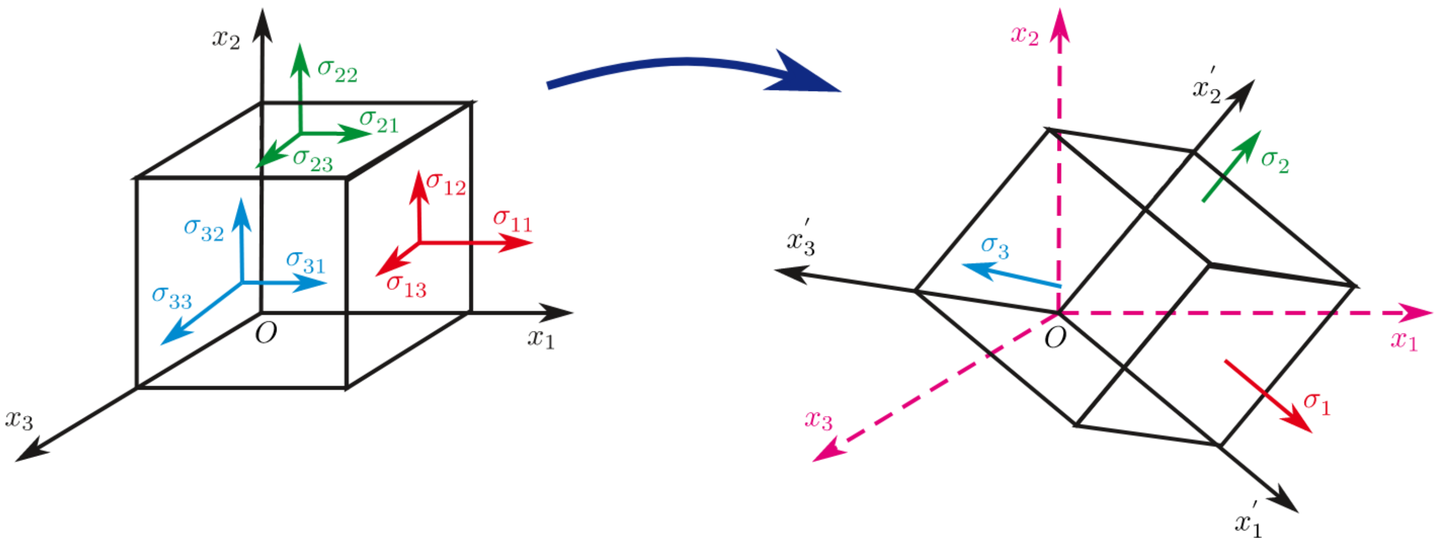
Estado de Tensión



Clara Zaccaria – Catalina Urteneche

Repaso teórico

Axil: $\sigma_x = \dfrac{N}{A}$

Flexión: $\sigma_x = \dfrac{M_{LN} \cdot v_{LN}}{J_{LN}}$

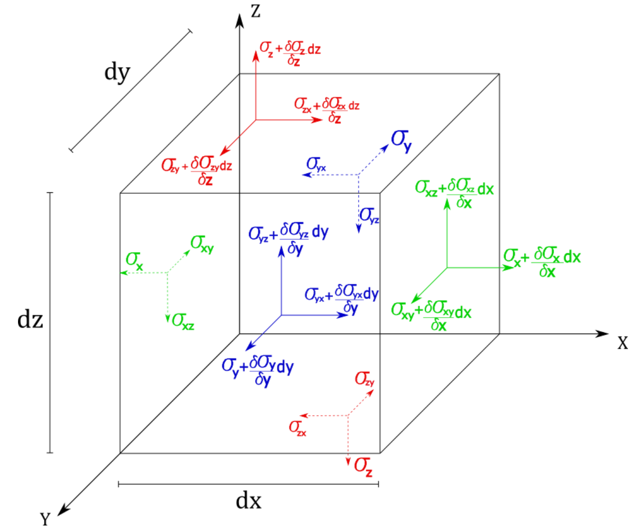
Torsión: $\tau = \dfrac{M_T \cdot dist}{J_{ToP}}$ τ_{xy} o τ_{xz}

Corte: $\tau = \dfrac{Q_{LFQ} \cdot S_{LNQ}}{J_{LNQ} \cdot b}$ τ_{xy} o τ_{xz}

$$T_T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \longrightarrow T_T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Repaso teórico

$$\begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix}$$



$$\bar{\rho} = [T_T] \cdot \check{n}$$

Por el teorema de Cauchy: $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ $\quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$ $\quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$

$$T_T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\bar{\rho} = [T_T] \cdot \check{n} \qquad |\sigma_n| = \bar{\rho} \cdot \check{n} \qquad \overline{\sigma_n} = |\sigma_n|\, \check{n} \qquad \overline{\tau_n} = \bar{\rho} - \overline{\sigma_n}$$

Dirección principal es cuando $\bar{\rho} = \overline{\sigma_n}$ $\qquad [T_T] \cdot \check{n} = |\sigma_n|\, \check{n}$

Tensiones y direcciones principales

$$[T_T] \cdot \breve{n}_i = \sigma_i \, \breve{n}_i \quad \longrightarrow \quad ([T_T] - \sigma_i \, [I]) \cdot \breve{n}_i = \underline{0} \quad \longrightarrow \quad det([M]) = 0$$

Las dirección $\breve{n}_i$ son las direcciones principales, y son los autovectores de $[T_T]$

$|\sigma_i|$ son las tensiones principales, y son los autovalores de $[T_T]$

$$det([M]) = {\sigma_i}^3 - I_1 \, {\sigma_i}^2 + I_2 \, \sigma_i - I_3 = 0$$

Invariantes: $I_1 = tr(T_T)$ $\quad I_2 = {}^1/_2 \left({I_1}^2 - tr([T_T] \cdot [T_T]) \right)$ $\quad I_3 = det(T_T)$

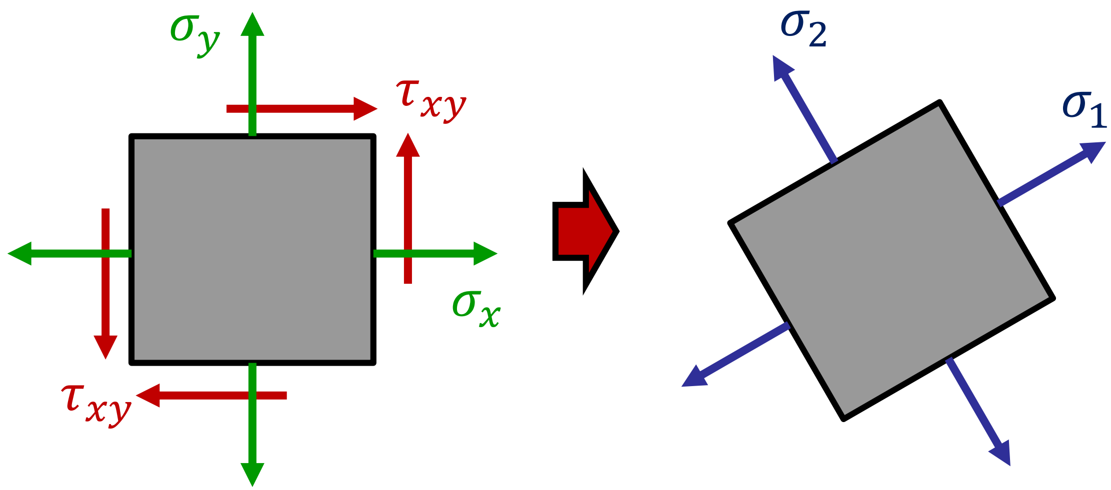
Clasificación del estado tensional:

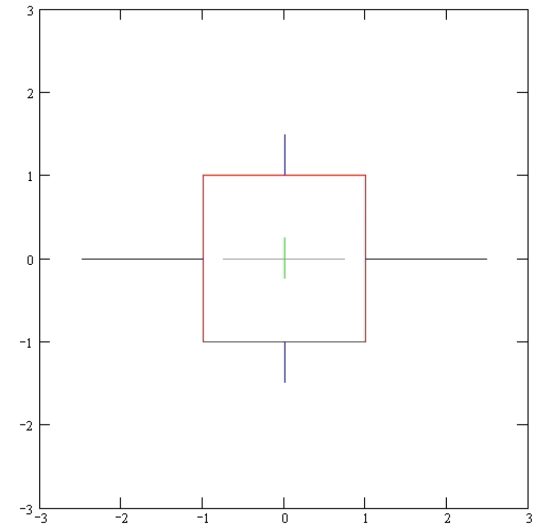
$I_3 \neq 0$ $\longrightarrow$ Estado triple (Ninguna tensión principal es igual a cero)

$I_3 = 0$ y $I_2 \neq 0$ $\longrightarrow$ Estado doble (Una tensión principal es igual a cero)

$I_3 = 0$ y $I_2 = 0$ y $I_1 \neq 0$ $\longrightarrow$ Estado simple (Dos tensiones principales son iguales a cero)

