MA - 08 - DIC - 2020:

MA - 15 - DIC - 2020:

1) ET: → CIRCUNFERENCIA DE MOHR.

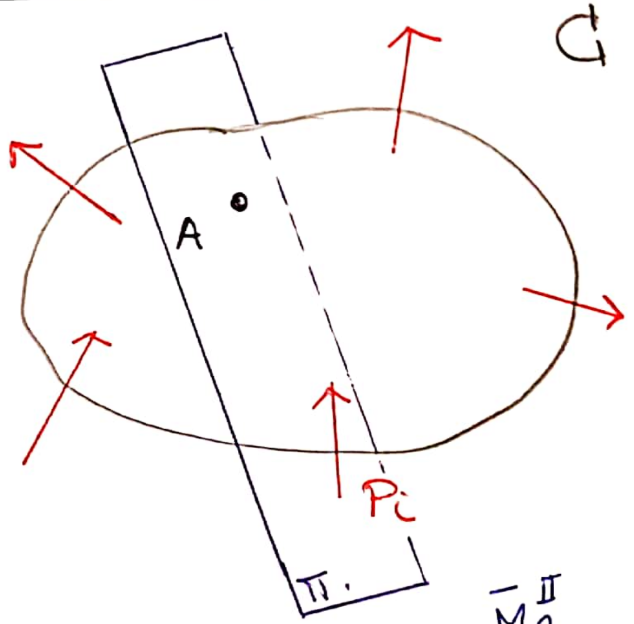
2) ED:

3) RTyD ≡ RC. RELACIONES CONSTITUTIVAS.

4) TEL: TEORÍAS DE LOS ESTADOS LÍMITES O DE FALLA

ET: "CIRCUNFERENCIA DE MOHR".

01 - INTRODUCCIÓN:



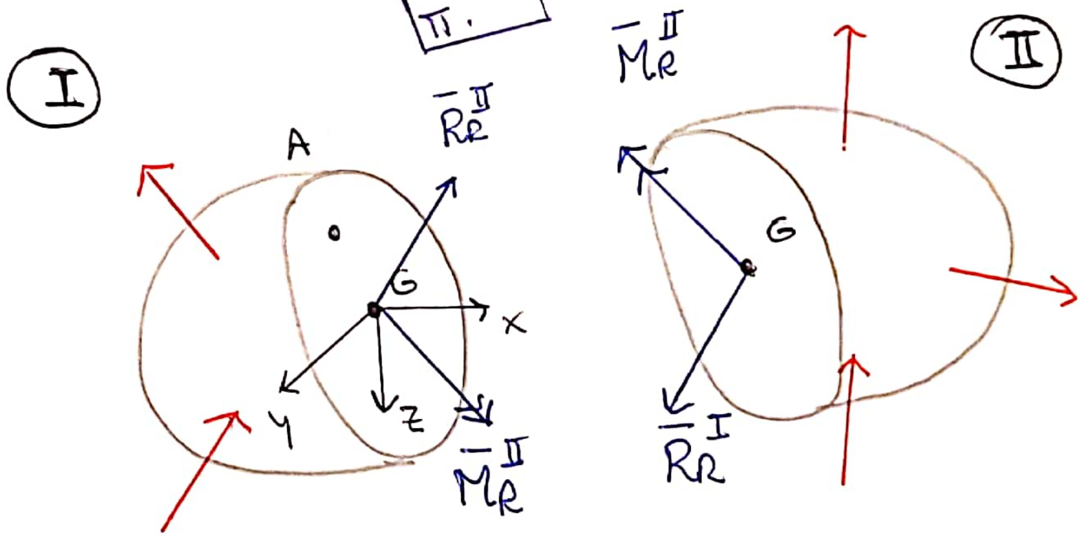
C

C: CUERPO

P_i: FZAS EN EQUILIBRIO

FE = FA + FR

FE = 0.



02 - DEFINICIONES:

- VECTOR TENSIÓN

$$\bar{\rho}^{\pi}_{A} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta A} = \frac{d\bar{P}}{dA}.$$

- ESTADO DE TENSIÓN EN UN PUNTO.

- TENSOR DE TENSIONES:

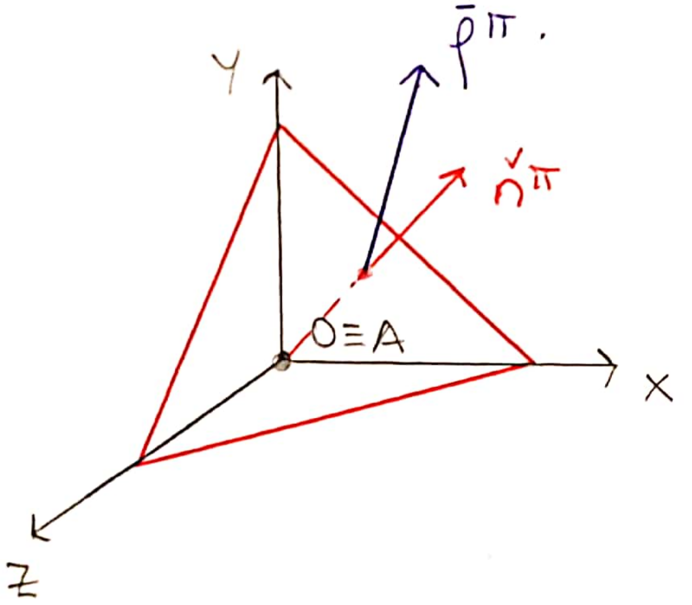
$$[TT]_{xyz} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \\ \text{Plano 'x'} \quad \text{Plano 'y'} \quad \text{Plano 'z'} \end{array}$$

→ EL [TT] ES UN ENTE MATEMÁTICO QUE:
- REPRESENTA
- CARACTERIZA.
- Y PERMITE DETERMINAR AL ESTADO DE TENSIÓN EN UN PUNTO DEL CUERPO.

$$[TT]\{\check{n}^{\pi}\} = \{\bar{\rho}^{\pi}\}.$$

→ SE CONSTRUYE CONOCIENDO LOS VECTORES TENSIÓN ASOCIADOS A 3 PLANOS PERPENDICULARES.

