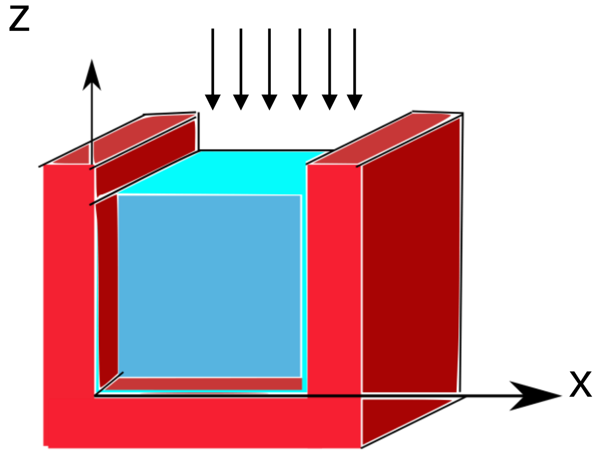
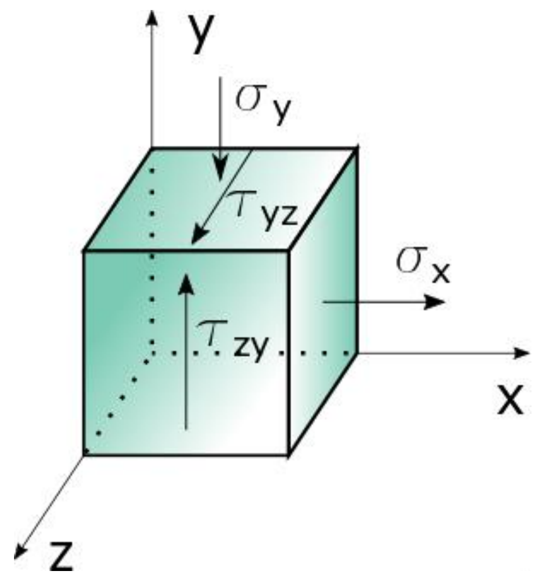
Estado de Deformaciones y Relaciones Constitutivas





Tania Poletilo - Manuela Medina - Constanza Ruffinelli

Universidad de Buenos Aires Estabilidad II flopez@fi.uba.ar / aterlisky@fi.uba.ar

Repaso teórico

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{n_x} \\ \varepsilon_{n_y} \\ \varepsilon_{n_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} \qquad \overline{\varepsilon_n} = [T_D] \cdot \check{n}$$

$$\overline{\varepsilon_n} = [T_D] \cdot \check{n} \qquad \varepsilon_l = \overline{\varepsilon_n} \cdot \check{n}$$

$$\overline{\varepsilon_l} = \varepsilon_l \ \check{n} \qquad \overline{\varepsilon_l} = \overline{\varepsilon_n} - \overline{\varepsilon_l}$$

Dirección principal es cuando $\overline{\varepsilon_n} = \overline{\varepsilon_l}$

$$[T_D] \cdot \check{n} = \varepsilon_l \ \check{n}$$

Tensiones y direcciones principales

$$[T_D] \cdot \breve{n}_i = \varepsilon_i \, \breve{n}_i \longrightarrow ([T_D] - \varepsilon_i \, [I]) \cdot \breve{n}_i = \underline{0} \longrightarrow det([M]) = 0$$

Las direcciones principales son los autovectores de $[T_D]$, y son las mismas que $[T_T]$

y $|\varepsilon_i|$ son las deformaciones principales, y son los autovalores de $[T_D]$

$$det([M]) = \varepsilon_i{}^3 - I_1 \, \varepsilon_i{}^2 + I_2 \, \varepsilon_i - I_3 = 0$$

Invariantes: $I_1 = tr(T_D)$ $\quad I_2 = {}^1\!/_2\left(I_1{}^2 - tr([T_D] \cdot [T_D])\right)$ $\quad I_3 = det(T_D)$

$\varepsilon_V = tr(T_D)$

Clasificación del estado de deformaciones:

$I_3 \neq 0$ $\longrightarrow$ Estado triple (Ninguna deformación principal es igual a cero)