Ejes principales para estado plano

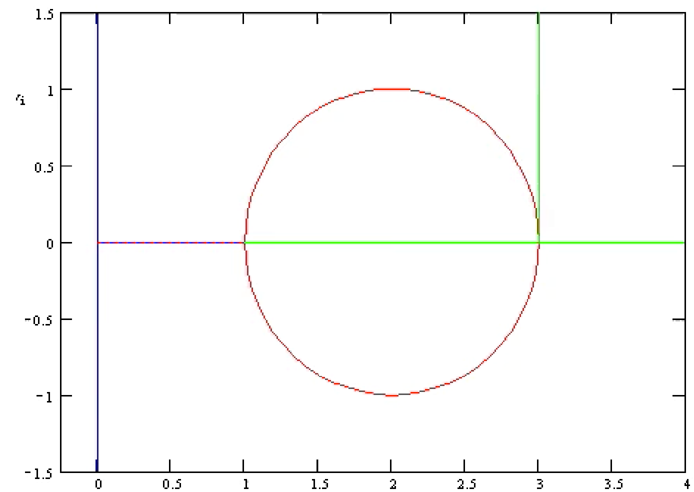




Estado de tensión

$$T_T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \qquad T_T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Las tensiones principales son
los valores máximos y mínimos
que tiene mi estado tensional



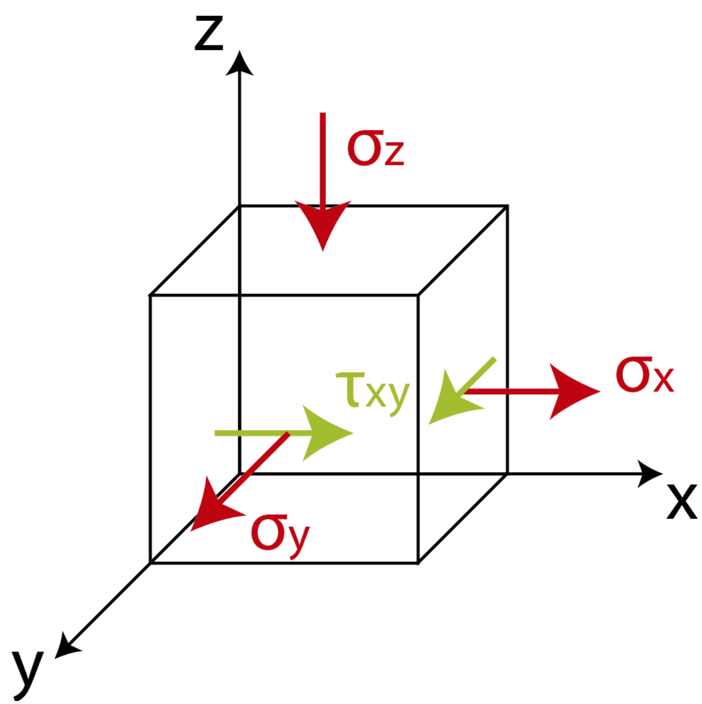
Circunferencia de Mohr

Ejercicio

1) Determinar las tensiones principales.

2) Determinar las direcciones principales 1, 2 y 3 calculando los cosenos directores.

3) Ídem gráficamente aplicando la construcción de Mohr.



Datos:

- $\sigma_x = 10\ MPa$
- $\sigma_y = 10\ MPa$
- $\sigma_z = 20\ MPa$
- $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 10\ MPa$

- $E = 200000\ MPa$
- $\mu = 0{,}25$
- $G = \frac{E}{2\cdot(1+\mu)} = 8 \cdot 10^4\ MPa$

1) Determinar las tensiones principales.

$$[T_T]_{XYZ} = \begin{pmatrix} \sigma_X & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{YX} & \sigma_Y & \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} & \tau_{ZY} & \sigma_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

Planteando la ecuación de Lagrange: $\sigma_I^3 - I_1 \cdot \sigma_i^2 + I_2 \cdot \sigma_i - I_3 = 0$

$$I_1 = \sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z$$

$$I_2 = \sigma_X \cdot \sigma_Y - \tau_{XY}^2 + \sigma_Y \cdot \sigma_Z - \tau_{YZ}^2 + \sigma_X \cdot \sigma_Z - \tau_{XZ}^2$$

$$I_3 = \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \sigma_Z + 2 \cdot \tau_{XY} \cdot \tau_{YZ} \cdot \tau_{XZ} - \sigma_X \cdot \tau_{YZ}^2 - \sigma_Y \cdot \tau_{XZ}^2 - \sigma_Z \cdot \tau_{XY}^2$$

¡Observación!

I_2 es la suma de los determinantes menores de $[T_T]$ y I_3 es el determinante de $[T_T]$

Autovalores de $[T_T]$

$$\sigma_1 = 20\ MPa$$
$$\sigma_2 = 0$$
$$\sigma_3 = -20\ MPa$$

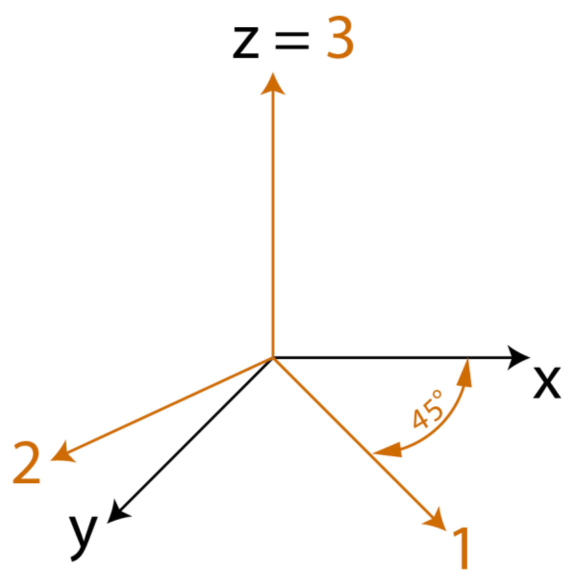
$$[T_T]_{123} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

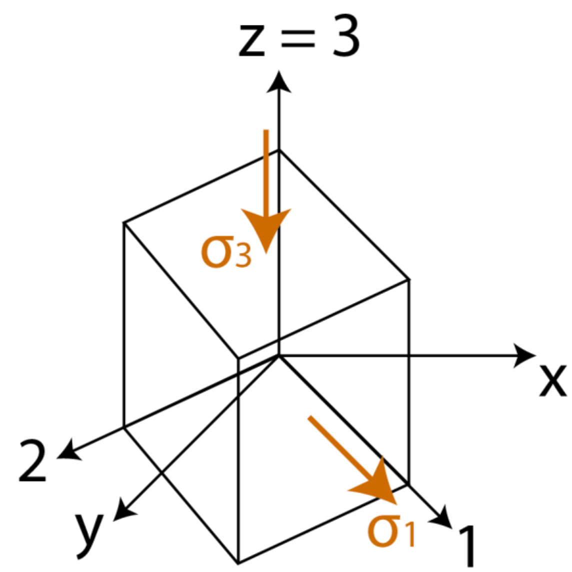
2) Determinar las direcciones principales 1, 2 y 3 calculando los cosenos directores.

$$\{[T]_T - \sigma_i \cdot [I]\} \cdot \hat{v_i} = 0 \qquad (\text{con } i = 1{,}2{,}3)$$

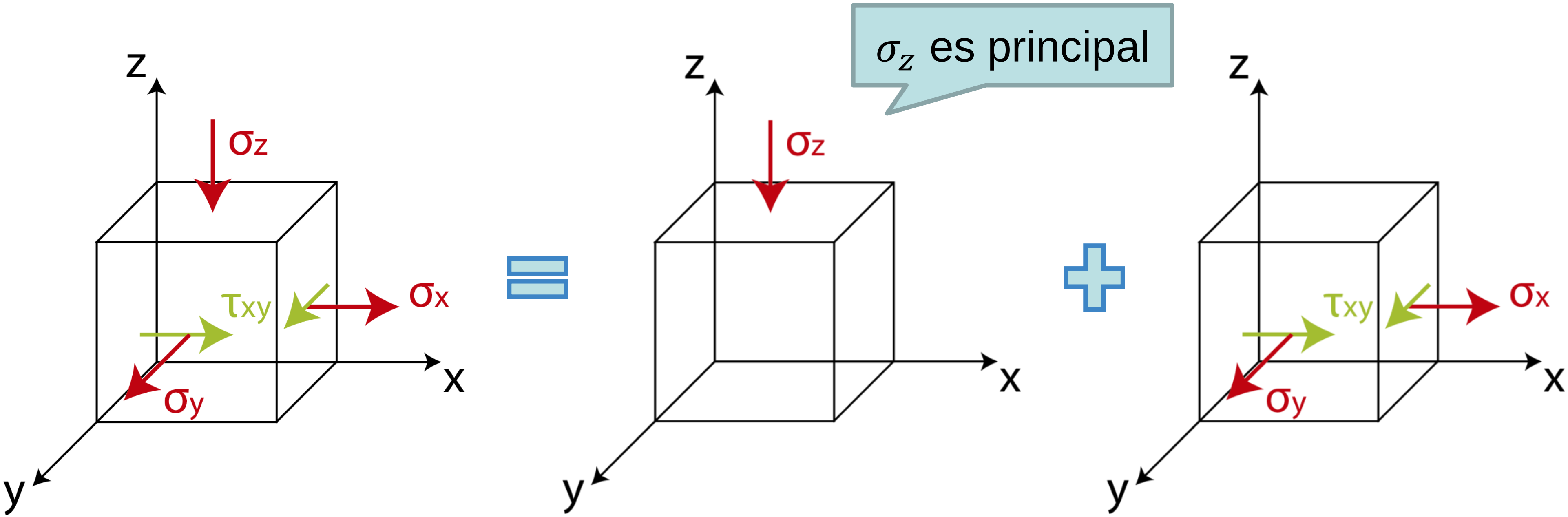
$$\widehat{v_1} = \begin{pmatrix} 0{,}707 \\ 0{,}707 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \widehat{v_2} = \begin{pmatrix} -0{,}707 \\ 0{,}707 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \widehat{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovectores de$[T_T]$

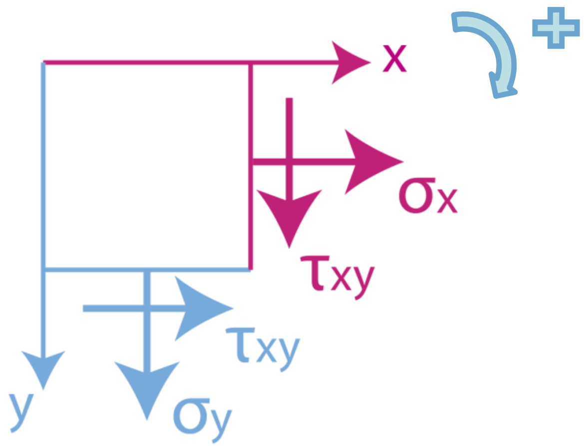




3) Ídem gráficamente aplicando la construcción de Mohr.

