ESTADO DE TENSIÓN:

1) → CONCEPTO DE TENSIÓN.

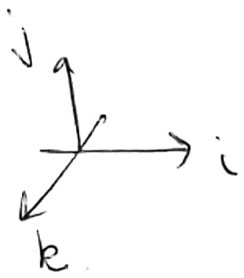
2) → VECTOR TENSIÓN.

$$\bar{\rho} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}.$$

3°) → $\bar{\rho}^{\pi}_{A} = \bar{t}^{\pi}_{A} = f$ (PLANO, PUNTO).

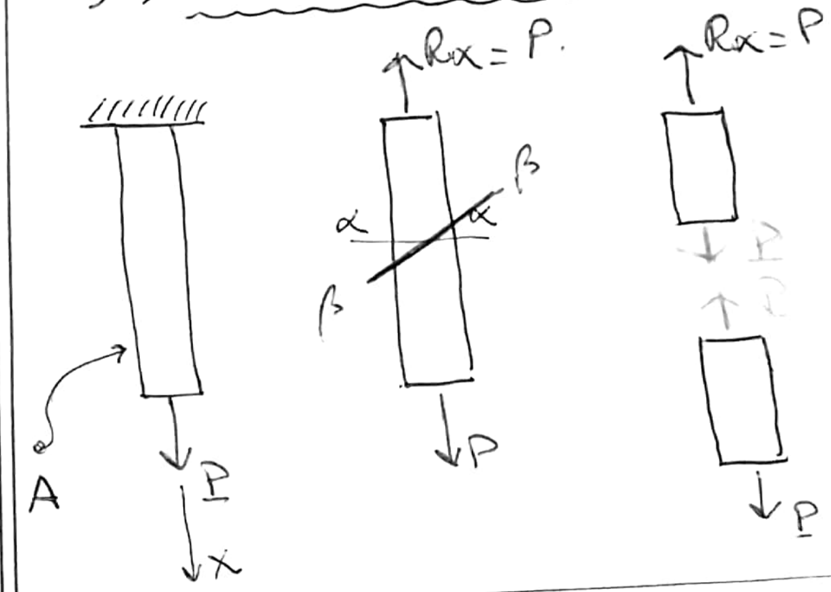
4°) → COMPONENTES DEL VECTOR TENSIÓN.

$$\bar{\rho} \to \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ii} \\ \left.\begin{array}{l} \tau_{ij} \\ \tau_{ik} \end{array}\right\} \tau_i \end{array} \right.$$



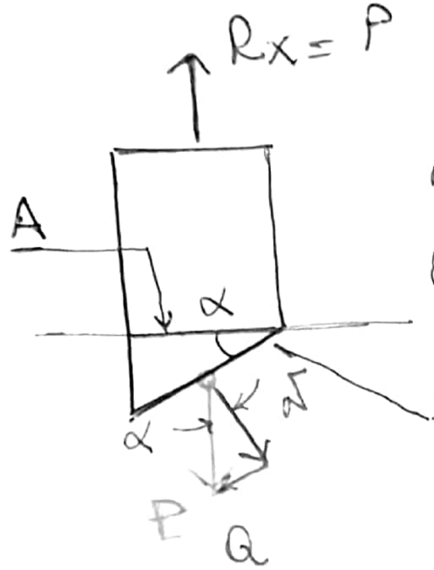
5°) → ESTADO DE TENSIÓN EN 1 PUNTO.

6°) → EJEMPLO INTUITIVO:



$$\boxed{\alpha \perp \text{EJE } 'x' \qquad \frac{P}{A} = \sigma_m \; ; \; \tau_m = 0.}$$

$$\rho_\alpha = \sqrt{\sigma_m^2 + \tau_m^2} = \frac{P}{A}$$



$N = P.\cos\alpha$

$Q = P.\text{sen}\,\alpha.$

$A' \rightarrow \frac{A}{A'} = \cos\alpha.$

$A' = \frac{A}{\cos\alpha}.$

$$\sigma'_m = \frac{N}{A'} = \frac{P.\cos\alpha}{\frac{A}{\cos\alpha}} = \underbrace{\frac{P}{A}}_{\sigma_m}.\cos^2\alpha.$$

