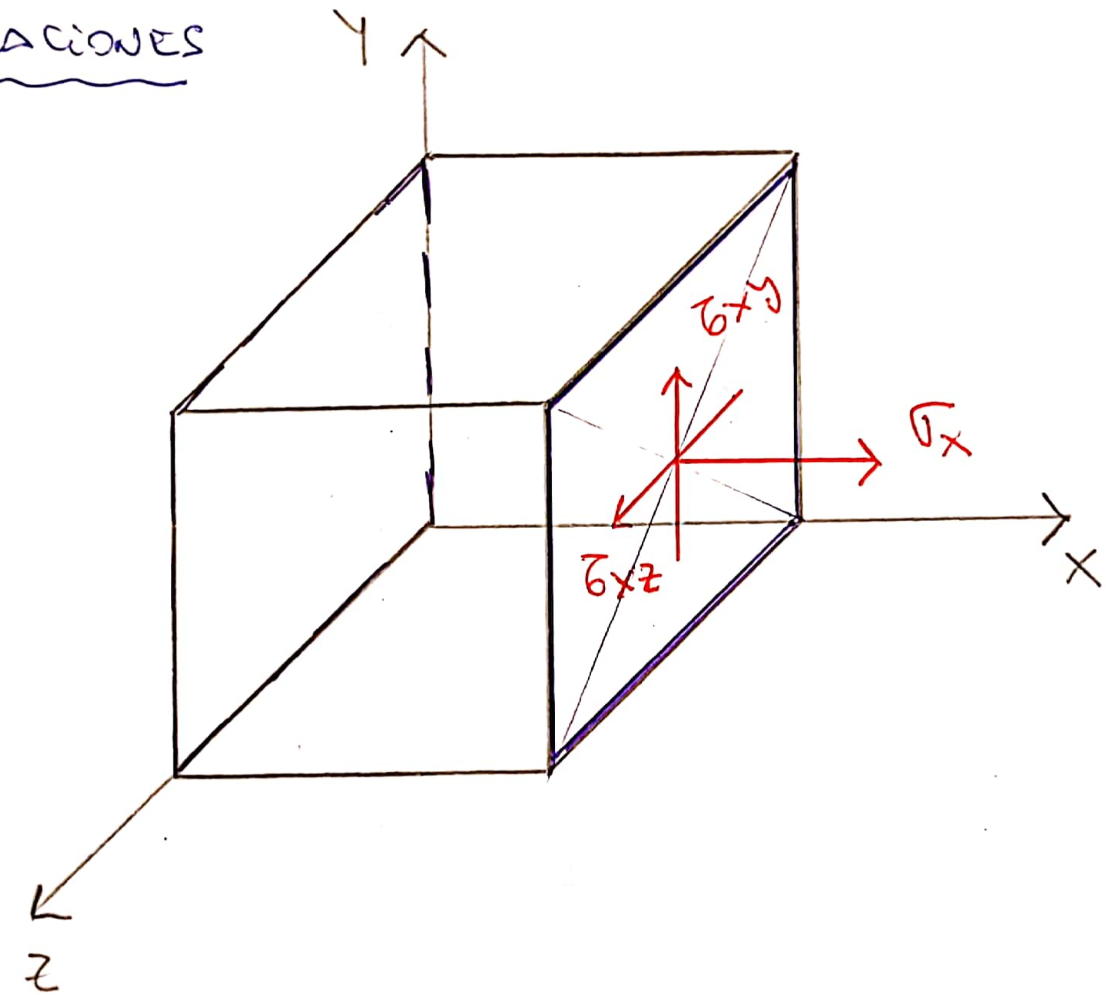
$$\alpha \cdot \underbrace{dx}_{=1} = \varepsilon_{xy} \rightarrow \boxed{\alpha = \varepsilon_{xy}} \quad (2)$$

$$\tau_{ij}$$

EL PLANO EN EL QUE ACTÚA

LA DIRECCIÓN DE LA TENSIÓN τ.