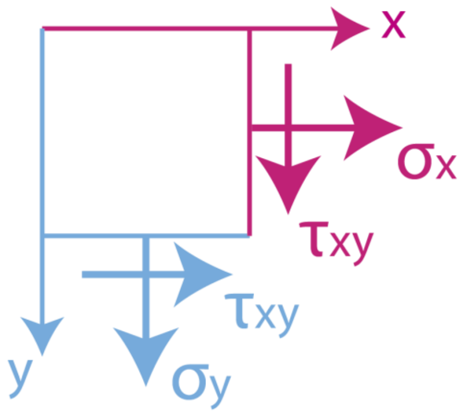


Construimos la circunferencia de Mohr del Estado Plano:

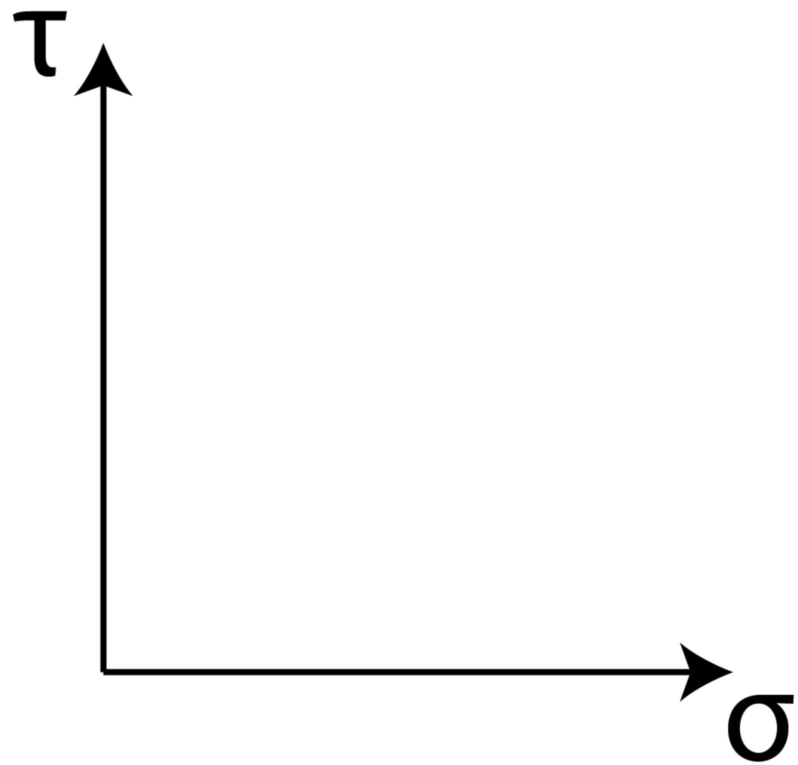


¡Observación!

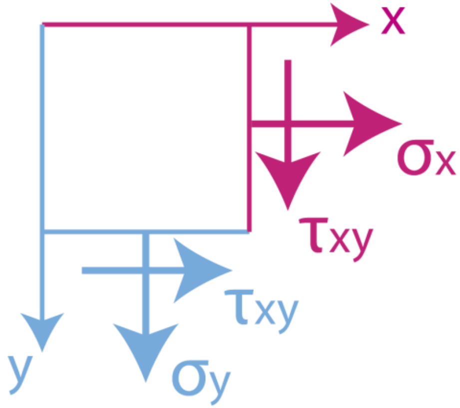
Para determinar el signo de τ nos fijamos qué giro le producen al cubo