$$\boxed{\sigma'_m = \sigma_m . \cos^2\alpha}$$

$$\tau'_m = \frac{Q}{A'} = \frac{P.\text{sen}\,\alpha}{\frac{A}{\cos\alpha}} = \frac{P}{A}.\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{\tau'_m = \sigma_m . \text{sen}\,\alpha\cos\alpha}$$

$$\rho^\beta_m = \rho'_m = \sqrt{(\sigma'_m)^2 + (\tau'_m)^2} =$$

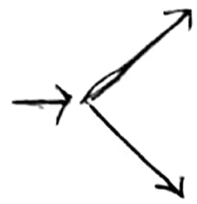
$$= \sqrt{\frac{P^2}{A^2}.(\cos^2\alpha)^2 + \frac{P^2}{A^2}.\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{\frac{P^2}{A^2}.\cos^2\alpha\,\underbrace{(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha)}_{=1}} = \frac{P}{A}\cos\alpha.$$

$$\boxed{\rho^\beta_m = \rho'_m = \frac{P}{A}\cos\alpha = \frac{P}{A/\cos\alpha} = \frac{P}{A'}}$$

7°) → CASO ELEMENTAL DE TENSIONES.

8°) → TIPOS DE FUERZAS:

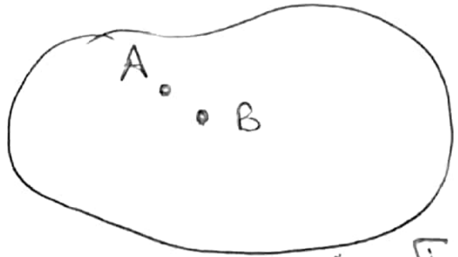


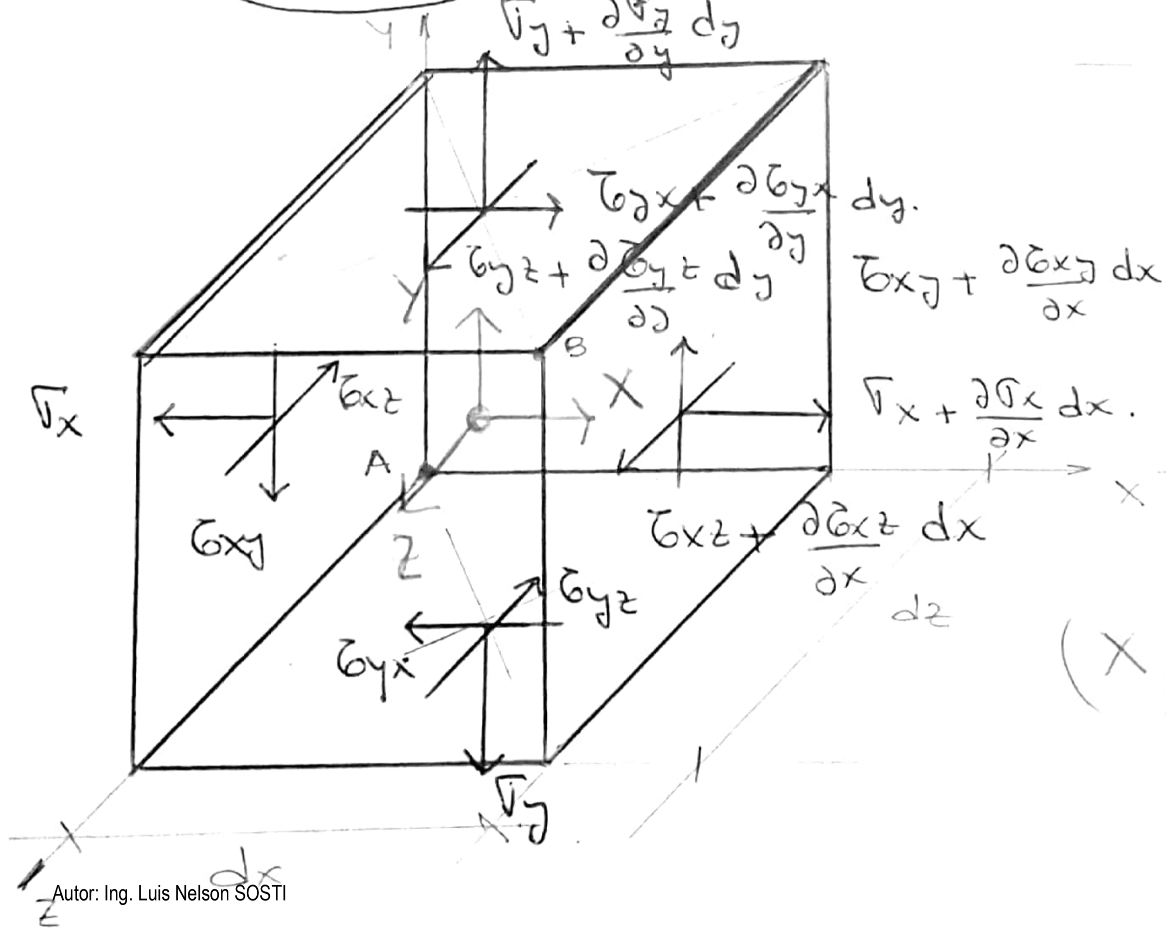
I) FZAS DE SUPERFICIE

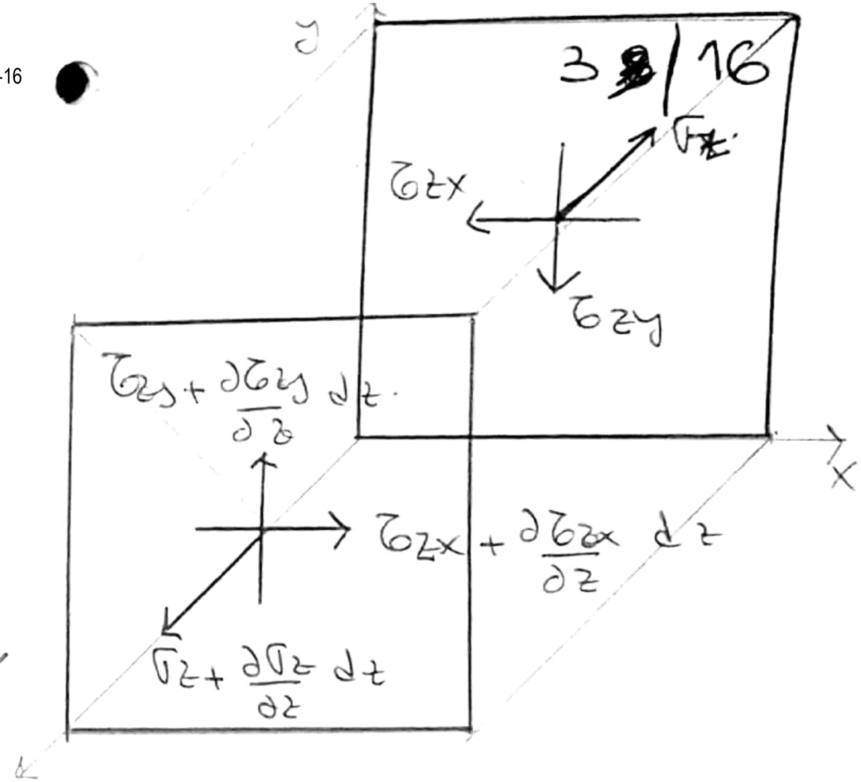
II) " DE MASA O VOLUMEN

3 ~~8~~/16

9°) → Tensiones en 2 ptos infinitamente próximos







σ → dirección de la normal al plano

τ_{ij} ← indica la dirección.

$(X; Y; Z)$ son fzas de masa o de volumen

→ PLANTEO EL EQUILIBRIO DEL CUBO ELEMENTAL → $\begin{cases} \bar{R}_R = 0 \\ \bar{M}_R = 0 \end{cases}$

CARA 'x' CARA 'y'

$$\boxed{1)\ \sum F_x = 0}\quad \left(\cancel{\sigma_x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) \cdot dy\,dz - \cancel{\sigma_x\, dy\, dz} + \left(\cancel{\tau_{yx}} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx\,dz -$$

$$- \cancel{\tau_{yx} \cdot dx\,dz} + \left(\cancel{\tau_{zx}} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx\,dy - \cancel{\tau_{zx}\, dx\, dy} + X\,dx\,dy\,dz = 0$$

CARA 'z'

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cancel{dx\,dy\,dz} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cancel{dx\,dy\,dz} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cancel{dx\,dy\,dz} + X \cancel{dx\,dy\,dz} = 0.$$

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0.}$$

1º EC. DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO.