ACLARACIONES



$\sigma_{ij} \rightarrow i=j \rightarrow$ normal

$i \neq j \rightarrow$ tangencial

τ_{ij}

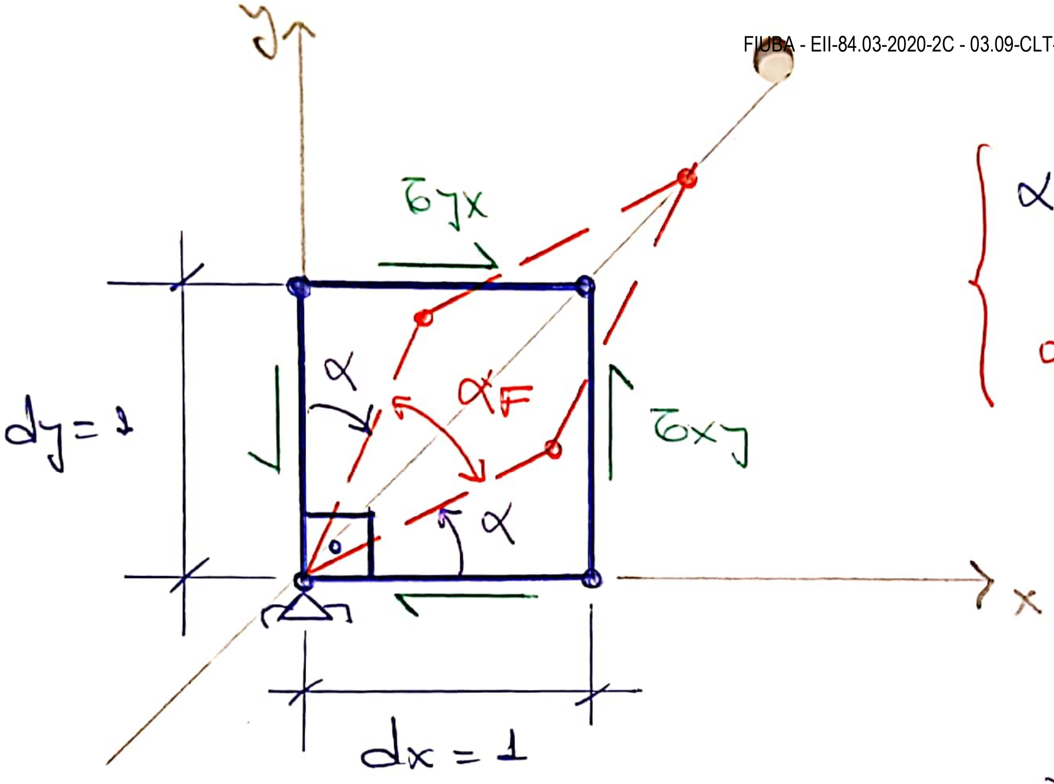
- DE 1 y 2.

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = \varepsilon_{yx} & (1). \\ \alpha = \varepsilon_{xy} & (2) \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}}$$

- SE HACE LO MISMO PARA LOS PLANOS 'XZ' e 'YZ'

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}.$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ORIGINAL,xy} = \alpha_{INICIAL,xy} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ. \\ \alpha_{F,xy} \end{array} \right.$$

$$\alpha_{INIC.} - \alpha_F = \frac{\pi}{2} - \alpha_F = \gamma_{xy}.$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \alpha = 2\alpha = 2\varepsilon_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \rightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\boxed{\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}} \longleftrightarrow \boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 2\varepsilon_{xy} \longleftrightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 2\varepsilon_{yz} \longleftrightarrow \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} = \frac{\gamma_{yz}}{2}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = 2\varepsilon_{zx} \longleftrightarrow \varepsilon_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G} = \frac{\gamma_{zx}}{2}.$$

LEY DE HOOKE GENERALIZADA:

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \hline \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/E & -\mu/E & -\mu/E & & & \\ -\mu/E & 1/E & -\mu/E & & \underline{0} & \\ -\mu/E & -\mu/E & 1/E & & & \\ \hline & & & 1/2G & 0 & 0 \\ & \underline{0} & & 0 & 1/2G & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1/2G \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \hline \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{array}\right\}$$