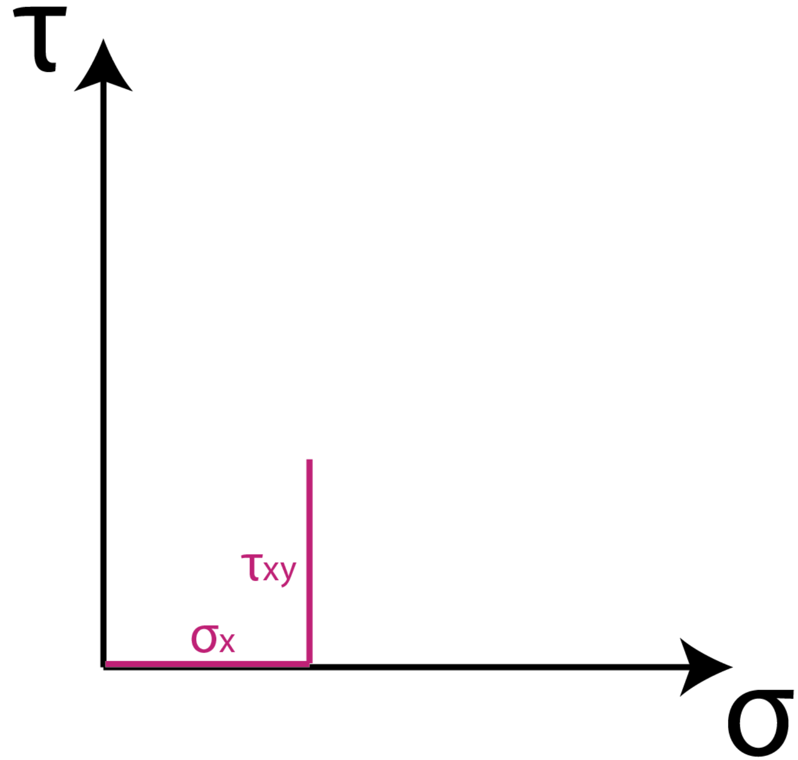


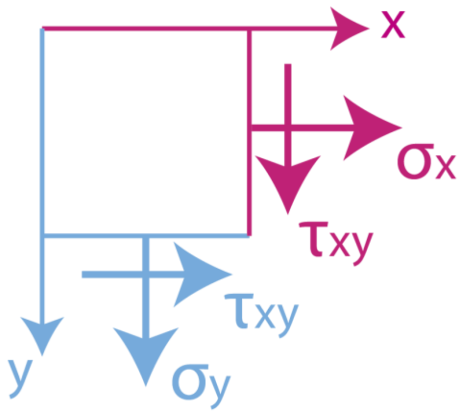
x
σx
τxy
τxy
y
σy

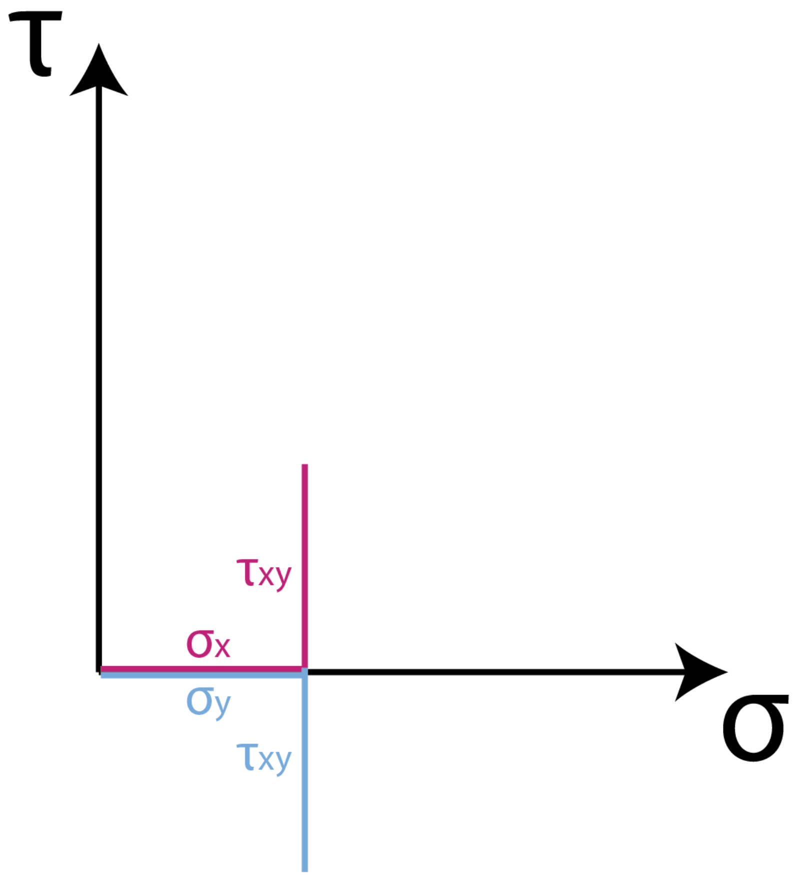


τ
σ

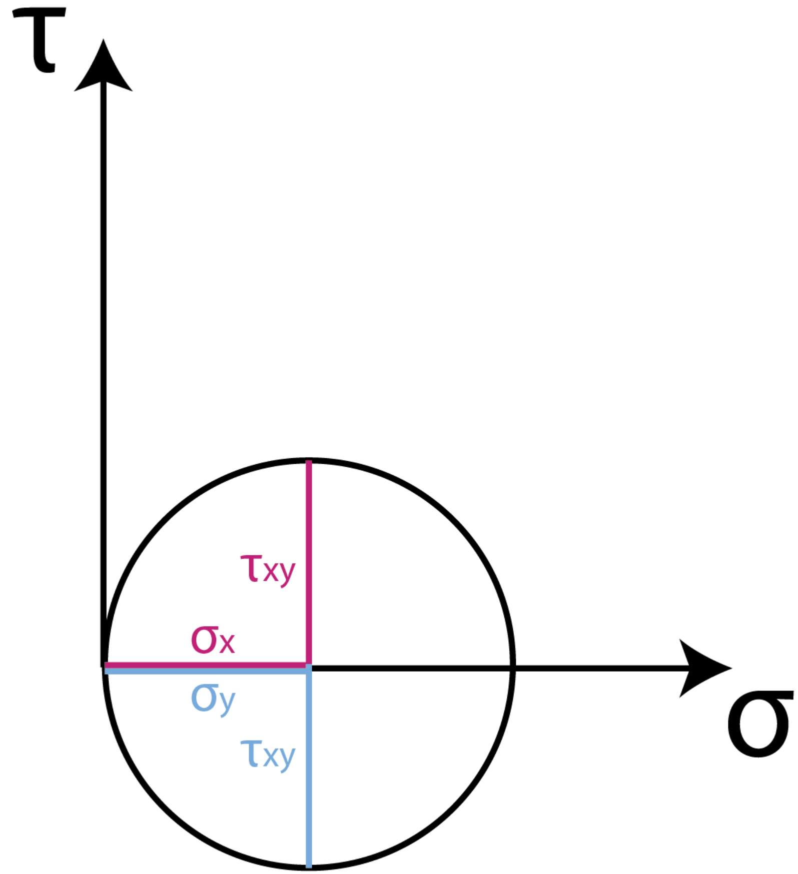

x
σx
τxy
τxy
y
σy

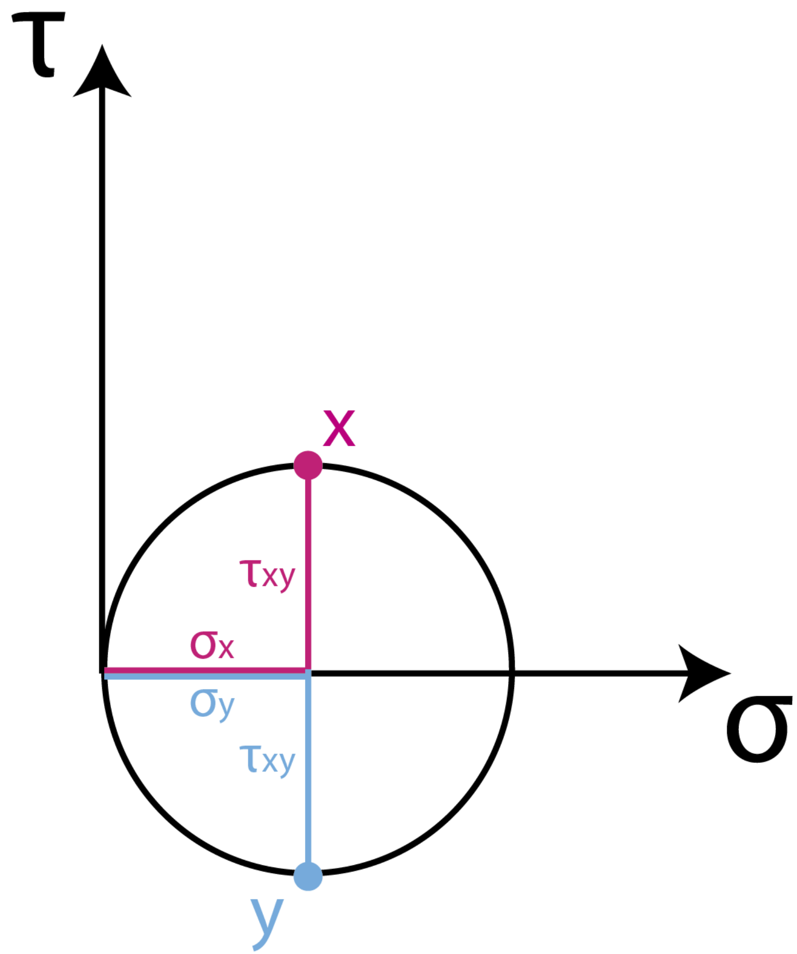

τ
τxy
σx
σ


x
σx
τxy
τxy
y
σy

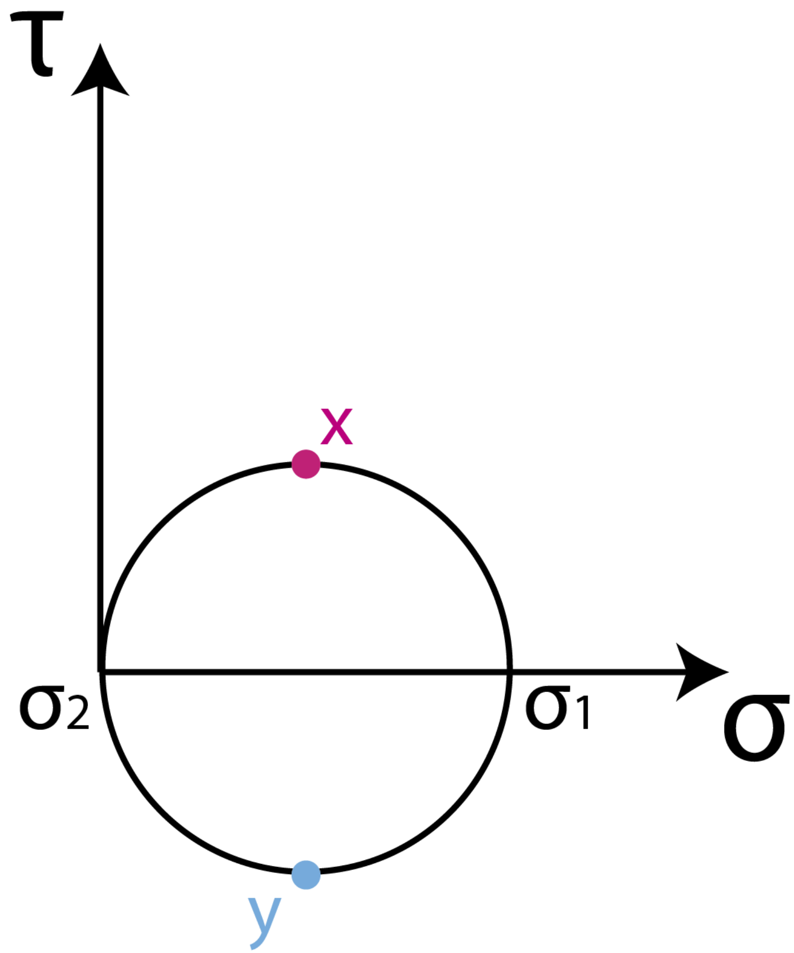

τ
τxy
σx
σy
τxy
σ

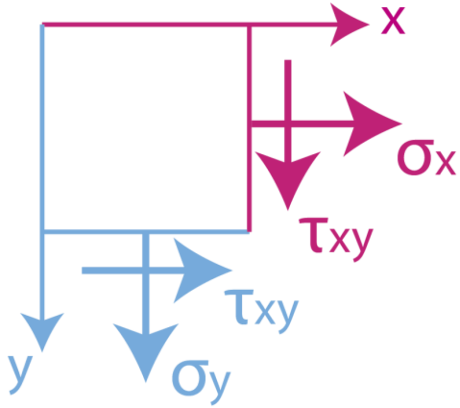
Trazamos la circunferencia de modo tal que pase por los puntos que representan las tensiones del cubo elemental