$\left\{ \begin{array}{l} 2)\ \sum F_y = 0 \\ 3)\ \sum F_z = 0 \end{array} \right.$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

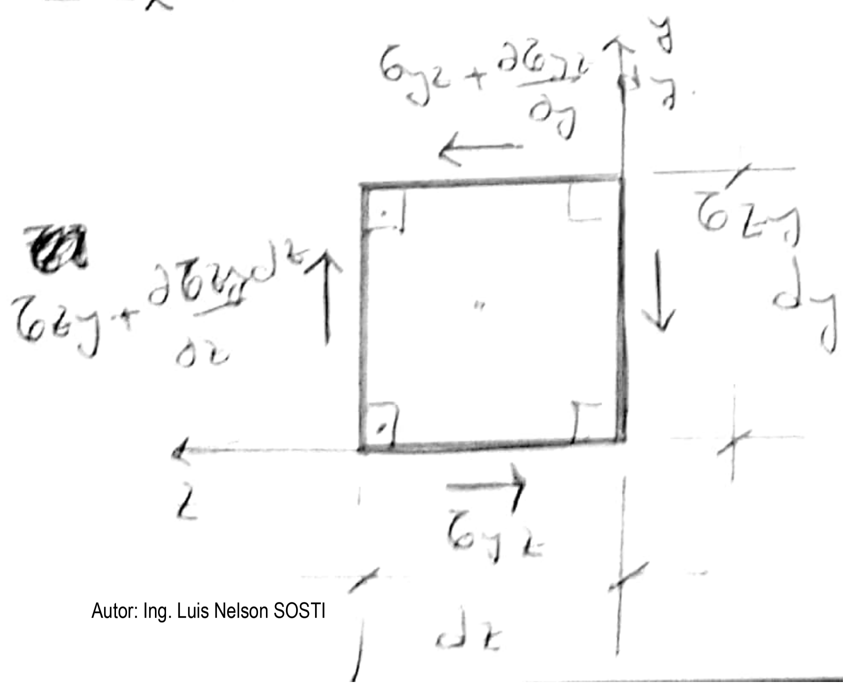
ECS DIF. DE EQUILIBRIO

3 ECS c/ 9 INCÓGNITAS

↓

HIPERESTÁTICO.

$\Sigma M_x = 0.$ RESPECTO DE UN PUNTO → EL CENTRO DEL CUBO ELEMENTAL.



$$\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dx\,dz \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yz}\, dx\,dz\, \frac{dy}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dx\,dy\,\frac{dz}{2} - \tau_{zy}\, dx\,dy\,\frac{dz}{2} = 0.$$

$$\tau_{yz}\, dx \frac{dy}{2}\, dz + \cancel{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot dx \frac{dy^2}{2}\, dz} + \tau_{yz}\, dx \frac{dy}{2}\, dz - \tau_{zy}\, dx\, dy \frac{dz}{2} -$$

Por diferenciales de O. S.

$$- \cancel{\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\, dx\, dy \frac{dz^2}{2}} - \tau_{zy}\, dx\, dy \frac{dz}{2} = 0.$$

$$\tau_{yz}\, \cancel{dx\, dy\, dz} - \tau_{zy}\, \cancel{dx\, dy\, \frac{dz}{2}} = 0 \rightarrow \boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

$$\Sigma M_y = 0 \rightarrow \boxed{\tau_{xz} = \tau_{zx}}$$

TEOREMA DE CAUCHY

$$\Sigma M_z = 0 \rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

3 ECS. DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO → 3 ECS + 6 INCÓGNITAS

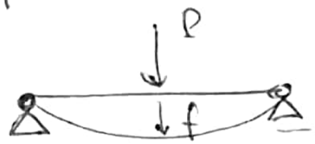
∴ PROBLEMA SIGUE SIENDO HIPERESTÁTICO

CÒMO SE RESUELVE EL PROBLEMA ???