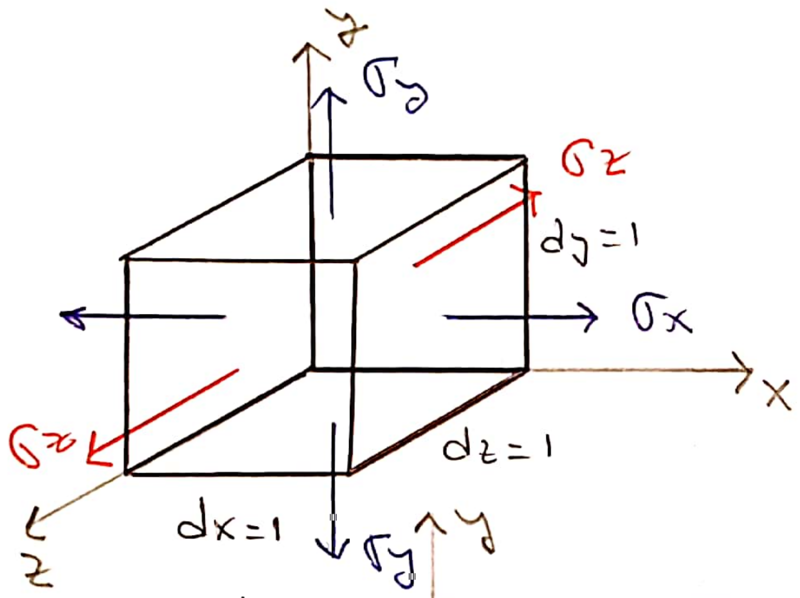
E : MÓDULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL

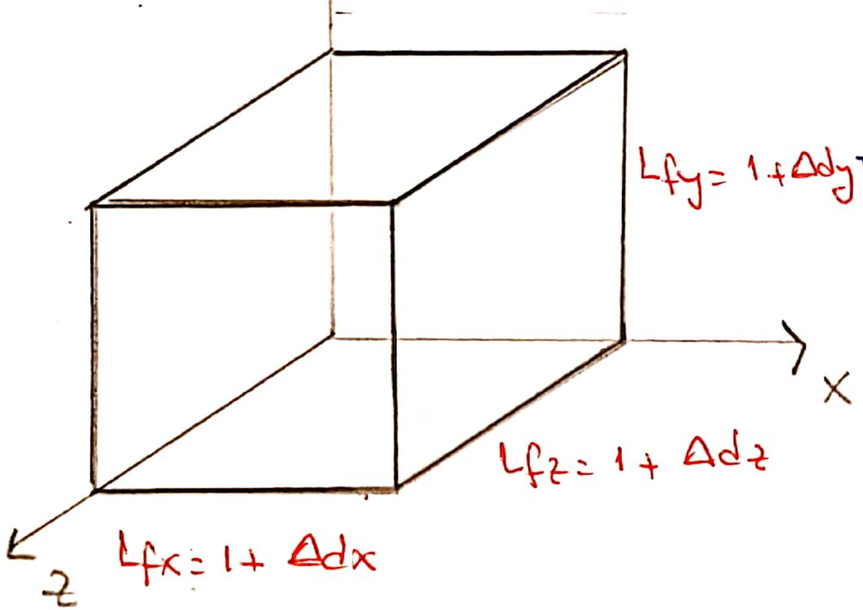
G : " " " TRANSVERSAL.

μ : COEF. DE POISSON

CONSTANTES ELÁSTICAS DEL MATERIAL.

VARIACIÓN ESPECÍFICA DE VOLUMEN:





$$Vo = dx\,dy\,dz = 1.1.1 = 1$$

$\boxed{x}$

$$Lf_x = Lox + \Delta dx = dx + \Delta dx = 1 + \Delta dx$$

$$\Delta Lx = Lfx - lox = Lfx - dx = 1 + \Delta dx - 1$$

$$\underline{\Delta Lx = \Delta dx}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta Lx}{Lox} = \frac{\Delta dx}{1} = \Delta dx$$