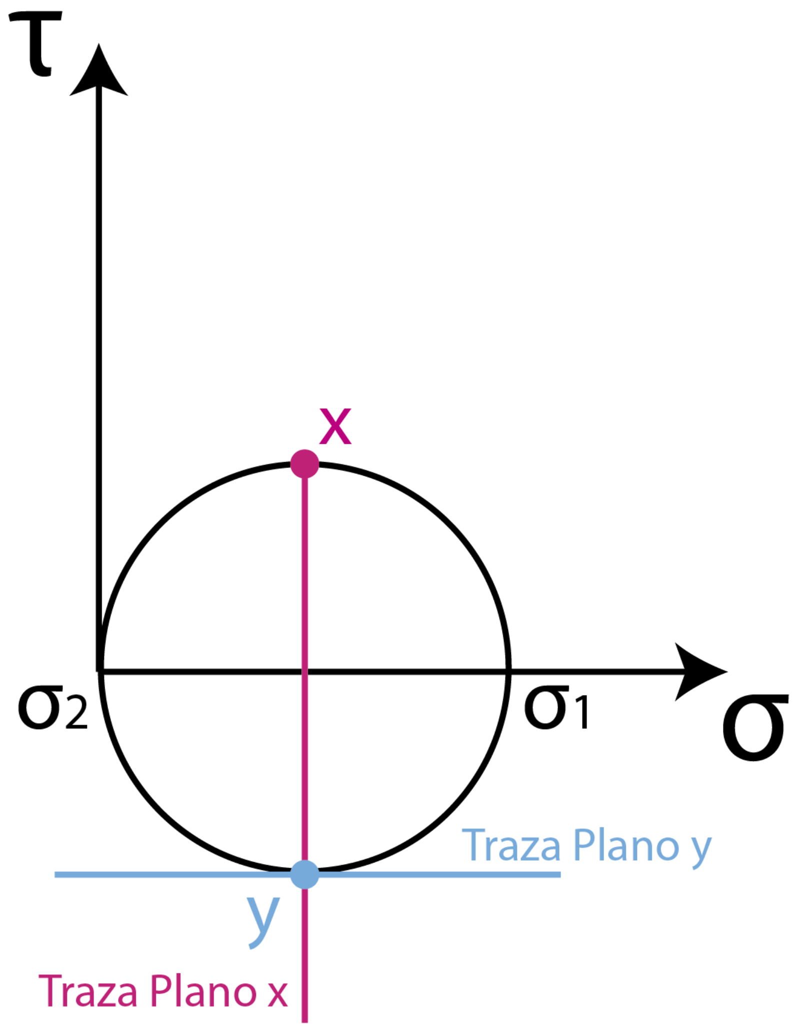



τ
x
τxy
σx
σy
τxy
y
σ

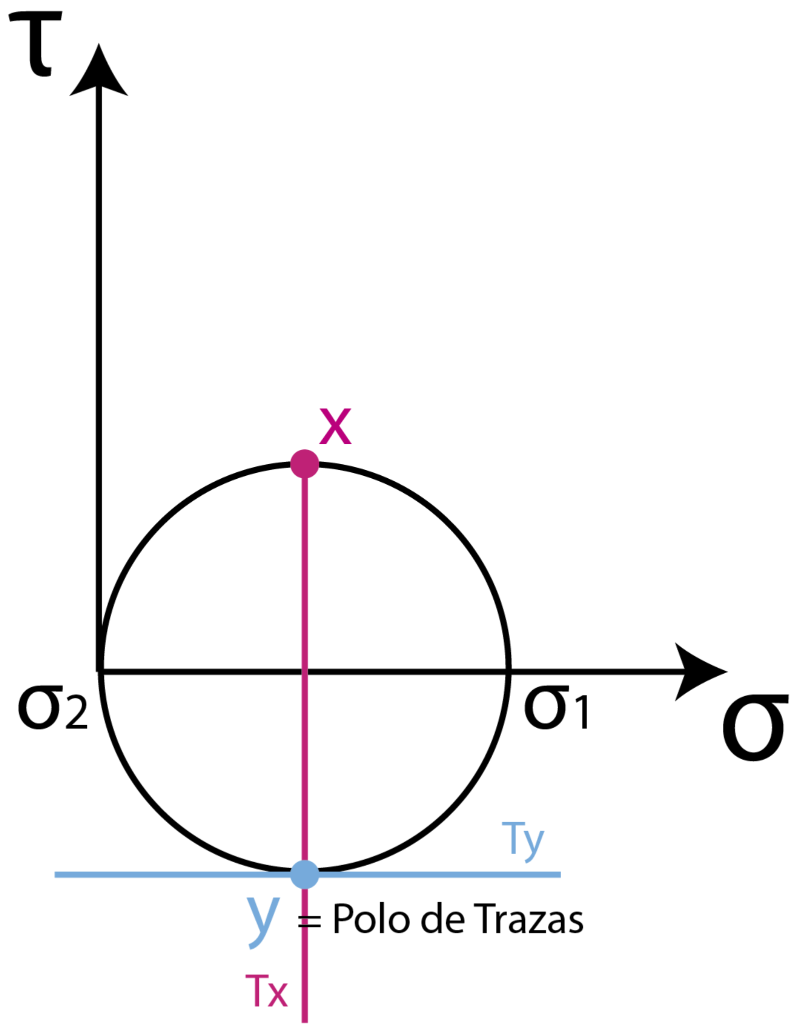
Donde la circunferencia interseca con el eje σ estarán σ_1 y σ_2

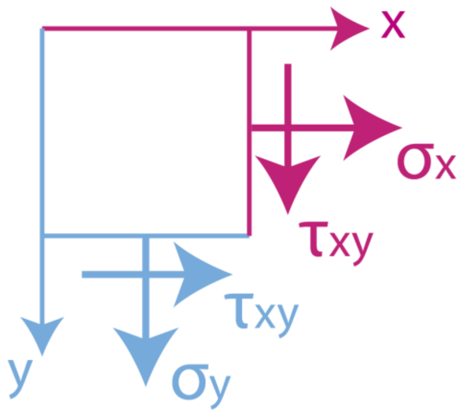


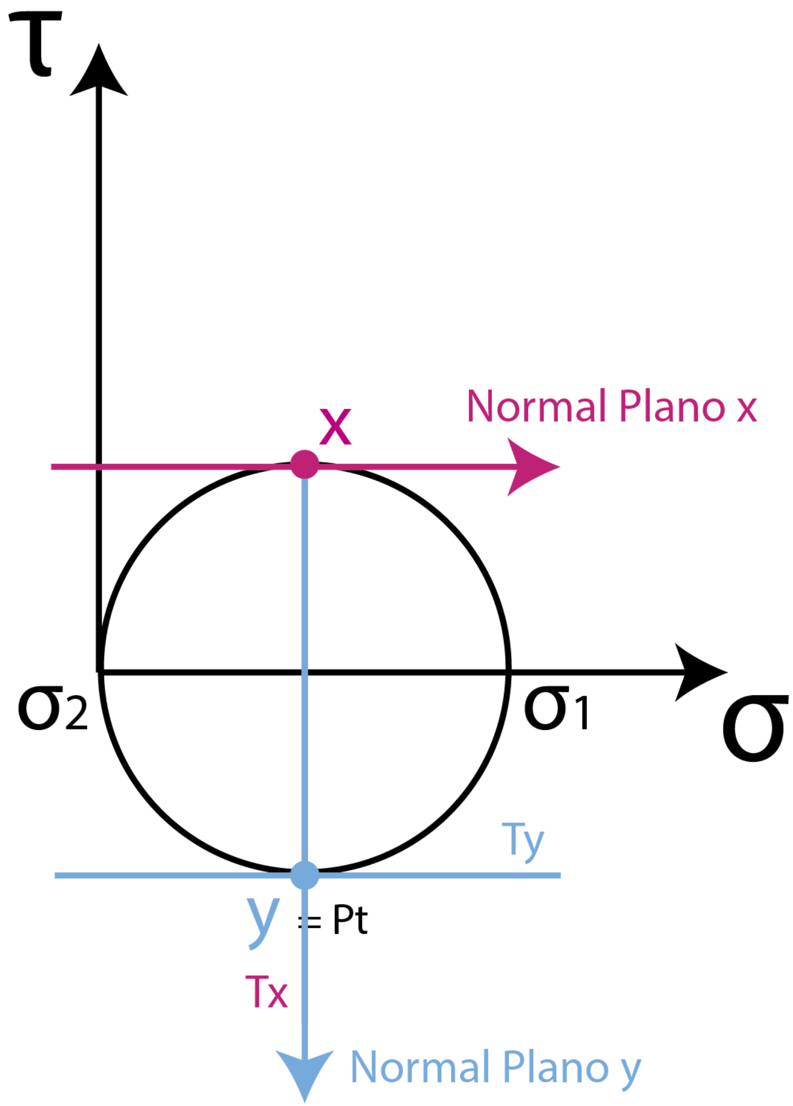

x
σx
τxy
τxy
y
σy


τ
x
σ2
σ1
σ
Traza Plano y
y
Traza Plano x

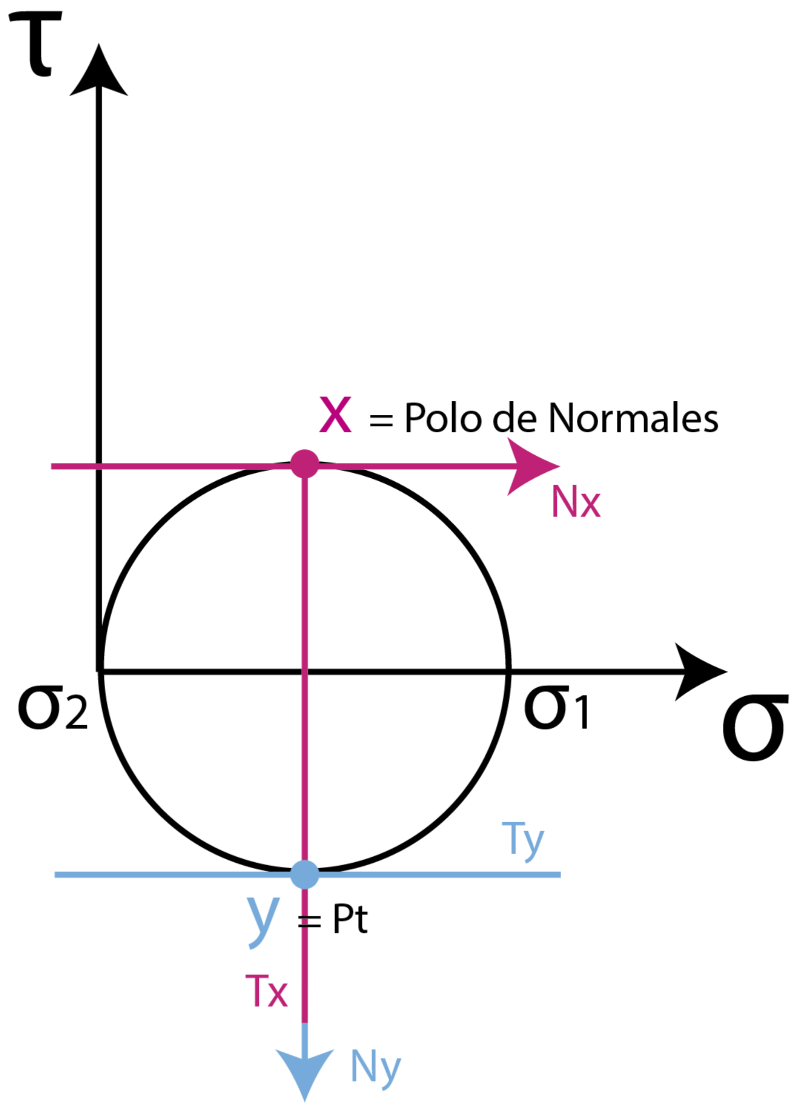
En la intersección de las trazas de los planos se encuentra el polo de trazas