03 - DESARROLLOS PRELIMINARES:



$$\{\bar{\rho}^{\pi}\} = [TT]\{\check{n}^{\pi}\}. \qquad (1a)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho^{\pi}_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n. \\ \rho^{\pi}_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n. \\ \rho^{\pi}_z = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} m + \sigma_z \cdot n. \end{array}\right\} (1b).$$

- Si se trabaja con la terna principal:

$$(0; 1; 2; 3).$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho^{\pi}_1 = \sigma_1 \cdot l^* \\ \rho^{\pi}_2 = \sigma_2 \cdot m^* \\ \rho^{\pi}_3 = \sigma_3 \cdot n^* \end{array}\right\} \quad (1c)$$

4/17

$$\rho^{\pi}_{xyz} = |\bar{\rho}^{\pi}| = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2} \qquad (2a)$$

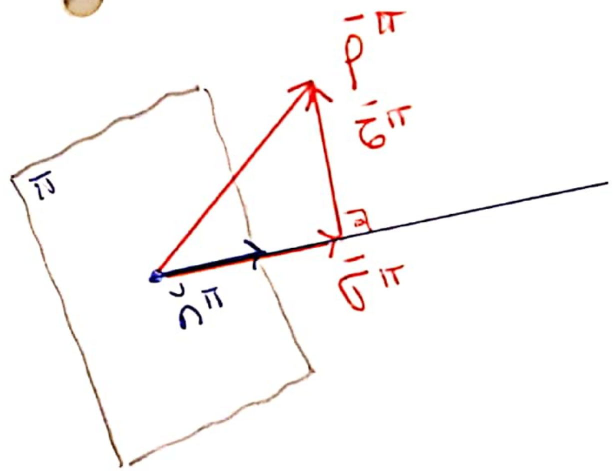
$$\rho^{\pi}_{123} = |\bar{\rho}^{\pi}_{123}| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2} \qquad (2b).$$

$$\rho^{\pi} = \sqrt{\sigma_1^2 (l^*)^2 + \sigma_2^2 (m^*)^2 + \sigma_3^2 \cdot (n^*)^2} \qquad (3)$$

$$\rho^{\pi} = \sqrt{(\sigma^{\pi})^2 + (\tau^{\pi})^2} \qquad (4)$$

→ COMBINANDO (3) y (4):

$$\boxed{\sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 (l^*)^2 + \sigma_2^2 \cdot (m^*)^2 + \sigma_3^2 (n^*)^2} \qquad (5)$$



$$\{\bar{\sigma}^{\pi}\} = \underbrace{\left[\{\bar{\rho}^{\pi}\} \cdot \{\check{n}^{\pi}\}\right]}_{\text{PSEUDO - MÓDULO.}} \cdot \{\check{n}^{\pi}\} \qquad (6)$$

$$\sigma^{\pi} = \sigma = \underbrace{(\sigma_1 l^* ; \sigma_2 m^* ; \sigma_3 n^*)}_{(1c)} \cdot (l^*, m^*, n^*) \qquad (7)$$

$$\boxed{\sigma^{\pi} = \sigma = \sigma_1 (l^*)^2 + \sigma_2 (m^*)^2 + \sigma_3 (n^*)^2} \qquad (8).$$

04) - CONSTRUCCIÓN DE MOHR:

(5) $\longrightarrow \quad \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2.$

(8) $\longrightarrow \quad \sigma = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \, m^2 + \sigma_3 \, n^2.$ $\longrightarrow$ MOHR

(9) $\longrightarrow \quad 1 = l^2 + m^2 + n^2.$

(10a) $\tau^2 + \left(\sigma - \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\sigma_1 - \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 l^2 + \left(\dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 (1 - l^2).$

(10b) $\tau^2 + \left(\sigma - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\sigma_2 - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 m^2 + \left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 (1 - m^2).$

(10c) $\tau^2 + \left(\sigma - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 = \left(\sigma_3 - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 n^2 + \left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 (1 - n^2).$

05 - COMENTARIOS A LAS EXPRESIONES DE MOHR (10)

I DATOS: σ_1; σ_2; σ_3.

→ SE TRABAJA C/ TERNA PPAL.

II INCÓGNITAS:

1) → σ y τ. ← COMO DATO ADICIONAL CONOZCO EL PLANO (l, m, n).

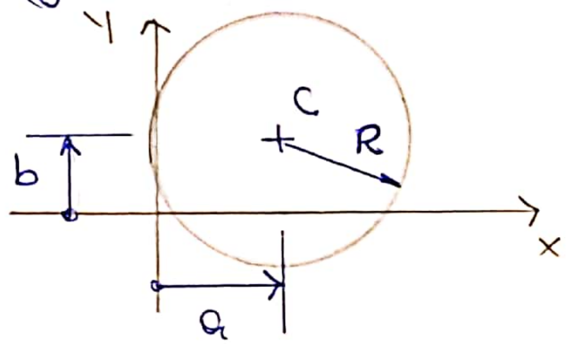
2) → (l, m, n) ← COMO DATO ADICIONAL CONOZCO (σ, τ)

III LAS EXPRESIONES (10) REPRESENTAN "CIRCUNFERENCIAS".

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

$x \to \sigma$.

$y \to \tau$



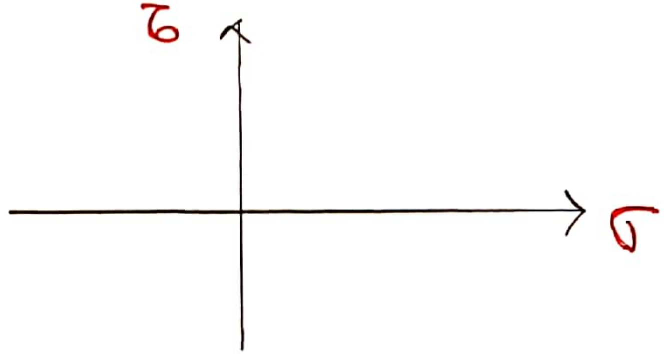
IV LAS EXPRESIONES (10) REPRESENTAN → "FAMILIAS DE CIRCUNFERENCIAS".

$$\left[\begin{array}{l} 0 \le l \le 1 \\ 0 \le m \le 1 \\ 0 \le n \le 1 \end{array}\right.$$

V) CON σ y τ $\longrightarrow$ ρ.