$$\underline{\varepsilon_{xx} = \Delta dx}$$

$\boxed{y}$

$$\varepsilon_{yy} = \Delta dy$$

$\boxed{z}$

$$\varepsilon_{zz} = \Delta dz$$

$$V_f = L_{fx} \cdot L_{fy} \cdot L_{fz} = (1+\Delta dx)(1+\Delta dy)(1+\Delta dz) = (1+\varepsilon_{xx})(1+\varepsilon_{yy})(1+\varepsilon_{zz}) =$$

$$V_f = 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} + \cancel{\varepsilon_{xx}\cdot\varepsilon_{yy}} + \cancel{\varepsilon_{xx}\cdot\varepsilon_{zz}} + \cancel{\varepsilon_{yy}\cdot\varepsilon_{zz}} + \cancel{\varepsilon_{xx}\cdot\varepsilon_{yy}\cdot\varepsilon_{zz}}$$

- HIP. PEQ. DESPLAZ. + HIP. PEQ. DEFORMACIONES. → TÉRMINOS → INFINITÉSIMOS DE O.S.

$$\boxed{V_f = 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}$$

$$\Delta V = V_f - V_0 = 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} - 1 \rightarrow \Delta V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{1} \rightarrow \boxed{\varepsilon_V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}$$

TRAZA DEL [TD].

$$\varepsilon_V = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\varepsilon_V = \frac{1}{E}\left[(\sigma_x - 2\mu\sigma_x) + (\sigma_y - 2\mu\sigma_y) + (\sigma_z - 2\mu\sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_V = \frac{1}{E}\left[(1-2\mu)\sigma_x + (1-2\mu)\sigma_y + (1-2\mu)\sigma_z\right]$$

$$\varepsilon_V = \frac{(1-2\mu)}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right) = \frac{1-2\mu}{E}\cdot I_{1,[T T]}$$

$$\boxed{\varepsilon_V = I_{1,[TD]} = \frac{1-2\mu}{E}\, I_{1,[TT]}}$$

PARTICULARIDADES:

- SUPONDREMOS QUE $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=p>0$

(I)

$$\varepsilon_V = \frac{(1-2\mu)}{E}\cdot 3p > 0$$

$$1-2\mu > 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu < \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\mu < 0{,}5}$$

(II)

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}\cdot 3p.$$

$$\varepsilon_V = \frac{p}{\frac{E}{3(1-2\mu)}}\quad K$$

$$\varepsilon_V = \frac{p}{K} \rightarrow p = K\cdot\varepsilon_V$$

$$\boxed{K = \frac{E}{3(1-2\mu)}}$$

$\rightarrow$ SI $\mu \rightarrow 0{,}5 \rightarrow K \rightarrow \infty \rightarrow \boxed{\varepsilon_V \rightarrow 0}$

SI $\mu \rightarrow 0{,}5 \rightarrow$ EL MATERIAL ES CADA VEZ, MÁS RÍGIDO. EN EL LÍMITE CUANDO $\mu = 0{,}5 \rightarrow$ EL MATERIAL ES INFINITAMENTE RÍGIDO.

→ Si $\mu \to 0 \to K \to \frac{E}{3} \to$

$$\varepsilon_V = \frac{3p}{E}$$

→ Si $\mu \to -\infty \to K \to 0 \to$

→ $\boxed{\varepsilon_V \to \infty}$ → RIGIDEZ NULA.

$$\boxed{0 \leq \mu < 0{,}5}$$

AUMENTA LA RIGIDEZ →

← DISMINUYE LA RIGIDEZ.

→ Si $\mu > 0{,}5 \to K < 0 \to$ UN MATERIAL TRACCIONADO DISMINUIRÍA SU VOLUMEN.