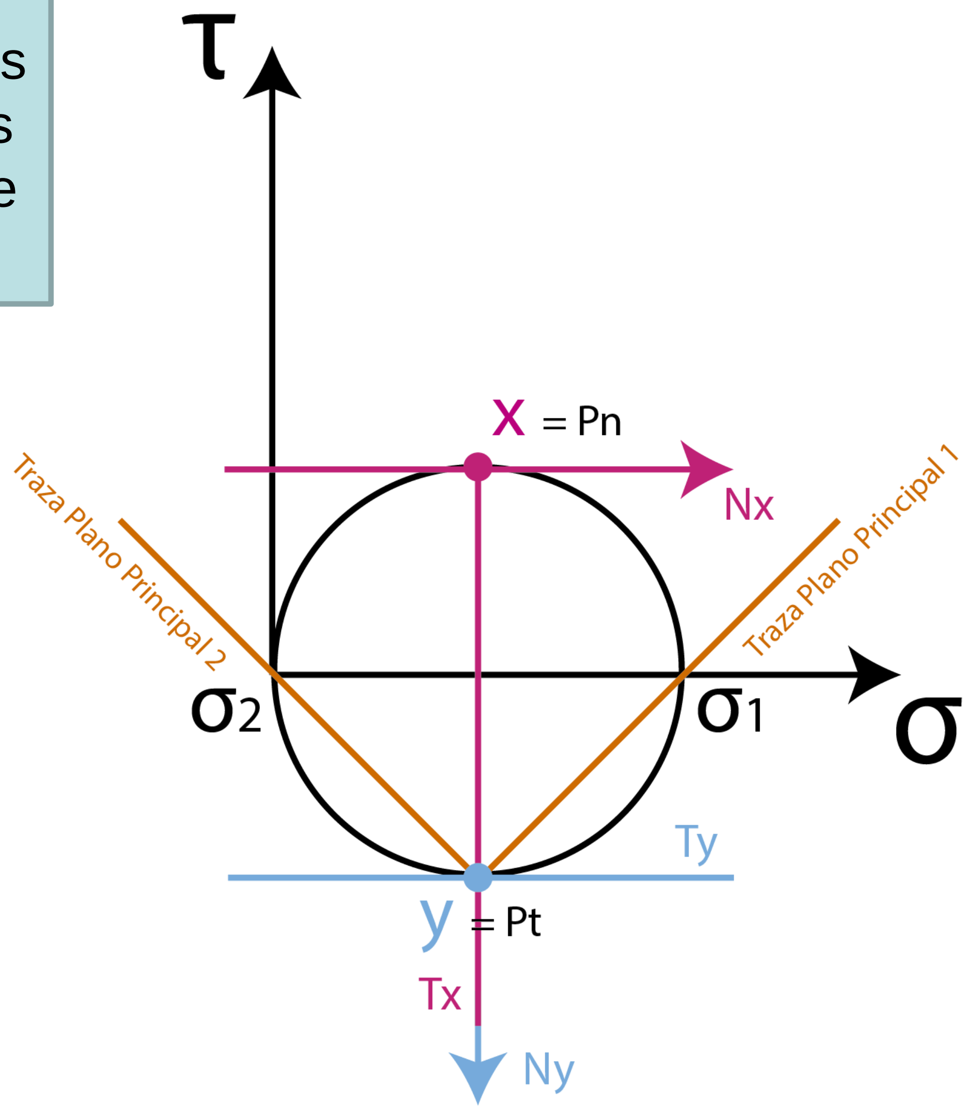

x
σx
τxy
τxy
y
σy


τ
Normal Plano x
x
σ2
σ1
σ
Ty
y
= Pt
Tx
Normal Plano y

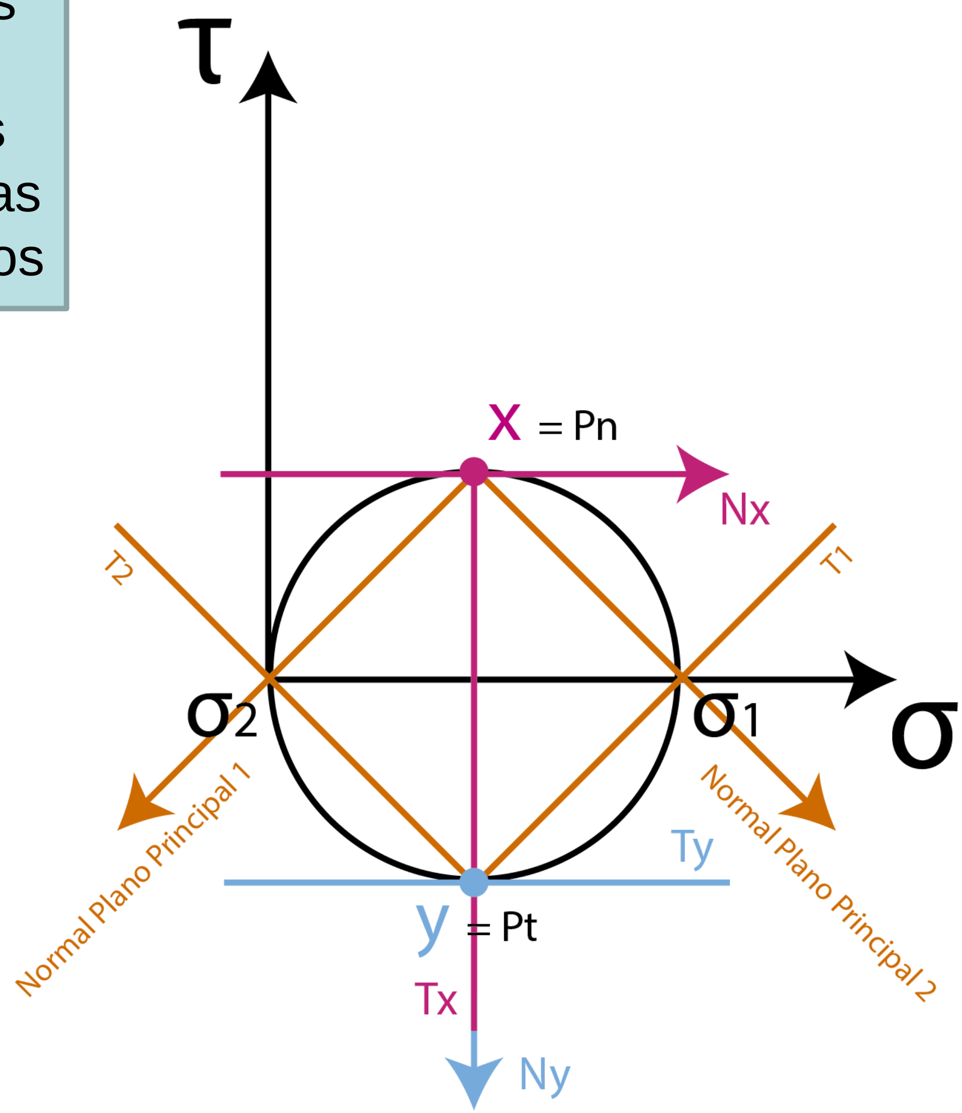
En la intersección de las normales de los planos se encuentra el polo de normales

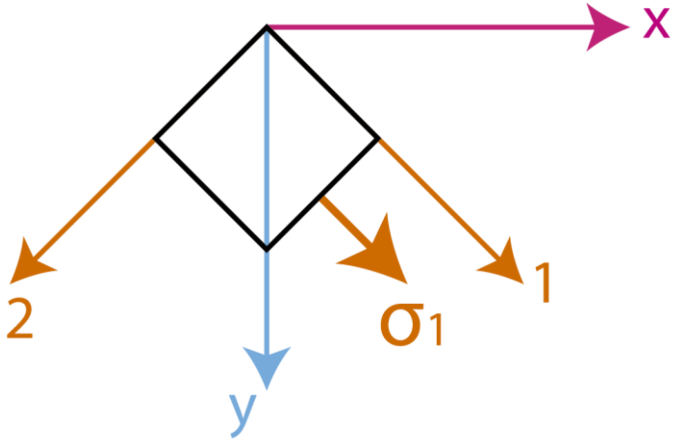


Uniendo el polo de trazas con los puntos que representan las tensiones de los planos principales se obtienen las trazas de dichos planos