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

VI) → LAS EXPRESIONES (10) SE REPRESENTAN GRÁFICAMENTE:



VII) LAS FLIAS. DE CIRCUNFERENCIAS DEPENDE DE LAS TENSIONES PPALES.

VIII) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$$(\sigma - a)^2 + (\tau - b)^2 = R^2$$

$b = 0$.

→ LOS CENTROS DE LAS 3 FLIAS DE CIRCUNFERENCIAS SE UBICAN SOBRE EL EJE DE ABSCISAS (EJE X = EJE σ).

IX) → CADA FLIA DEPENDE DE "1" SÓLO PARÁMETRO.

X) → CADA FLIA DE CIRCUNFERENCIAS VA A ESTAR LIMITADA POR 2 CIRCUNFERENCIAS EXTREMAS.

XI) → EN LAS EXPRESIONES (10) → → CADA VALOR DE LAS TENS. PPALES SE INTRODUCE CON SU SIGNO.

06 - REPRESENTACIONES:

1º FAMILIA:

$$C_1 = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \, ; \, 0 \right)$$

$$\ell = 0 \rightarrow R_{1,0} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

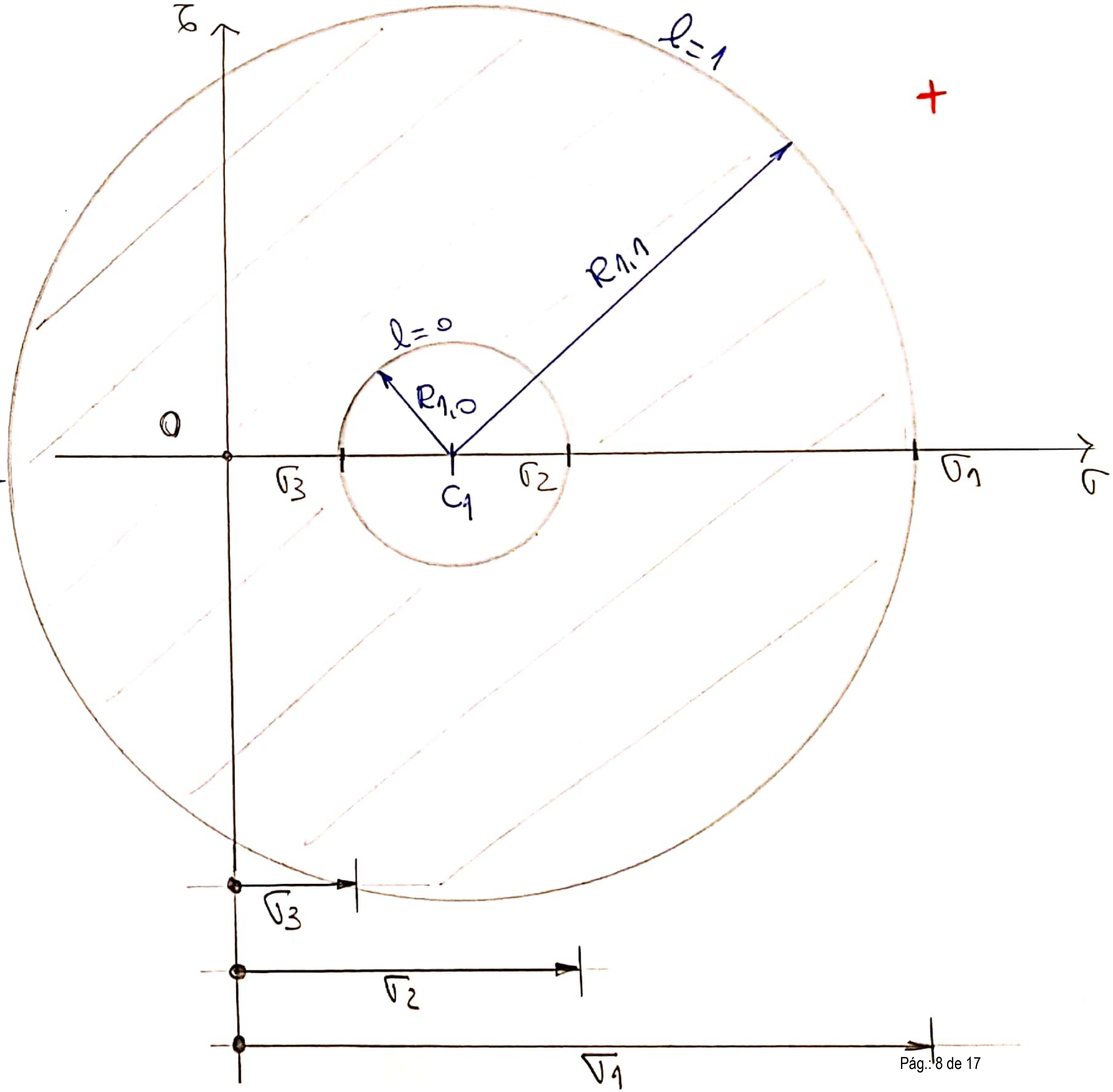
$$\ell = 1 \rightarrow R_{1,1} = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

DATO P/ EJEMPLO:

$\sigma_1 = \cancel{10}\ 12$

$\sigma_2 = 6.$

$\sigma_3 = 2$



ACLARACIONES:

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

EJ: $\sigma_1 = 20$ kN/cm²

$\sigma_2 = 8$ "

$\sigma_3 = -4$ "

EJ: $\sigma_2 = -25$ "

$\sigma_3 = -50$ "

$\sigma_1 = -10$ "