$I_3 = 0$ y $I_2 \neq 0$ $\longrightarrow$ Estado doble (Una deformación principal es igual a cero)

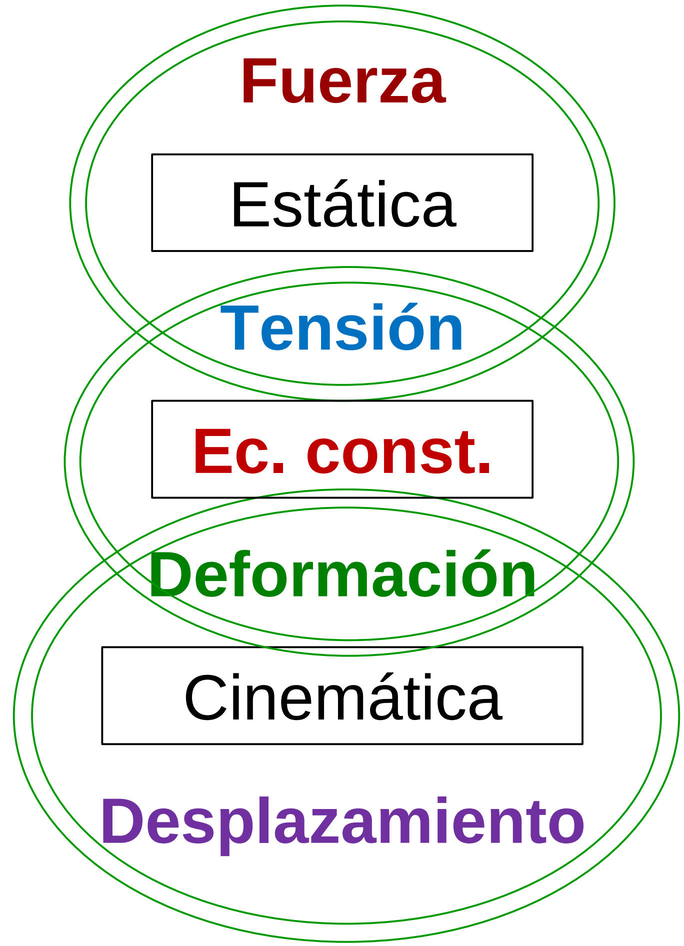
$I_3 = 0$ y $I_2 = 0$ y $I_1 \neq 0$ $\longrightarrow$ Estado simple (Dos deformaciones principales son iguales a cero)

Ecuaciones constitutivas

La estática relaciona fuerza con tensión
(cualquier material)

La cinemática relaciona desplazamiento
con deformación (cualquier material)

Las ecuaciones constitutivas relacionan
tensión con deformación
(dependen del material)
Las ecuaciones constitutivas cierran la
cadena de cálculo



Relaciones para materiales Isótropos

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\,\varepsilon_{xy} \\ 2\,\varepsilon_{xz} \\ 2\,\varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{(1-\mu)} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix}$$

Relaciones para materiales Isótropos

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\,\varepsilon_{xy} \\ 2\,\varepsilon_{xz} \\ 2\,\varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

Como normal y tangencial está desacoplado

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}$$

Si lo quieren escribir como sistema de ecuaciones:

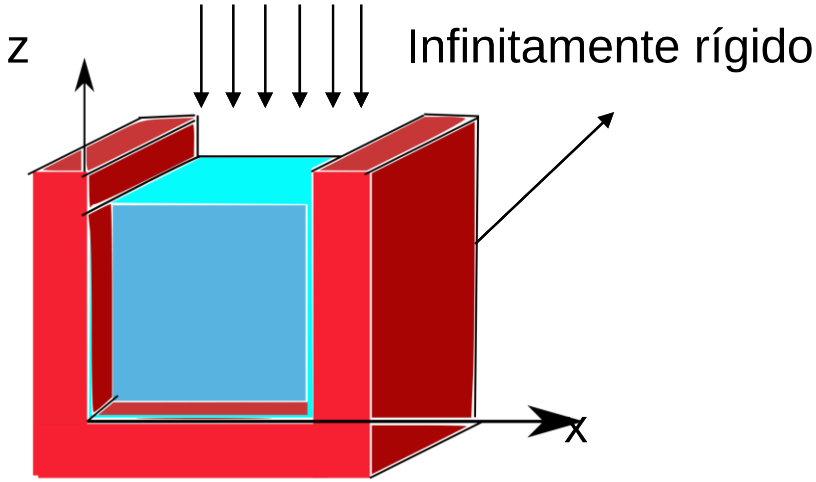
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_z$$