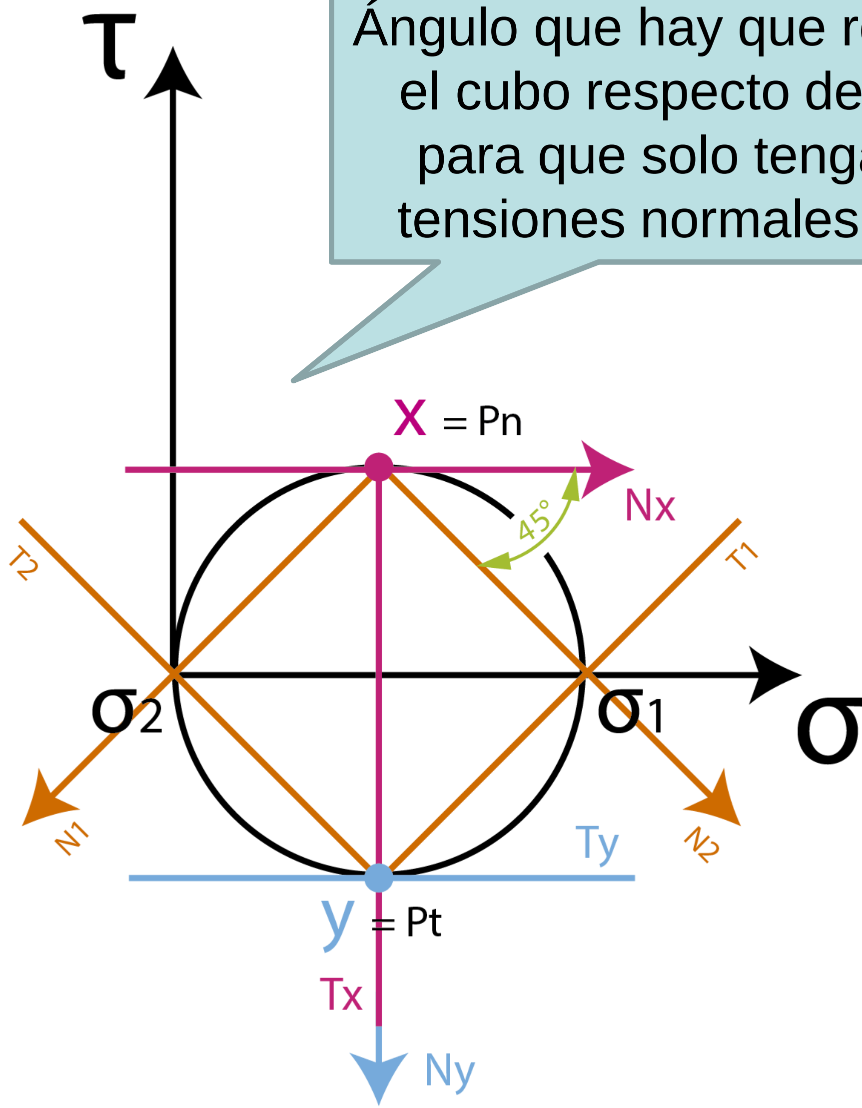


Uniendo el polo de normales con los puntos que representan las tensiones de los planos principales se obtienen las normales de dichos planos

