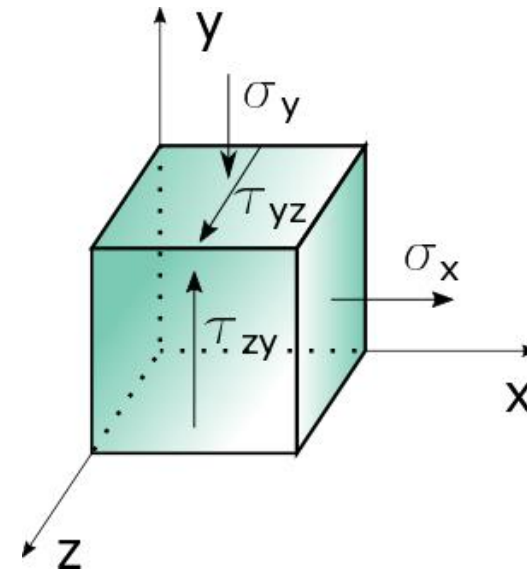
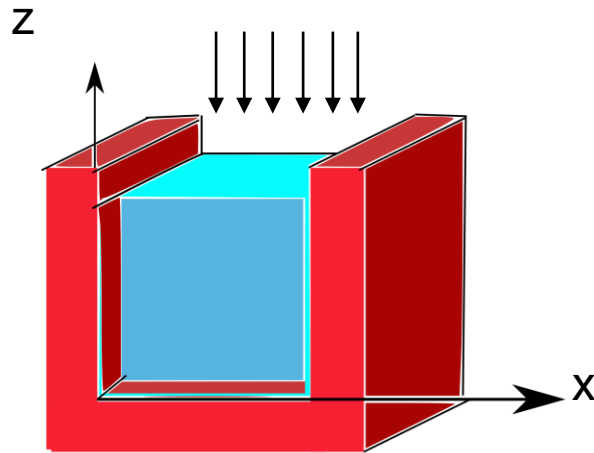




# Estado de Deformaciones y Relaciones Constitutivas

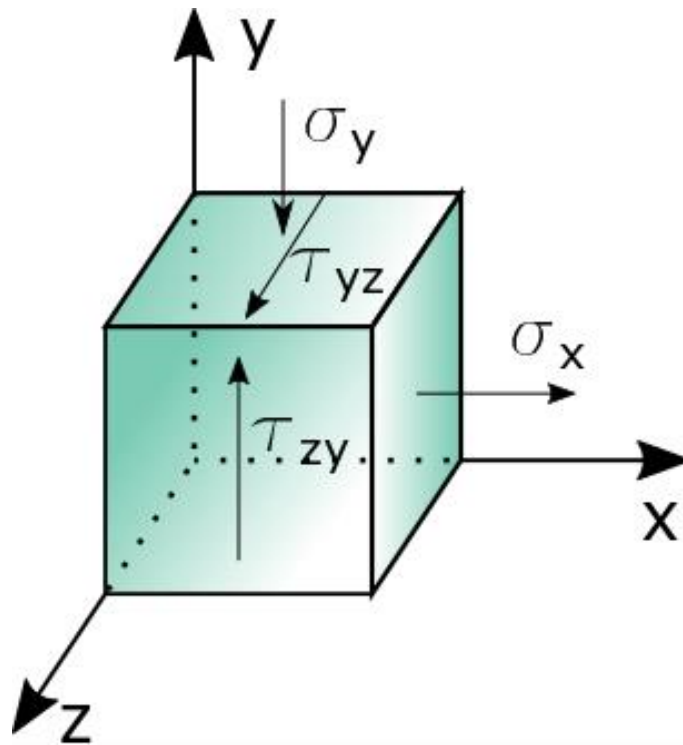


Tania Poletilo - Manuela Medina - Constanza Ruffinelli – Raúl Mendez



## Ejercicio 1: A partir del estado de tensión dado:

- Determinar el tensor de tensiones en terna principal. Clasificar
- Determinar el tensor de deformaciones en terna "xyz".
- Determinar el tensor de deformaciones en terna principal. Clasificar
- Calcular para el plano  $\pi$  el vector tensor y el vector deformación.