1º) CAMINO : → EII { RdM, MS., MSD }

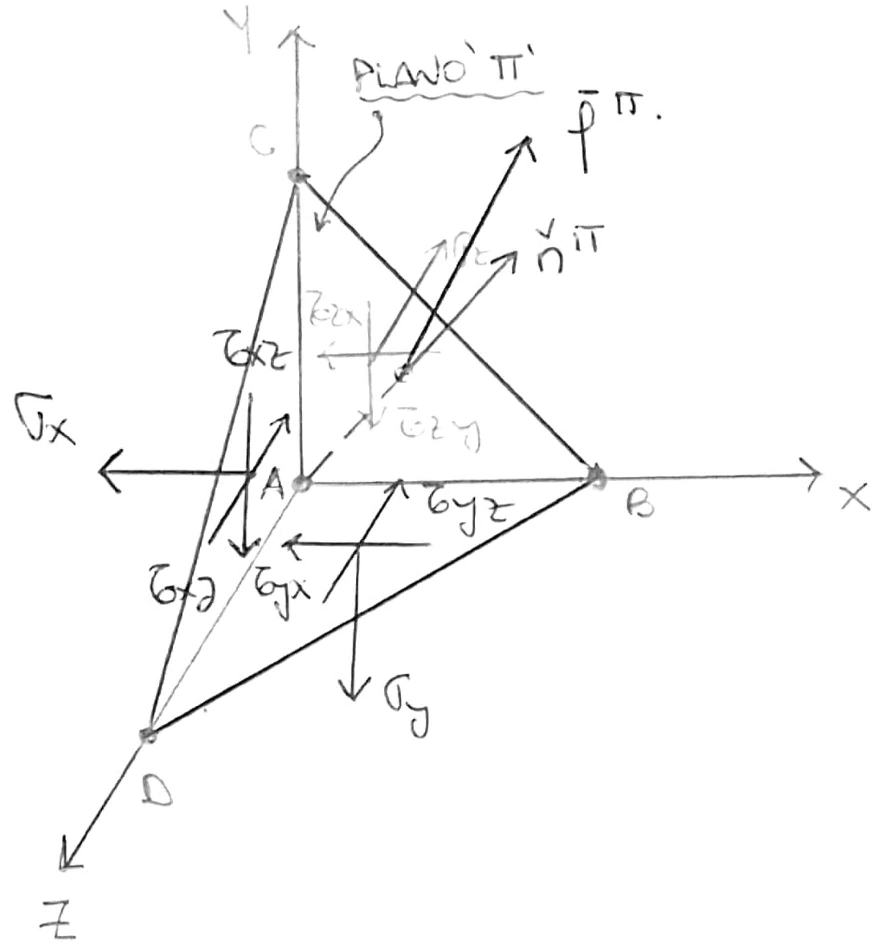
2º) CAMINO : → TME { TEORÍA MATEMÁTICA DE LA ELASTICIDAD } → ES DE APLICACIÓN ACOTADA → EIV

3 ECS
6 INCÓG. → { 15 ECS, 15 INCÓG. }



3º) CAMINO : → MÉTODOS NUMÉRICOS.

10°) TENSIONES EN UN PLANO CUALQUIERA:



A: PTO DADO ESTUDIO

$(0; X; Y; Z) \rightarrow 0 \equiv A$

- SE CONOCEN LOS VECTORES TENSIÓN ASOCIADOS A LOS PLANOS X, Y y Z; Y SUS COMPONENTES
- PLANO X' → ACD
- $\check{n}^{\pi}$ FORMA CON LOS EJES X; Y y Z LOS SIG. ÁNGULOS

$$
\begin{cases}
\alpha & \widehat{\check{n}^{\pi} x} \rightarrow \cos\alpha = l \\
\beta & \check{n}^{\pi} y \rightarrow \cos\beta = m \\
\gamma & \check{n}^{\pi} z \rightarrow \cos\gamma = n
\end{cases}
$$

SON LAS COMPONENTES DEL VERSOR $\check{n}^{\pi}$.

- LA FIGURA AQUÍ FORMADA:

  → TETRAEDRO ELEMENTAL.

- SUPONDREMOS QUE EL ÁREA $\overset{\triangle}{BCD} = 1$.