RELACIÓN ENTRE E, G y μ:

MAT. ISÓTROPO → 3 CTES PROPIAS ELÁSTICAS

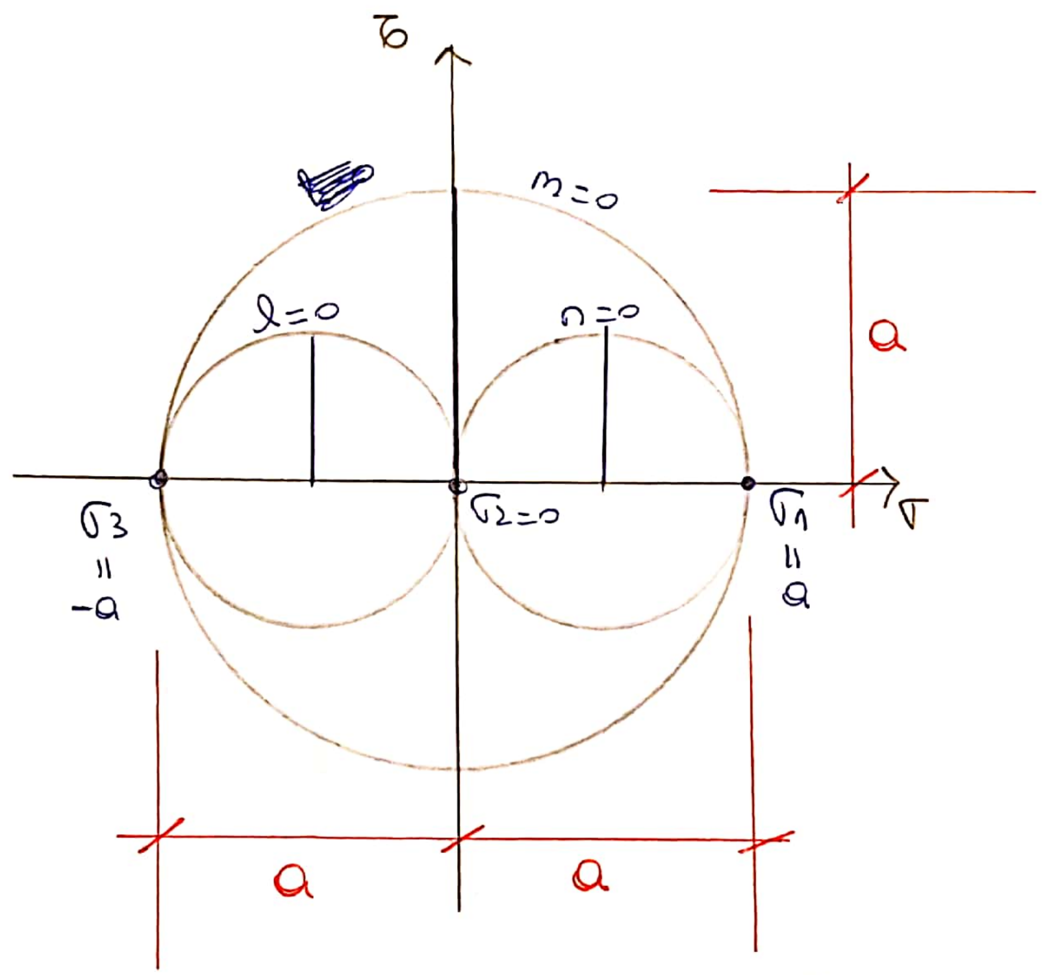
$$\left\{\begin{matrix} E \\ G \\ \mu \end{matrix}\right\}$$

- VAMOS A REALIZAR EL SIGUIENTE ESTUDIO:

→ TERNA PPAL.

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -a \end{cases}$$

- MOSTRAMOS ESTA SITUACIÓN A TRAVÉS DE LAS CIRCUNF. MOHR.



$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1+\sigma_2)\right] = \frac{1}{E}\left[-a - \mu(a+0)\right]$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{(1+\mu)\,a}{E}.$$