### Datos

$$\hat{n}_\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = 210000 \text{ MPa} \quad \mu = 0.3$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = 80769,23 \text{ MPa}$$

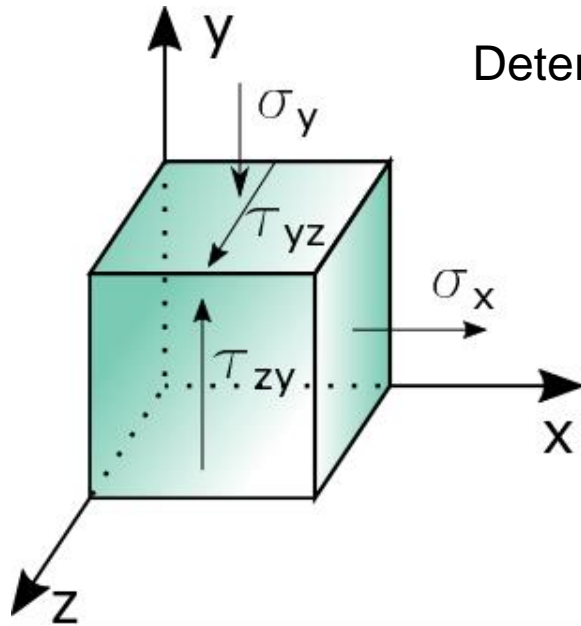
Normal al plano  $\pi$  respecto a la terna "xyz"

**Importante** ←

El vector normal " $\hat{n}_\pi$ " puede estar referido a cualquier terna.

El problema debe aclarar a cuál corresponde.

$$\|\sigma_x\| = \|\sigma_y\| = \|\tau_{zy}\| = 50 \text{ MPa}$$



Determino tensor de tensiones a partir de los datos:

Sabiendo que:

$$\|\sigma_x\| = \|\sigma_y\| = \|\tau_{zy}\| = 50MPa$$

Por teorema de Cauchy:

$$\|\tau_{yz}\| = \|\tau_{zy}\| = 50 MPa$$

Además a partir del cubo elemental dado se sabe que:

$$\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$$

Entonces el tensor de tensiones queda:

$$[T_t]_{xyz} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

**Importante:** Siempre que escribimos un tensor debemos indicar en que terna estamos trabajando

Como en el plano "x" no hay tensiones tangenciales podemos asegurar que la dirección x es una dirección principal, por lo tanto  $\sigma_x$  es una tensión principal.



## a) Tensor de tensiones principales

$$[T_t]_{xyz} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

Para calcular las tensiones principales tengo que resolver:

$$\det([M]) = \sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 + I_2 \sigma_i - I_3 = 0$$

Invariantes:  $I_1 = tr(T_T)$        $I_2 = 1/2 (I_1^2 - tr([T_T] \cdot [T_T]))$        $I_3 = \det(T_T)$

$$I_1 = 0 MPa$$

$$I_2 = -5000 MPa^2$$

$$I_3 = 125000 MPa^3$$

Estado de tensión  $\rightarrow$   $I_3 \neq 0$   $\Rightarrow$  Estado triple de tensión

$$\sigma_i^3 + (-5000 MPa^2) \cdot \sigma_i - 125000 MPa^3 = 0$$

$$\sigma_a = -80,9 MPa$$

$$\sigma_b = 30,9 MPa$$

$$\sigma_c = 50,0 MPa$$

Las tensiones debo ordenarlas en el tensor tal que:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$



$$[T_t]_{123} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 30,9 & 0 \\ 0 & 0 & -80,9 \end{bmatrix} MPa$$

Calculo las direcciones principales para definir la terna "123"



Como se que "x" es una dirección principal  $\Rightarrow \hat{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculo el vector asociado a  $\sigma_2 = 30,9$  MPa

$$\begin{bmatrix} 50 - 30,9 & 0 & 0 \\ 0 & -50 - 30,9 & 50 \\ 0 & 50 & 0 - 30,9 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$-80,9 \cdot b_2 + 50 \cdot c_2 = 0$$

$$c_2 = \frac{80,9}{50} \cdot b_2 = 1,618 \cdot b_2 \Rightarrow \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1,618 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Normalizo}} \hat{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,526 \\ 0,851 \end{pmatrix}$$

Calculo el vector asociado a  $\sigma_3 = 80,9$  MPa

Tengo dos opciones:

- Realizo el mismo procedimiento que para calcular  $\hat{\eta}_2$
- Sabiendo que  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  se que las direcciones principales asociadas a los mismos son perpendiculares entre sí

$$\hat{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,526 \\ 0,851 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,851 \\ 0,526 \end{pmatrix}$$



b) Calculo el tensor de deformaciones en terna "xyz"

$$[T_t]_{xyz} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix} MPa \quad \begin{array}{c} \text{Ecuaciones constitutivas} \\ \longleftrightarrow \end{array} \quad [T_d]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Ecuaciones constitutivas