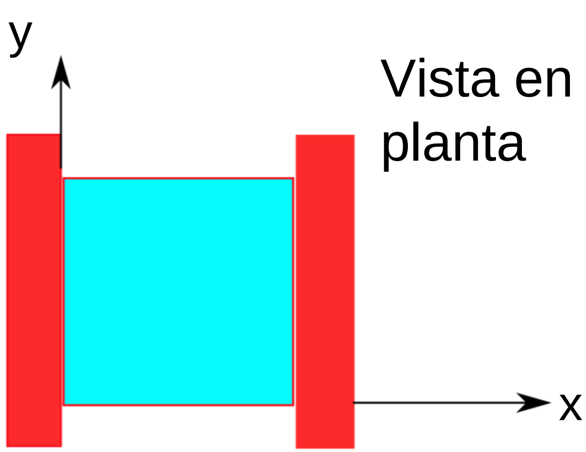
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\mu}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_x$$

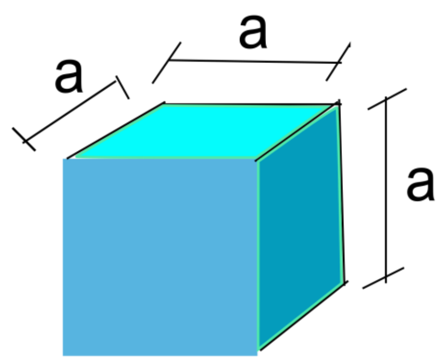
Estas relaciones son validas para cualquier sistema de coordenadas.
Por lo tanto en coordenadas principales es lo mismo

Ejercicio 1: Calcular tensiones, fuerzas, Lfinal, ΔL, Volumen y ΔVolumen





Datos:



$$a = 8cm \quad \mu = 0{,}3$$

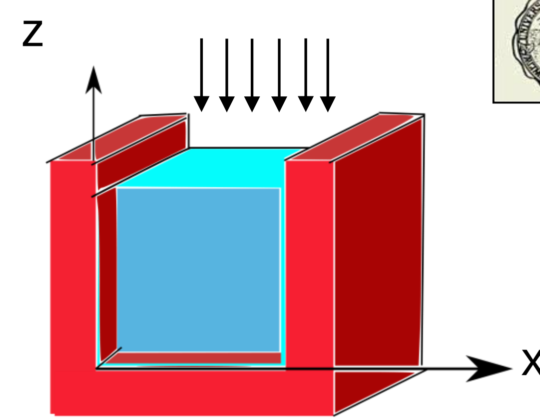
$$Pz = 0{,}4\ kN/cm^2$$

$$E = 21000\ kN/cm^2$$

Hipótesis:

- “canaleta roja” es infinitamente rígida
- Rozamiento nulo
- Peso del cubo despreciable

¿Qué cosas conocemos?



$\sigma_x = \;?-$

$\sigma_y = \;0$

$\sigma_z = \;-Pz$

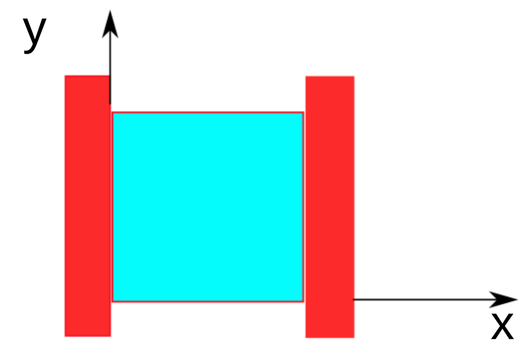
$\tau_{ij} = \;0$

$\varepsilon_{xx} = \;0$

$\varepsilon_{yy} = \;?+$

$\varepsilon_{zz} = \;?-$

$\gamma_{ij} = \;0$



Tenemos por lo tanto 3 incógnitas

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\cancel{\frac{\sigma_y}{E}} - \mu\frac{\sigma_z}{E} = 0 \Longrightarrow \sigma_x = -\mu \cdot Pz = -0{,}12\,\frac{kN}{cm^2}$$