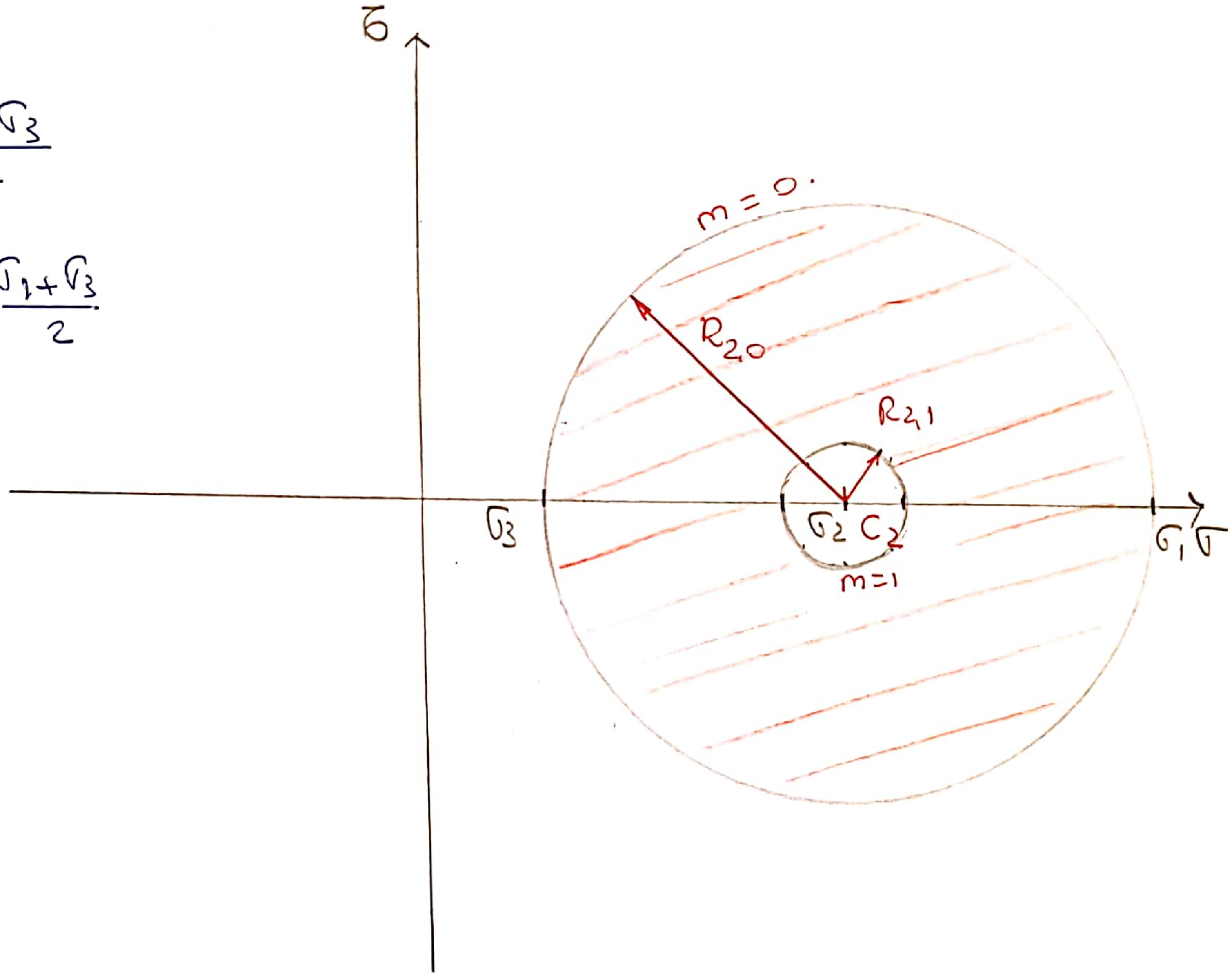
2º Familia:

$$C_2 \equiv \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} ; 0 \right)$$

$$m = 0 \rightarrow R_{2,0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$m = 1 \rightarrow R_{2,1} = \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 = 12 \\ \sigma_2 = 6 \\ \sigma_3 = 2 \end{array}\right\}$$