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_y + \sigma_z) = \frac{50 MPa}{210000 MPa} - \frac{0,3}{210000 MPa} \cdot (-50 MPa + 0) = 3,095 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{-50 MPa}{210000 MPa} - \frac{0,3}{210000 MPa} \cdot (50 MPa + 0) = -3,095 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{0 MPa}{210000 MPa} - \frac{0,3}{210000 MPa} \cdot (50 MPa - 50 MPa) = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}}{2 \cdot G} = \frac{0 MPa}{2 \cdot 80769,23 MPa} = 0$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{\tau_{xz}}{2 \cdot G} = \frac{0 MPa}{2 \cdot 80769,23 MPa} = 0$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{\tau_{yz}}{2 \cdot G} = \frac{50 MPa}{2 \cdot 80769,23 MPa} = 3,095 \cdot 10^{-4}$$

Entonces el tensor de deformaciones queda:

$$[T_d]_{xyz} = \begin{bmatrix} 3,095 & 0 & 0 \\ 0 & -3,095 & 3,095 \\ 0 & 3,095 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$



c) Tensor de deformaciones principales

$$[T_d]_{123} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} ([T_D] - \varepsilon_i [I]) \cdot \check{n}_i &= \underline{0} \\ \det([M]) &= \varepsilon_i^3 - I_1 \varepsilon_i^2 + I_2 \varepsilon_i - I_3 = 0 \end{aligned}$$

Realizo el mismo procedimiento que para el cálculo de tensiones y direcciones principales

**Pero ¿es la única forma?**

Hay una forma mucho más fácil y sobre todo más corta de calcular el tensor

Las ecuaciones constitutivas relacionan las tensiones con las deformaciones, no importan las ternas. Por lo tanto, teniendo el tensor de tensiones principales, puedo calcular directamente las deformaciones principales.



$$[T_t]_{123} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 30,9 & 0 \\ 0 & 0 & -80,9 \end{bmatrix} MPa$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{50 MPa}{210000 MPa} - \frac{0,3}{210000 MPa} \cdot (30,9 MPa - 80,9 MPa) = 3,095 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{30,9 MPa}{210000 MPa} - \frac{0,3}{210000 MPa} \cdot (50 MPa - 80,9 MPa) = 1,913 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{-80,9 MPa}{210000 MPa} - \frac{0,3}{210000 MPa} \cdot (50 MPa + 30,9 MPa) = -5,008 \cdot 10^{-4}$$

$$[T_d]_{123} = \begin{bmatrix} 3,095 & 0 & 0 \\ 0 & 1,913 & 0 \\ 0 & 0 & -5,008 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

**Estado triple de deformación**

Las direcciones principales son únicas, por lo tanto:

$$\hat{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,526 \\ 0,851 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,851 \\ 0,526 \end{pmatrix}$$





#### d) Vector tensión y vector deformación para el plano $\pi$

$$\hat{\eta}_\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normal al plano  $\pi$  respecto a la terna "xyz"

Utilizo  $[T_t]_{xyz}$   
y  $[T_d]_{xyz}$

$$\bar{\rho}_\pi = [T_t]_{xyz} \cdot \hat{\eta}_\pi = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -50 & 50 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T MPa$$

$$\sigma_\pi = \bar{\rho}_\pi \cdot \hat{\eta}_\pi = \begin{pmatrix} 50 & -50 & 50 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} MPa \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 MPa \qquad \bar{\sigma}_\pi = \sigma_\pi \cdot \hat{\eta}_\pi = (0 \quad 0 \quad 0) MPa$$

$$\bar{\tau}_\pi = \bar{\rho}_\pi - \bar{\sigma}_\pi = \begin{pmatrix} 50 & -50 & 50 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T MPa$$



- Vector de deformación

$$\overline{\varepsilon}_{\pi} = [T_d]_{xyz} \cdot \hat{\eta}_{\pi} = \begin{bmatrix} 3,095 & 0 & 0 \\ 0 & -3,095 & 3,095 \\ 0 & 3,095 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = (2,188 \quad -2,188 \quad 2,188)^T \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_l = \overline{\varepsilon}_{\pi} \cdot \hat{\eta}_{\pi} = (2,188 \quad -2,188 \quad 2,188)^T \cdot 10^{-4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