$$\varepsilon_y = -\mu\frac{\sigma_x}{E} + \cancel{\frac{\sigma_y}{E}} - \mu\frac{\sigma_z}{E} \Longrightarrow \varepsilon_y = +7{,}42 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\cancel{\frac{\sigma_y}{E}} + \frac{\sigma_z}{E} \Longrightarrow \varepsilon_z = -1{,}73 \cdot 10^{-5}$$

1. Tensiones y Fuerzas

$$\sigma_x = -0{,}12\,\frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma_y = 0\,\frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma_z = -Pz = -0{,}4\,\frac{kN}{cm^2}$$

$$F_x = -0{,}12\,\frac{kN}{cm^2}\cdot \mathrm{A}$$

$$F_y = 0\,\frac{kN}{cm^2}\cdot \mathrm{A} = 0\mathrm{kN}$$

$$F_z = -0{,}4\,\frac{kN}{cm^2}\cdot \mathrm{A}$$

¿Qué valor de área tomamos?

Suponiendo pequeños desplazamientos y deformaciones → Tomo el área inicial $A = a^2 = 64\ cm^2$

$$F_x = -7{,}68\ kN$$

$$F_y = 0\ kN$$

$$F_z = -25{,}6\ kN$$

2. L_{final} y ΔL

$$\varepsilon_x = \frac{Xf - Xi}{Xi} = \frac{\Delta X}{Xi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Xf = Xi = a = 8cm$$

$$Xf = 8\ cm$$

$$\varepsilon_y = \frac{Yf - Yi}{Yi} = \frac{\Delta Y}{Yi} = \frac{\Delta Y}{8cm} = 7{,}43 \cdot 10^{-6} \quad \Longrightarrow \quad Yf = 8cm + 7{,}43 \cdot 10^{-6} \cdot 8cm$$

$$Yf = 8{,}00006\ cm$$

$$\varepsilon_z = \frac{Zf - Zi}{Zi} = \frac{\Delta Z}{Zi} = \frac{\Delta Z}{8cm} = -1{,}73 \cdot 10^{-5} \quad \Longrightarrow \quad Zf = 8cm - 1{,}73 \cdot 10^{-5} \cdot 8cm$$

$$Zf = 7{,}99986\ cm$$

¡Muy pequeñas deformaciones!

3. Volumen final y ΔVol

$\text{Vol i} = 512\ cm^3$ $\text{Vol}\ f = Xf \cdot Yf \cdot Zf$

$$\text{Vol}\ f = Xi(1+\varepsilon_x) \cdot Yi \cdot \left(1+\varepsilon_y\right) \cdot Zi \cdot (1+\varepsilon_z) =$$

$$\text{Vol}\ f = Vol\ i \cdot (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \underbrace{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z}_{\text{despreciable}}) =$$

$$\varepsilon_{Vol} = \frac{Vol\ f - Vol\ i}{Vol\ i} = \frac{\Delta Vol}{Vol\ i} = \frac{\Delta Vol}{(512cm)^3} = Traza = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -9{,}87 \cdot 10^{-6}$$

$\longrightarrow$ Invariante I1

$$\text{Vol}\ f = Vol\ i + \Delta Vol = 512\text{cm}^3 + 512\text{cm}^3 \cdot \varepsilon_{Vol} = 512\text{cm}^3 \cdot (1 + (-9{,}87 \cdot 10^{-6}))$$

$\text{Vol}\ f = 511{,}995\ \text{cm}^3$ $\Delta Vol = -5{,}05344 \cdot 10^{-3} cm^3$