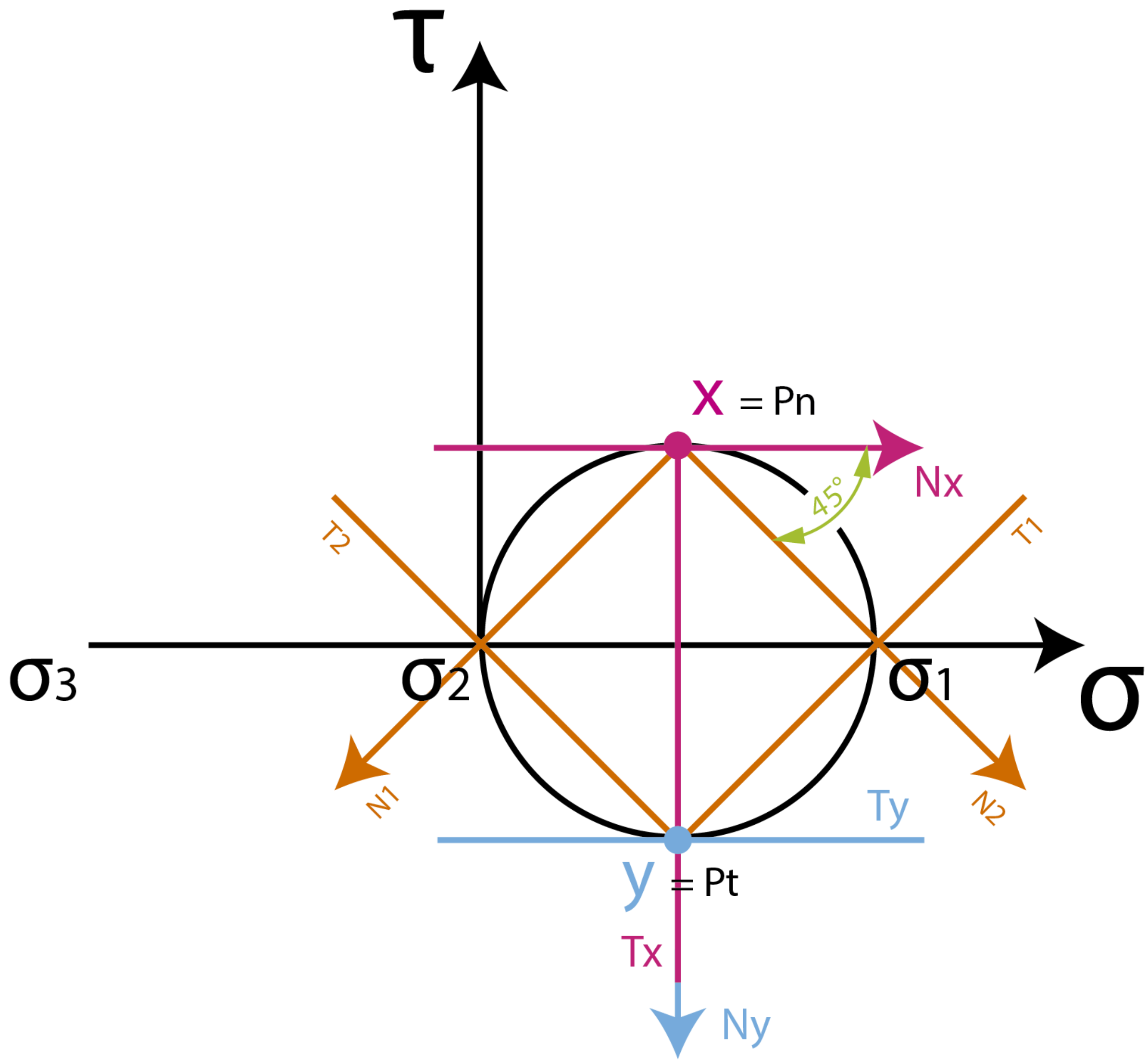


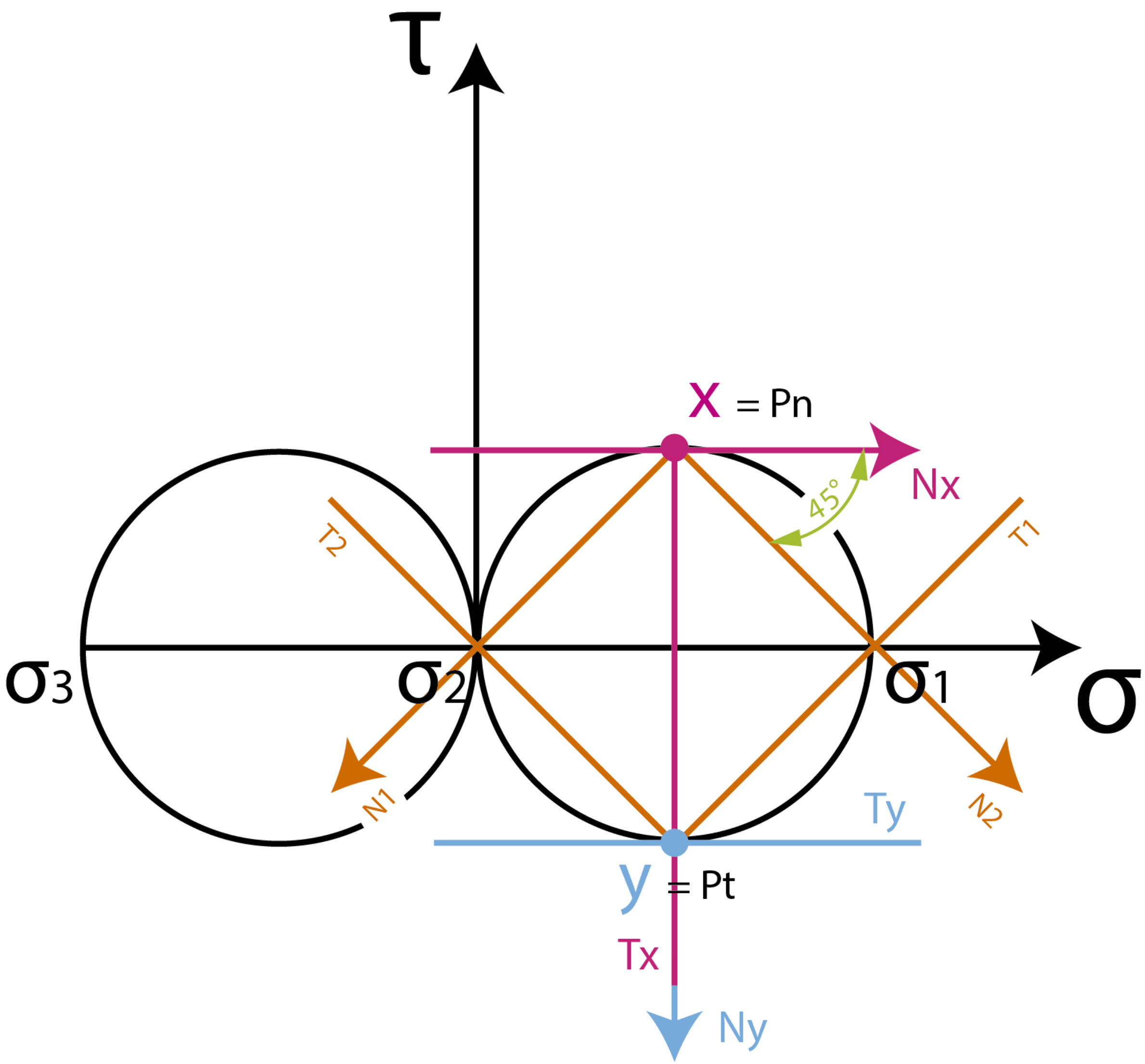


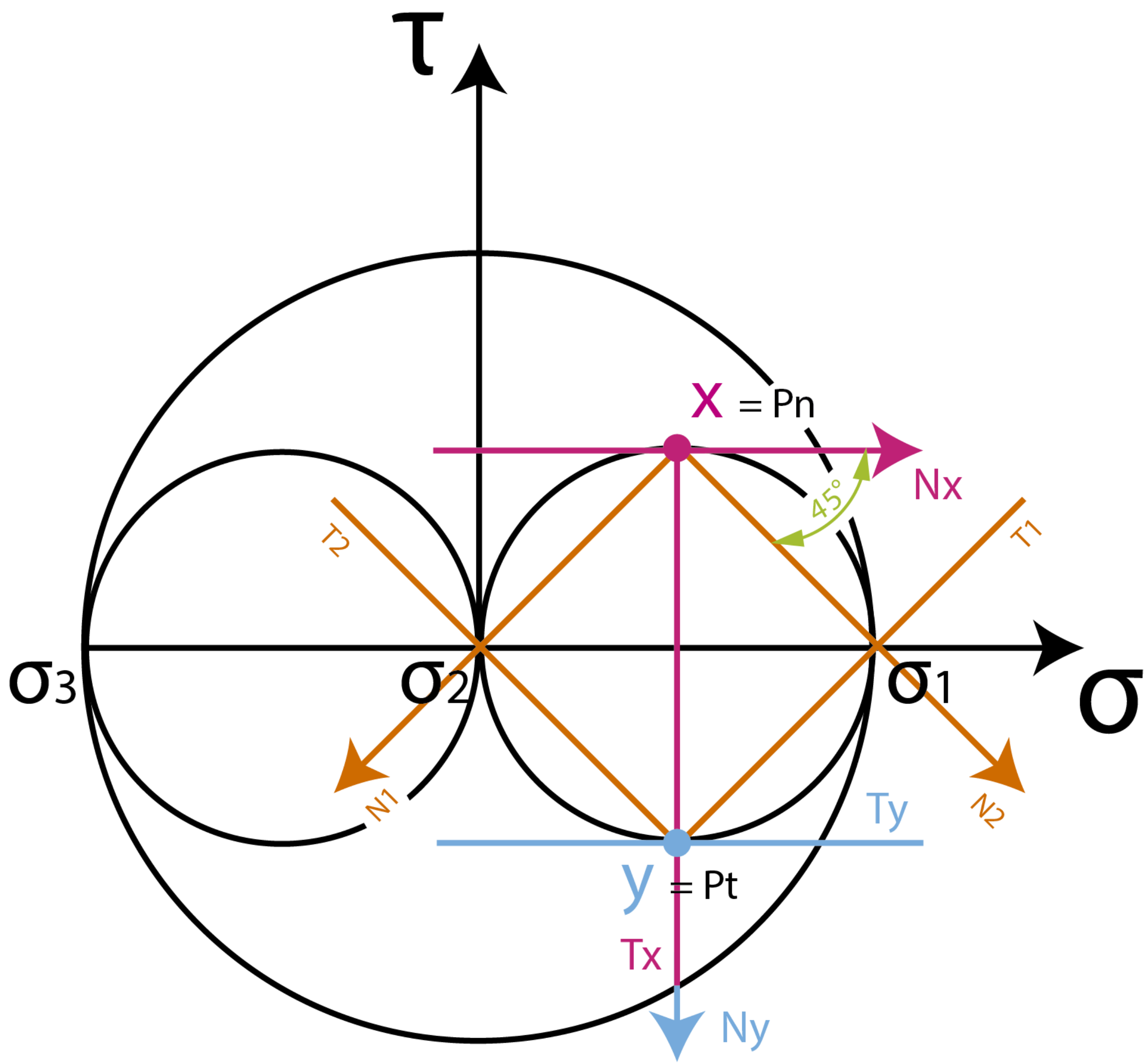
Ángulo que hay que rotar el cubo respecto de x para que solo tenga tensiones normales σ



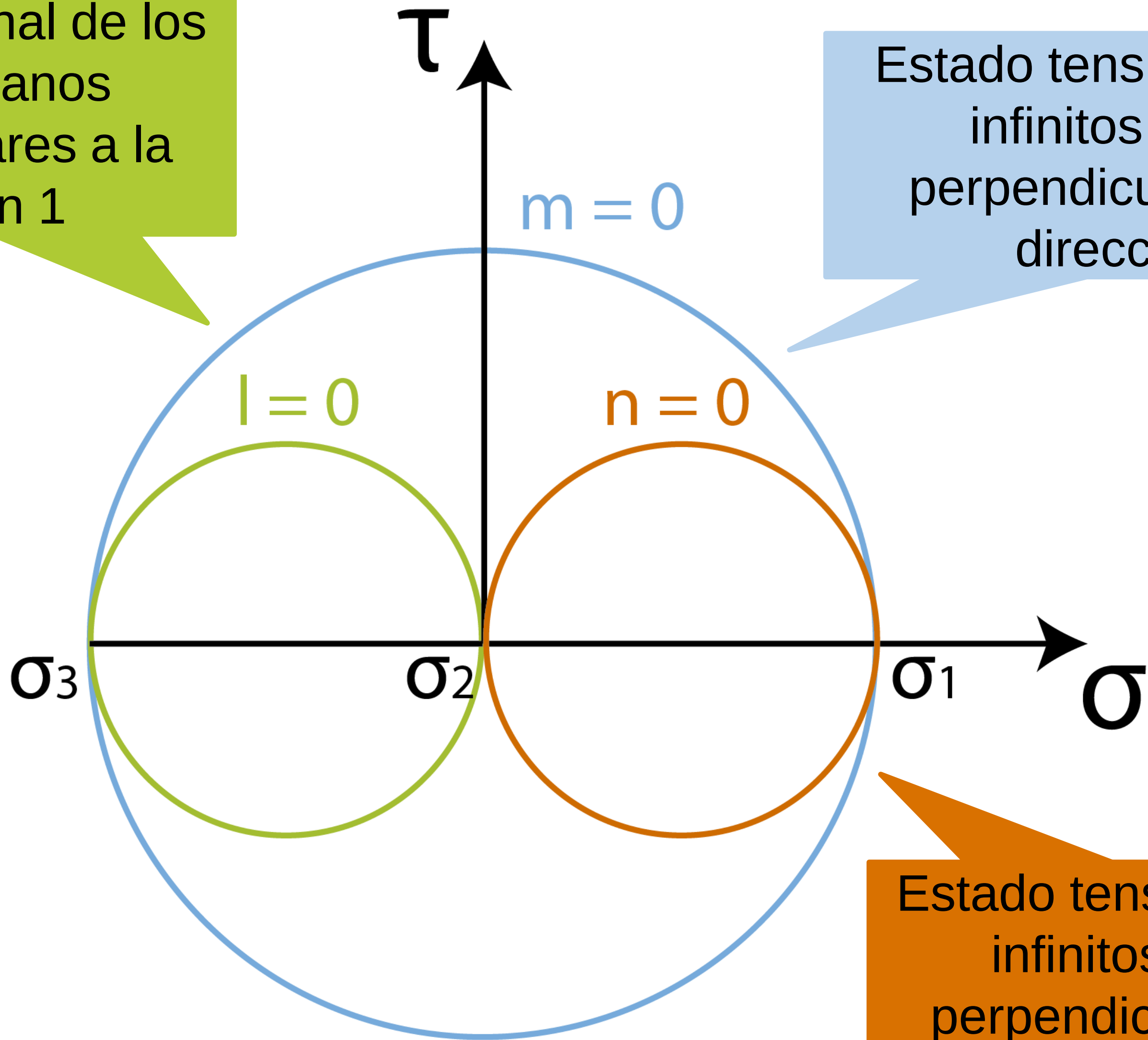
Construimos la circunferencia de Mohr del Estado Triple agregando al Estado Doble la tensión principal 3:




τ
σ
σ3
σ2
σ1
X = Pn
Nx
45°
T1
T2
N1
N2
Ty
y = Pt
Tx
Ny


τ
σ
σ3
σ2
σ1
X = Pn
Nx
45°
T2
T1
N1
N2
Ty
y = Pt
Tx
Ny

Estado tensional de los infinitos planos perpendiculares a la dirección 1



Estado tensional de los infinitos planos perpendiculares a la dirección 2

Estado tensional de los infinitos planos perpendiculares a la dirección 3

Estado tensional de los infinitos planos posibles