- LAS PROYECCIONES DE ESTA ÁREA SOBRE LOS PLANOS COORDENADOS NOS DAN:

  $\overset{\triangle}{ACD} \rightarrow$ normal 'x'

  $\overset{\triangle}{ABD} \rightarrow$ " 'y'

  $\overset{\triangle}{ABC} \rightarrow$ " 'z'

- $|\check{n}^{\pi}| = 1 = \sqrt{l^2+m^2+n^2} = \sqrt{1}$

ÁREA

$A_{\overset{\triangle}{ACD}} \rightarrow l$.

$A_{\overset{\triangle}{ABD}} \rightarrow m$

$A_{\overset{\triangle}{ABC}} \rightarrow n$

→ PLANTEO EL EQUILIBRIO DEL TETRAEDRO ELEMENTAL:

$\Sigma F_x = 0 \quad \rho^{\pi}_x \cdot 1 = \rho^{\pi} \cdot 1 \cdot (\cos \alpha \bar{\rho})$

$\rho^{\pi}_x \cdot 1 - \sigma_x \cdot l - \tau_{yx} \cdot m - \tau_{zx} \cdot n = 0.$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \rho^{\pi}_y \cdot 1 = \rho^{\pi} \cdot 1 \cdot (\cos \beta \bar{\rho})$

$\rho^{\pi}_y \cdot 1 - \tau_{xy} l - \sigma_x m - \tau_{zy} n = 0$

$\Sigma F_z = 0 \rightarrow \rho^{\pi}_z \cdot 1 = \rho^{\pi} \cdot 1 \cdot (\cos \gamma \bar{\rho})$

$\rho^{\pi}_z \cdot 1 - \tau_{xz} l - \tau_{yz} \cdot m - \sigma_z n = 0.$

NOTA:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \alpha_{\bar{\rho}} & \longrightarrow & \widehat{\rho^{\pi}, x} \\ \beta_{\rho} & \longrightarrow & \widehat{\rho^{\pi}, y} \\ \gamma_{\rho} & \longrightarrow & \widehat{\rho^{\pi}, z} \end{array}}$$

$$\begin{cases} \rho^{\pi}_{x} = \sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n \\ \rho^{\pi}_{y} = \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n \\ \rho^{\pi}_{z} = \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n \end{cases}$$

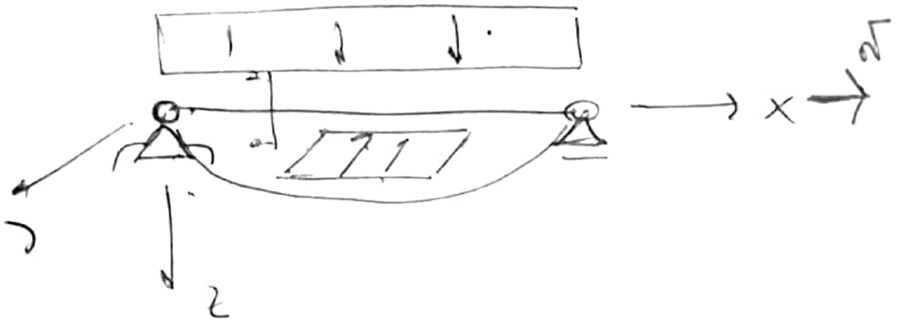
PLANO X PLANO Y PLANO Z

$$\begin{Bmatrix} \rho^{\pi}_{x} \\ \rho^{\pi}_{y} \\ \rho^{\pi}_{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

$$\underset{3\times1}{\left\{\bar{\rho}^{\pi}\right\}} = \underset{3\times3}{\left[T\,T\right]_{xyz}} \underset{3\times1}{\left\{\check{n}^{\pi}\right\}}$$

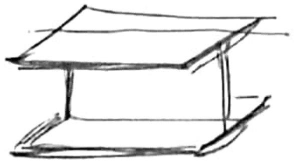
$$\left\{\bar{\sigma}^{\pi}\right\} = \underbrace{\left[\left\{\bar{\rho}^{\pi}\right\}^{T} \cdot \left\{\check{n}^{\pi}\right\}\right]}_{\text{PSEUDO - MODULO DEL VECTOR } \left\{\bar{\sigma}^{\pi}\right\}} \cdot \left\{\check{n}^{\pi}\right\}$$