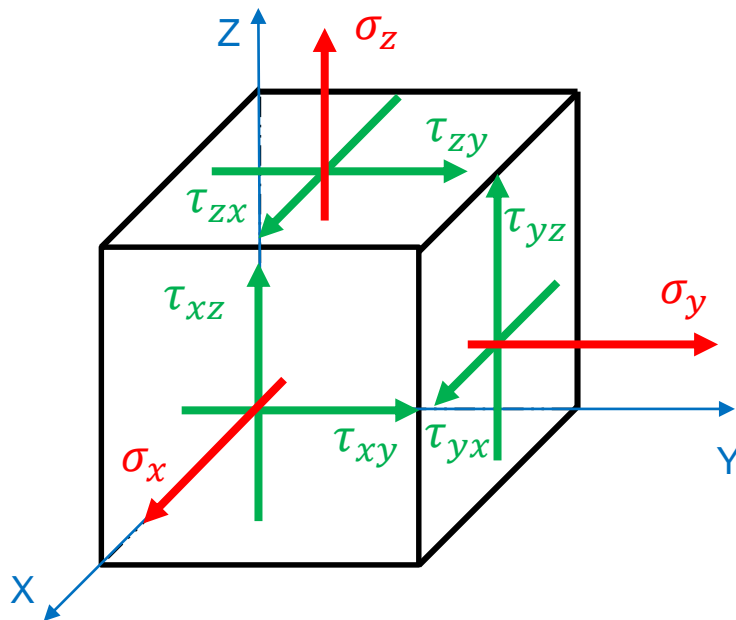
$$\overline{\varepsilon}_l = \varepsilon_l \cdot \hat{\eta}_{\pi} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\overline{\varepsilon}_t = \overline{\varepsilon}_{\pi} - \overline{\varepsilon}_l = (2,188 \quad -2,188 \quad 2,188)^T \cdot 10^{-4}$$



## Ejercicio 2: Para el punto "A" de un sólido

- 1) Determinar el Tensor de Tensiones en la terna (x, y, z)
- 2) Clasificar el estado tensional del punto "A"



$$[T_T]_{XYZ} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



# Datos

**Material:**  $E = 200.000 \text{ MPa}$   
 $\mu = 0,25$

Por la acción de fuerzas en equilibrio, se dan las siguientes cuestiones:

**A)** Solo un ángulo entre dos de las rectas inicialmente perpendiculares cambia su valor a  $\alpha_{ZX} = 89,8^\circ$ .

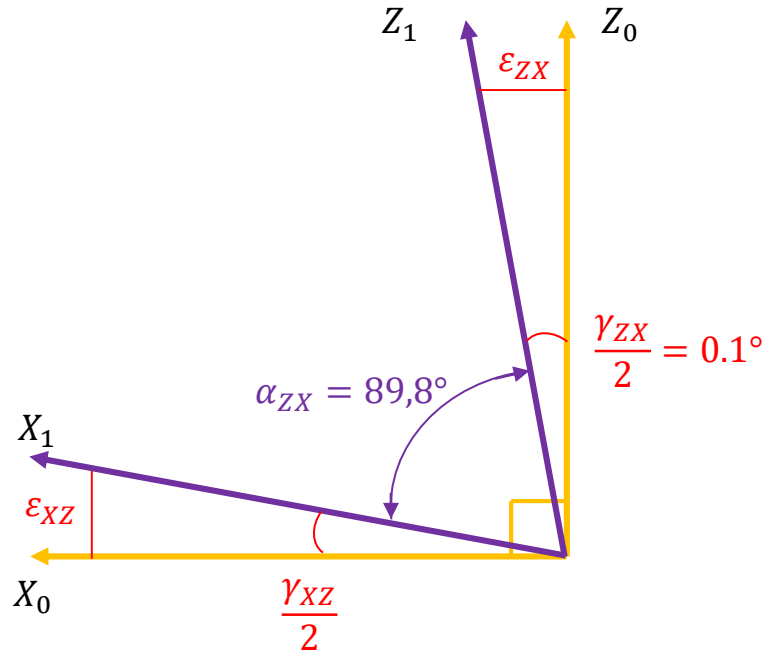
**B)** En dirección perpendicular a las dos anteriores (Y) el sólido tiene impedido deformarse axialmente.

**C)** Hay una variación de volumen del cubo elemental  $\varepsilon_V = -8 \cdot 10^{-4}$ .

**D)** Para un plano dado ( $\pi$ ) se conoce la tensión normal al mismo  $\sigma_\pi = -200 \text{ MPa}$ , y con ángulos a los ejes  $(X,Y,Z)=(30,90,60)^\circ$



A) Solo un ángulo entre dos de las rectas inicialmente perpendiculares cambia su valor a  $\alpha_{ZX} = 89,8^\circ$ .