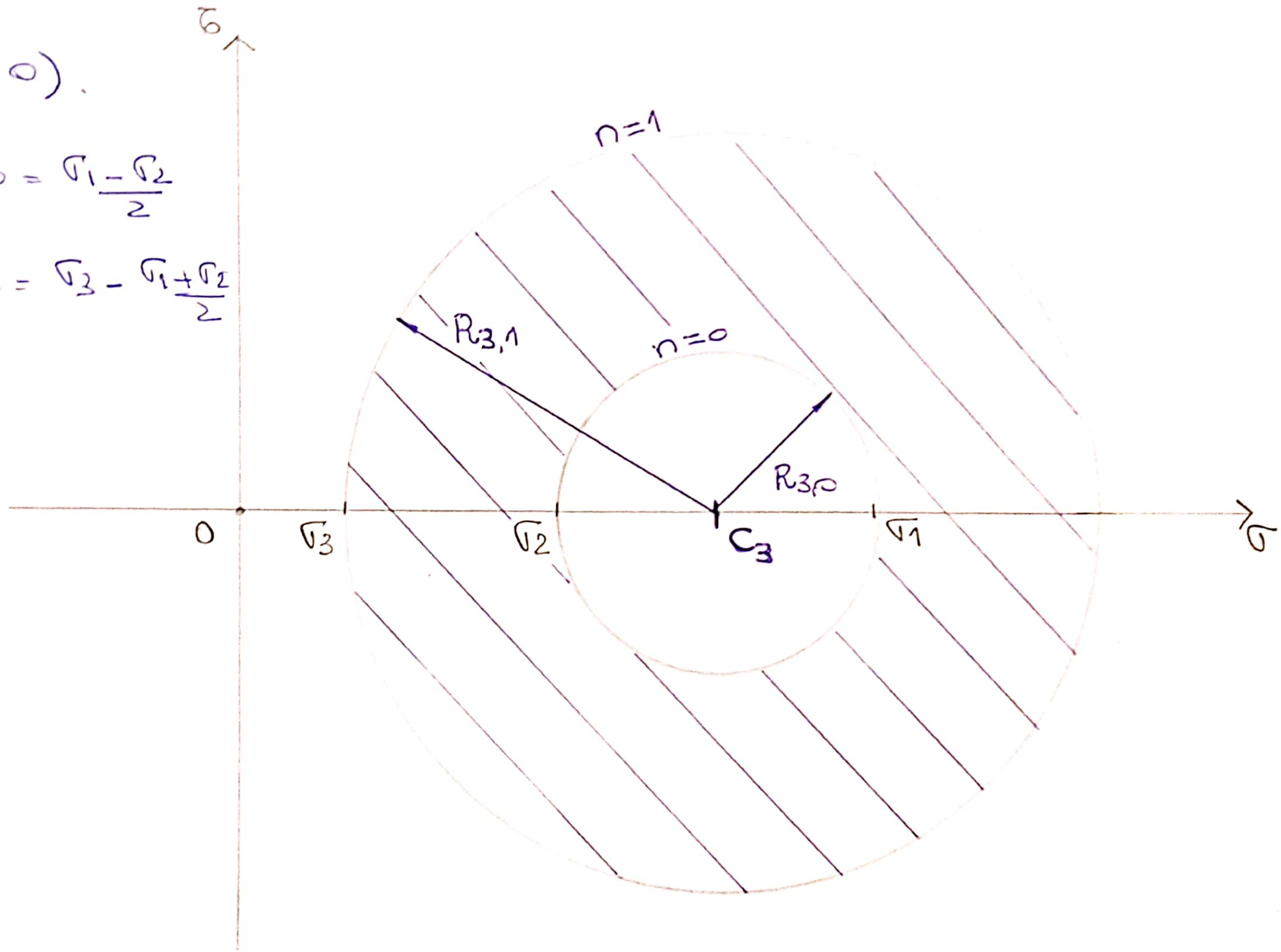


3º Familia:

$C_3 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} ; 0 \right)$.

$n = 0 \rightarrow R_{3,0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

$n = 1 \rightarrow R_{3,1} = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

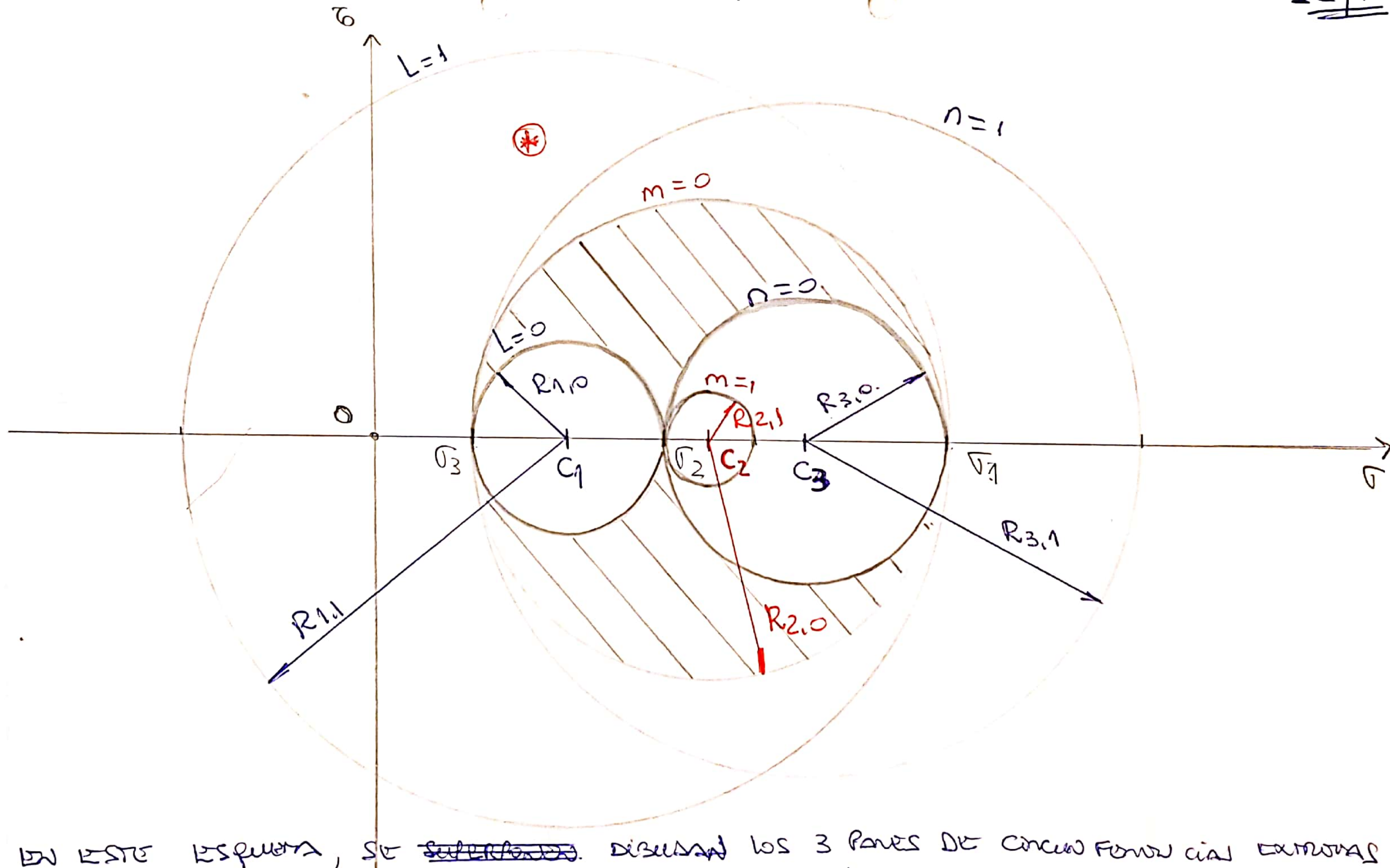


DATOS:

$\sigma_1 = 12$

$\sigma_2 = 6$

$\sigma_3 = 2$



EN ESTE ESQUEMA, SE ~~SUPERPONEN~~. DIBUJAN LOS 3 PARES DE CIRCUNFERENCIAS EXTREMAS DE CADA FAMILIA Y SE SUPERPONEN BUSCANDO EL ÁREA DE INTERSECCIÓN DE LAS PROPIAS 3 FAMILIAS.