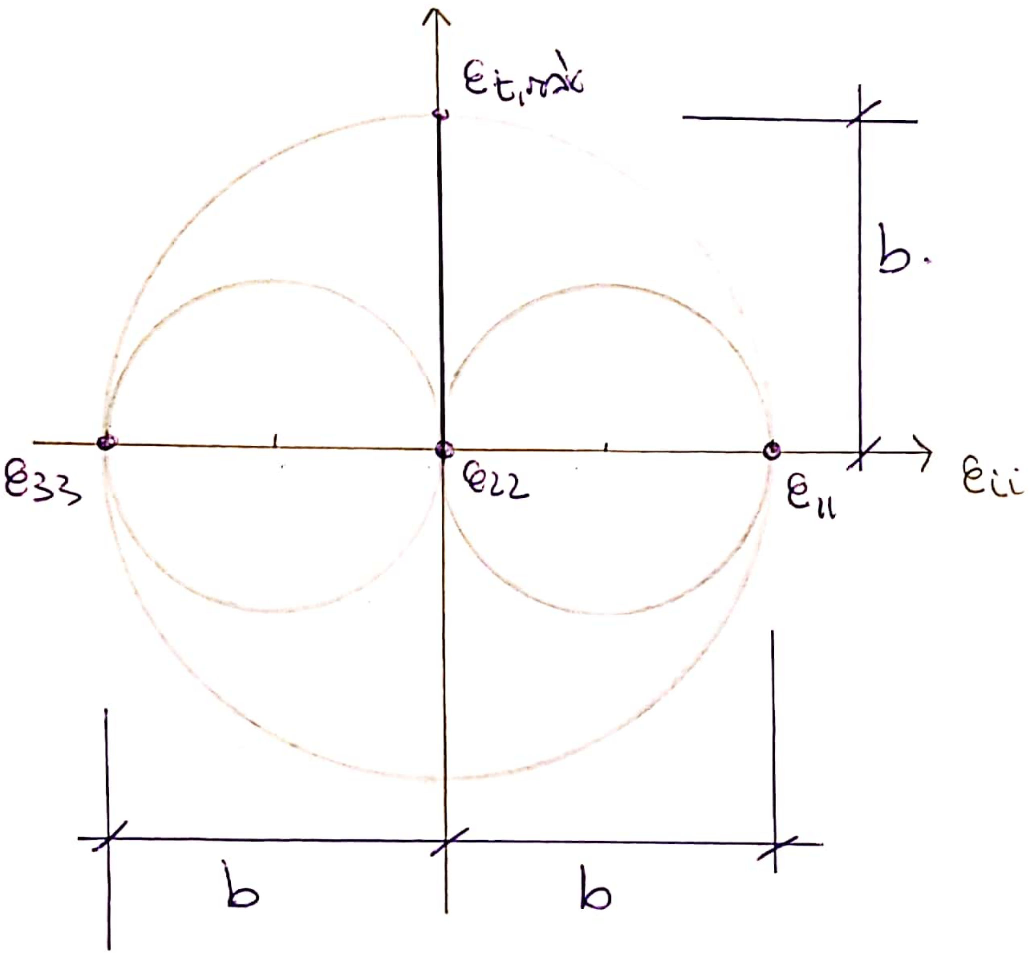
$$\tau_{máx} = a \rightarrow \varepsilon_{t,máx} = \frac{\tau_{máx}}{2G}$$

$$\boxed{\varepsilon_{t,máx} = \frac{a}{2G} = b}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2+\sigma_3)\right] = \frac{1}{E}\left[a - \mu(0-a)\right]$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\mu}{E}\,a$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1+\sigma_3)\right] = \frac{1}{E}\cdot\left[0 - \mu(a-a)\right] = 0$$



$$\frac{(1+\mu)\cancel{a}}{E} = \frac{\cancel{a}}{2G}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E &= 2.(1+\mu)G \\ G &= \frac{E}{2(1+\mu)}. \\ \mu &= \frac{E}{2G} - 1 \end{aligned}}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{2G} = \frac{\tau_{ij}}{\cancel{2}.\frac{E}{\cancel{2}(1+\mu)}} = \frac{1+\mu}{E}\tau_{ij}.$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{(1+\mu)a}{E} = b.$$

$$\varepsilon_{t,máx} = \frac{a}{2G} = b$$

LAS IGUALO.

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \hline \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\mu & -\mu & & & \\ -\mu & 1 & -\mu & & \underline{0} & \\ -\mu & -\mu & 1 & & & \\ \hline & & & (1+\mu) & 0 & 0 \\ & \underline{0} & & 0 & (1+\mu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & (1+\mu) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}
$$