Por Hip. de pequeñas deformaciones  
 $\text{sen}(\theta) \sim \text{tan}(\theta) \sim \theta$

$$\epsilon_{ZX} = \epsilon_{XZ} = \frac{\gamma_{ZX}}{2} = 1,75 \cdot 10^{-3} \quad \text{En radianes}$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G} \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = 80000 \text{ MPa}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = 279,25 \text{ MPa}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$$

$$[T_T]_{XYZ} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 279,25 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 279,25 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

“Las deformaciones longitudinales, dependen exclusivamente de las tensiones normales y son las responsables del cambio de volumen”



**B)** En dirección perpendicular a las dos anteriores (Y) el sólido tiene impedido deformarse axialmente.

$$\varepsilon_Y = 0$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E} (\sigma_Y - \mu \cdot \sigma_X - \mu \cdot \sigma_Z) = 0$$

$$\sigma_Y = \mu(\sigma_X + \sigma_Z) = 0,25 \cdot (\sigma_X + \sigma_Z) \quad \textcircled{1}$$

**C)** Hay una variación de volumen del cubo elemental  $\varepsilon_V = -8 \cdot 10^{-4}$ .

$$\varepsilon_V = \varepsilon_X + \cancel{\varepsilon_Y} + \varepsilon_Z = -8 \cdot 10^{-4}$$



$$\varepsilon_V = \frac{1}{E} (\sigma_X - \mu \cdot \sigma_Y - \mu \cdot \sigma_Z) + \frac{1}{E} (\sigma_Z - \mu \cdot \sigma_X - \mu \cdot \sigma_Y) = -8 \cdot 10^{-4}$$

$$(1 - \mu) \sigma_X - 2\mu \cdot \sigma_Y + (1 - \mu) \sigma_Z = -8 \cdot 10^{-4} \cdot E$$

$$0,75 \sigma_X - 0,5 \sigma_Y + 0,75 \sigma_Z = -160 \text{ MPa}$$

$$1,5 (\sigma_X + \sigma_Z) + 320 \text{ MPa} = \sigma_Y \quad \textcircled{2}$$

Uniendo  $\textcircled{1}$  con  $\textcircled{2}$  obtenemos  $\sigma_Z = -\sigma_x - 256 \text{ MPa} \quad \textcircled{3}$

**D)** Para un plano dado ( $\pi$ ) se conoce la tensión normal al mismo  $\sigma_\pi = -200 \text{ MPa}$ , y con ángulos a los ejes  $(X, Y, Z) = (30, 90, 60)^\circ$



$$\{n_\pi\} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

El vector tensión asociado al plano  $\pi$

$$\{\rho_\pi\} = [T_T]_{XYZ} \cdot \{n_\pi\}$$

$$\{\rho_\pi\} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 279,25 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 279,25 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \text{MPa} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma_x + 0,5 \cdot 279,25 \\ 0 \\ 0,5 \cdot \sigma_z + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 279,25 \end{pmatrix}$$





## Tensión normal asociada al plano $\pi$

$$|\{\sigma_\pi\}| = \{\rho_\pi\}^T \cdot \{n_\pi\}$$

$$|\{\sigma_\pi\}| = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma_x + 0,5 \cdot 279,25 \\ 0 \\ 0,5 \cdot \sigma_z + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 279,25 \end{pmatrix}^T \text{ MPa} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} = -200 \text{ MPa}$$

$$0,75 \cdot \sigma_x + 0,25 \cdot \sigma_z + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 279,25 \text{ MPa} = -200 \text{ MPa} \quad \textcircled{4}$$

Uniendo  $\textcircled{3}$  con  $\textcircled{4}$  obtenemos  $\sigma_x = -755,68 \text{ MPa}$

$$\sigma_z = 499,68 \text{ MPa}$$

De  $\textcircled{2}$  obtengo  $\sigma_y = -64 \text{ MPa}$



1) Determinar el Tensor de Tensiones en la terna (x, y, z)

$$[T_T]_{XYZ} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -755,68 & 0 & 279,25 \\ 0 & -64 & 0 \\ 279,25 & 0 & 499,68 \end{pmatrix} MPa$$

2) Clasificar el estado tensional del punto "A"

$$I_3 = \det([T_T]_{XYZ}) \neq 0$$

Estado triple (o espacial) de tensiones