OBJETIVO:

1) DATOS

$\left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} \quad (l, m, n) \quad \xrightarrow[\text{OBTENGO ?}]{\text{QUÉ}} \quad \begin{matrix} \rho^{\pi} \\ \sigma^{\pi} \\ \tau^{\pi} \end{matrix}$

2) DATOS:

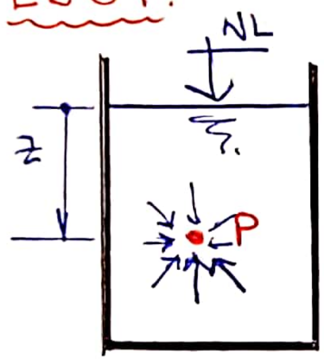
$\left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} \quad (\sigma^{\pi}, \tau^{\pi}) \quad \xrightarrow[\text{OBTENGO}]{\text{QUÉ}} \quad (l, m, n)$ OBTENGO PLANO.

- LAS CIRCUNFERENCIAS DE MOHR ES LA CONSTRUCCIÓN GRÁFICA EQUIVALENTE AL [T T].

- A LAS CIRCUNFERENCIAS DE $l = 0$; $m = 0$; $n = 0$ → SE LAS DENOMINA "CIRCUNFERENCIAS FUNDAMENTALES DE MOHR".

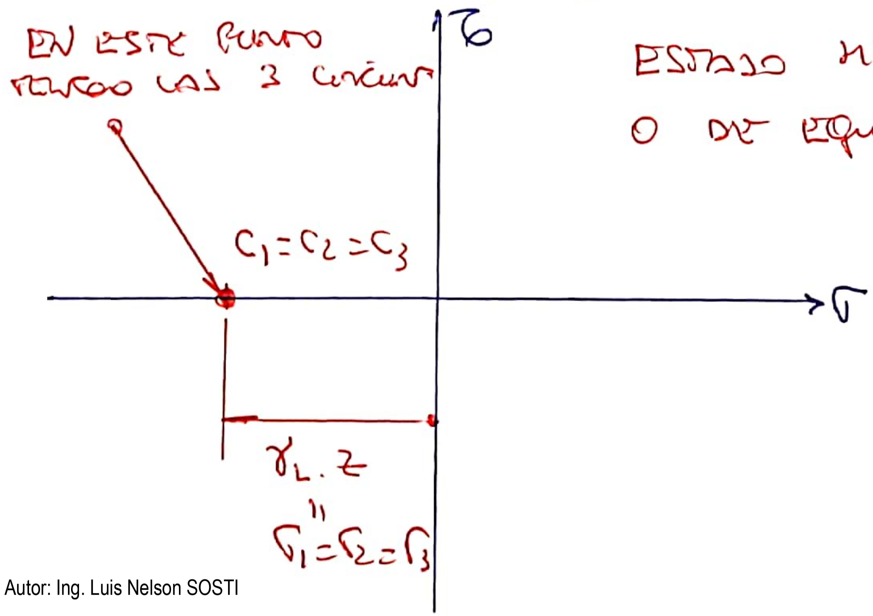
07 - APLICACIONES PARTICULARES.

EJ 01:



$p = \gamma_L \cdot z$

$$[TT] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_L z & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_L z & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_L z \end{bmatrix}.$$



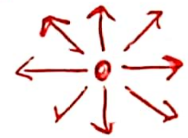
ESTADO HIDROSTÁTICO.

O DE EQUICOMPRESIÓN.

EJ 02

$$[TT] = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix}$$

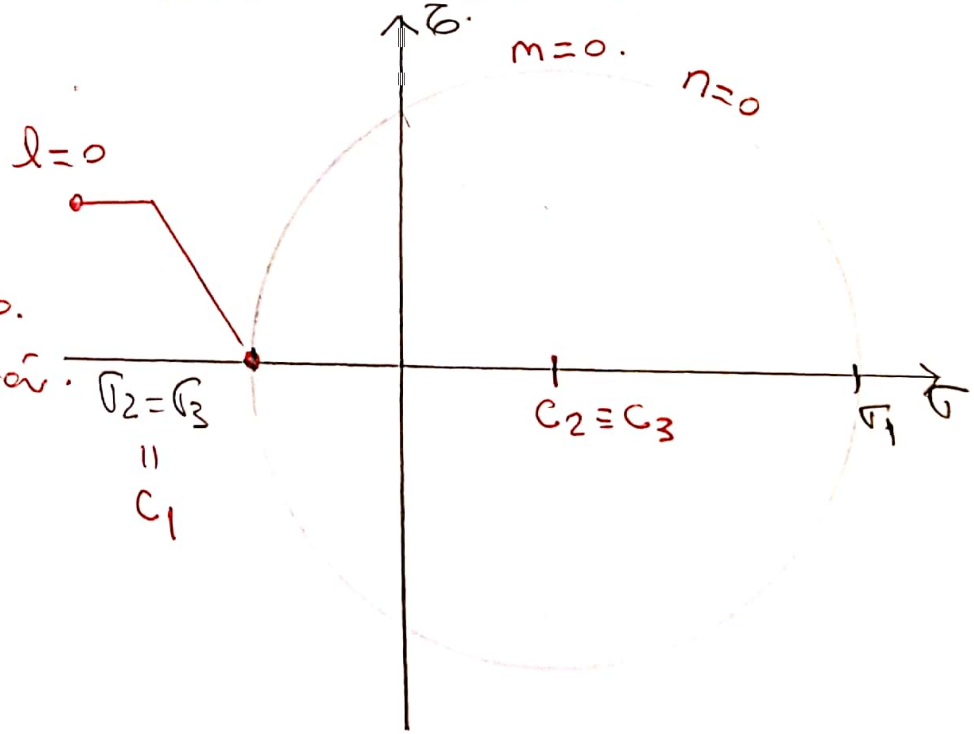
"EQUITRACCIÓN"



EJ 03

$$[TT] = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

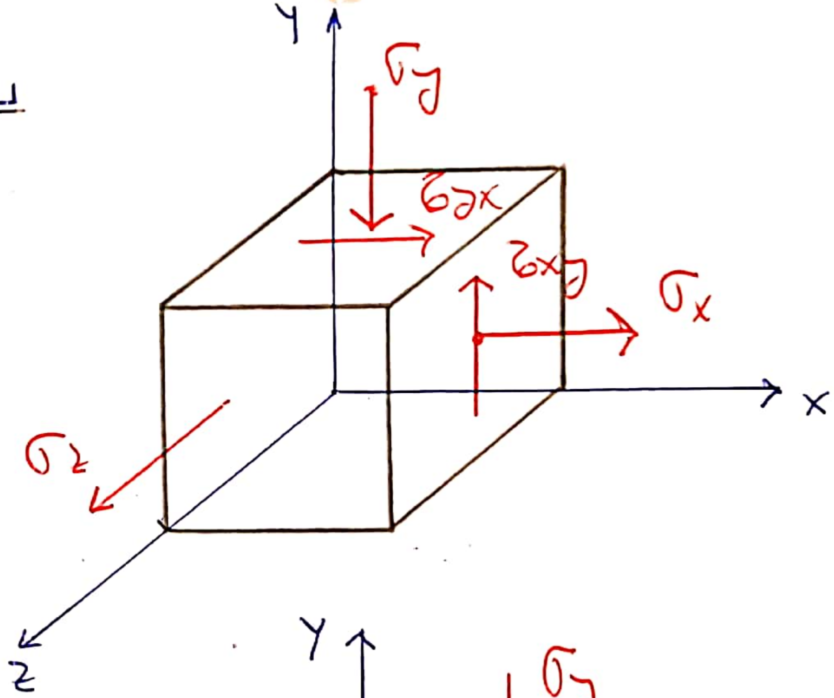
$\sigma_1 = 60 \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -20$



08 – CIRCUNFERENCIA

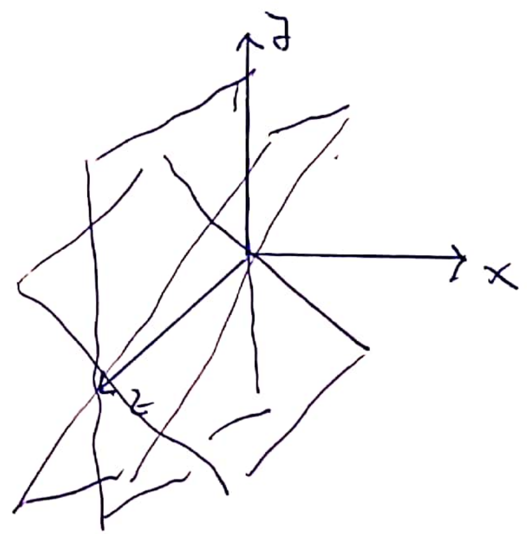
ESTADO PLANO Y EJE DIRECTOR:

$$[TT] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$



TOMAR COMO EJE DIRECTOR → AL EJE PPAL.

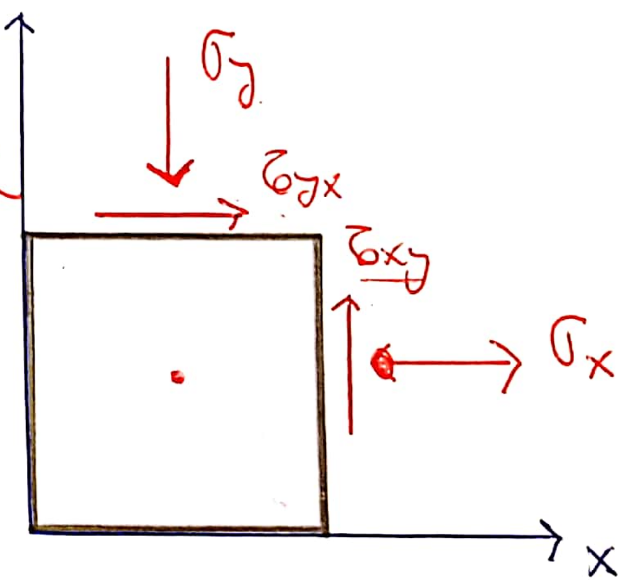
$$\alpha \rightarrow \begin{Bmatrix} l \\ m \\ 0 \end{Bmatrix}$$



NUEVA CONVENCIÓN

τ_{xy} ⊖

τ_{yx} ⊕



$\sigma_x = 80.$

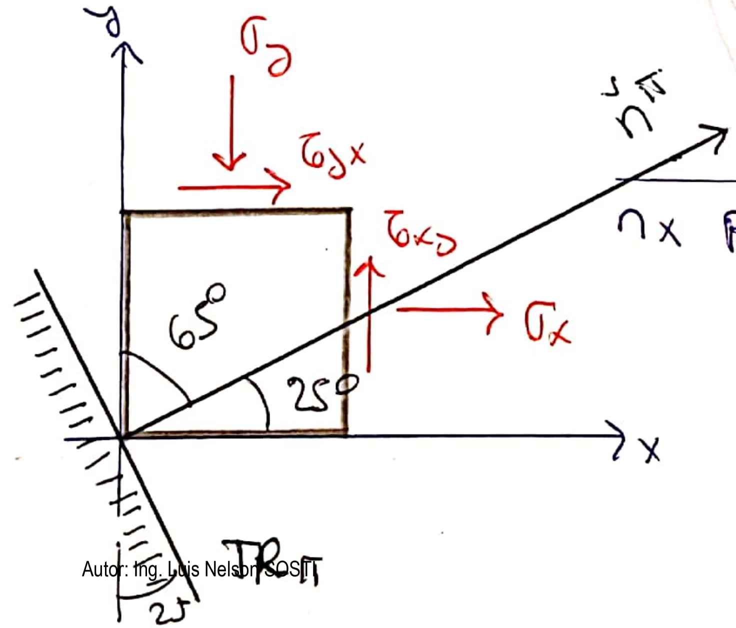
$\sigma_y = -40.$

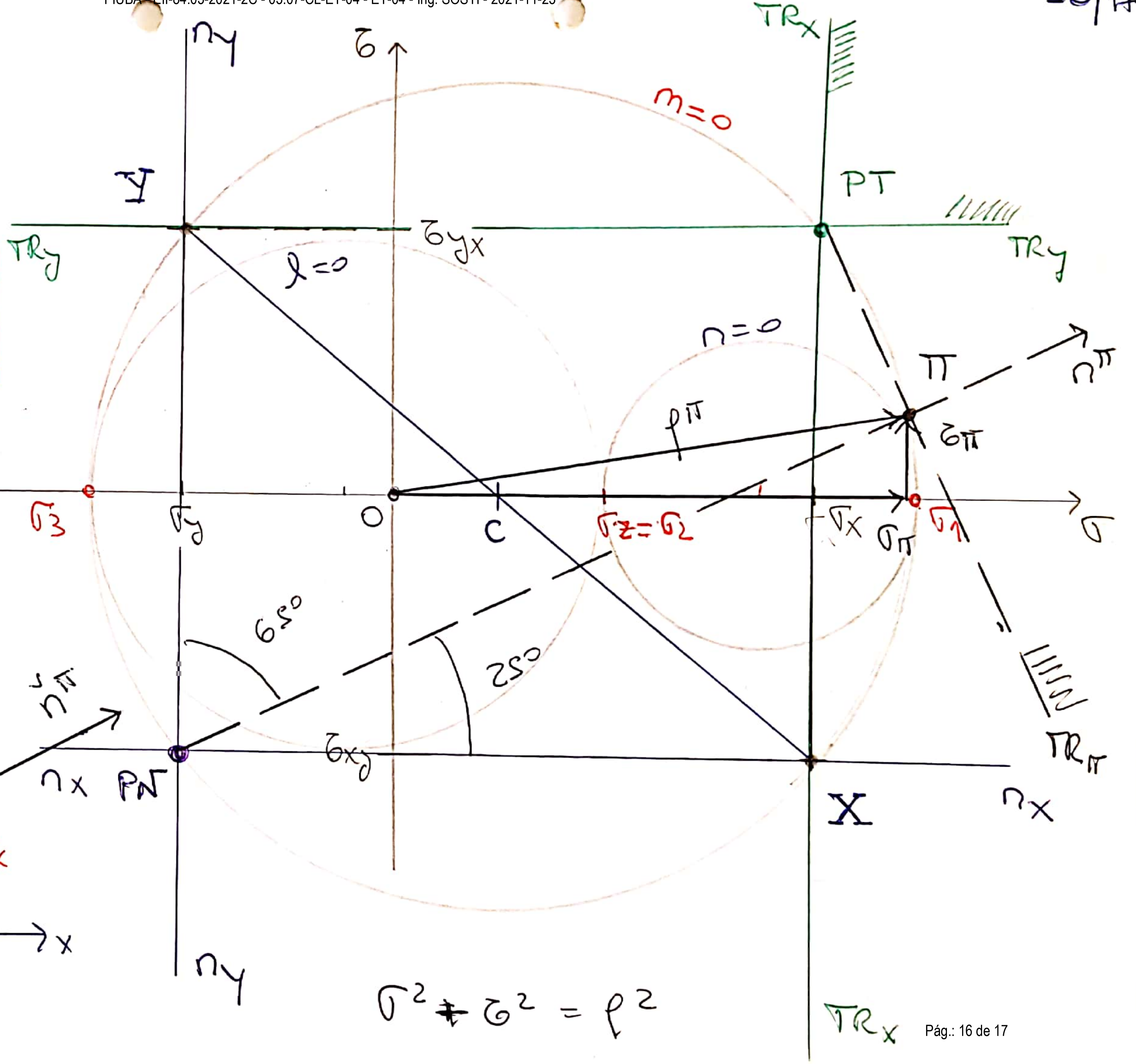
$\tau_{xy} = +50$

$$[T\sigma] = \begin{bmatrix} +80 & +50 & 0 \\ +50 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$\sigma_z = +40$

$\cancel{\sigma_3 = -100}$

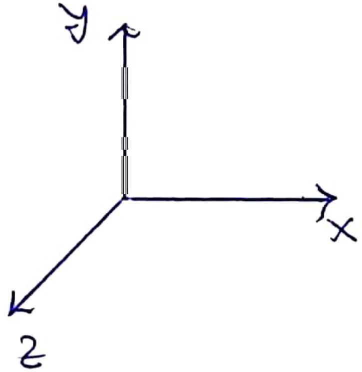


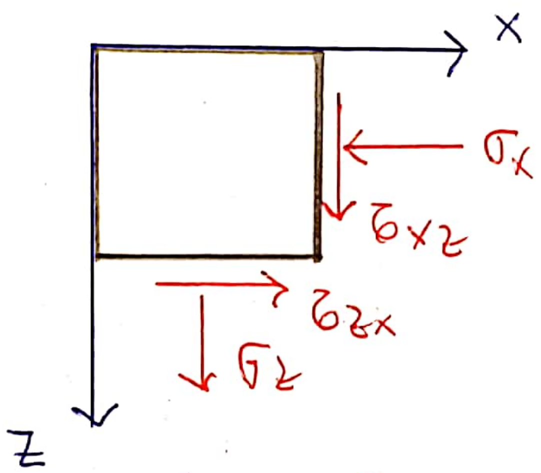


$\sigma^2 + \tau^2 = \rho^2$

EJ: EJE DIRECTOR O SOSTÉN → 'Y'

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

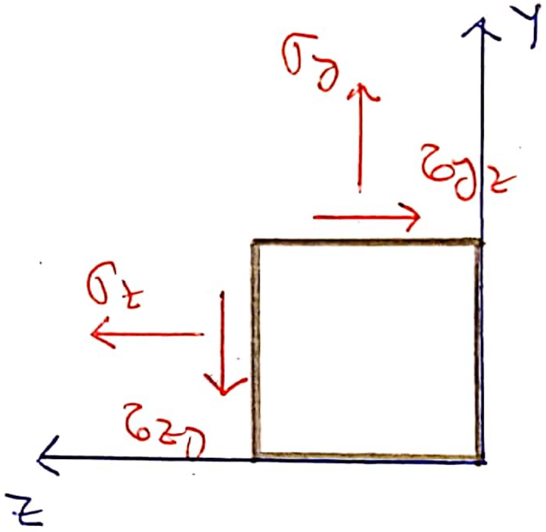




$l \neq 0 \,;\, m = 0 \,;\, n \neq 0$

EJ: EJE DIRECTOR O SOSTÉN → 'X'

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



$l = 0 \,;\, m \neq 0 \,;\, n \neq 0.$