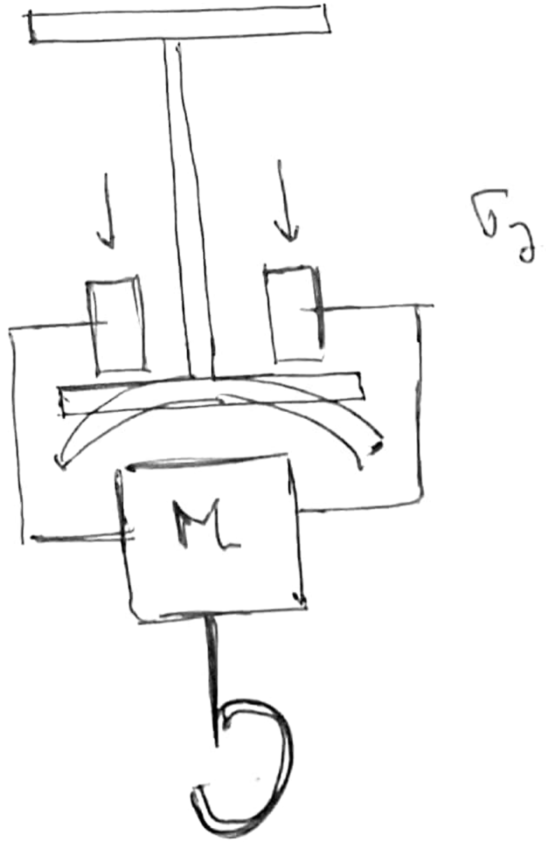
$$\left\{\bar{\tau}^{\pi}\right\} = \left\{\bar{\rho}^{\pi}\right\} - \left\{\bar{\sigma}^{\pi}\right\}$$



FCO c/ Q_y y Q_z.

$\hookrightarrow \sigma_x$.





11°) ~~Clasificación~~ y tipos de estados de tensión:

I) Triple - Espacial o Triaxial

II) Doble - Plano o Biaxial.

III) Simple - Lineal o Uniaxial.

12°) PLANOS - DIRECCIONES Y TENSIONES PRINCIPALES:

→ **DEFINICIÓN DE TENSIÓN PRINCIPAL**

- I) → $\bar{\rho}$ ES PPAL CUANDO TIENE LA DIRECCIÓN DEL VERSOR NORMAL AL PLANO, EN EL CUAL ACTÚA.
- II) → $\bar{\rho}$ ES PPAL CUANDO SU COMPONENTE TANGENCIAL ES NULA $\bar{\tau} = 0$

→ PLANO PPAL ⟶ DIRECCIÓN PPAL.

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l} \rho_x = \sigma_{pi} \cdot l_{pi} = \sigma_{pi,x} = \rho_{pi} \cdot l_{pi} \\ \rho_y = \sigma_{pi} \cdot m_{pi} = \sigma_{pi,y} = \rho_{pi} \cdot m_{pi} \\ \rho_z = \sigma_{pi} \cdot n_{pi} = \sigma_{pi,z} = \rho_{pi} \cdot n_{pi} \end{array}\right\}}_{\{\bar{\rho}_{pi}\}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{pi} \\ m_{pi} \\ n_{pi} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\rho}_{pi}\} = [\sigma T] \cdot \{\check{n}_{pi}\}$$

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_i) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_i) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ [T T] - \sigma_i [I] \right\} \{ \breve{n}_i \} = \{ 0 \} \rightarrow$$ $\boxed{\text{SISTEMA DE 3 ECS HOMOGÉNEAS.}}$

2 POSIBLES SOLUCIONES: I) $\rightarrow$ SOLUCIÓN TRIVIAL $\rightarrow l_i = m_i = n_i = 0$

II) $\left| [T T] - \sigma_i [I] \right| = 0.$

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE DE SOLUCIÓN DEL PROBLEMA.

- EL DESARROLLO DEL DETERMINANTE:

$$\boxed{\sigma_i^3 - I_1\sigma_i^2 + I_2\sigma_i - I_3 = 0.}$$

EC CÚBICA QUE TIENE 3 RAÍCES.

I_1 = TRAZA $[TT]$ = $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

I_2 = $\sum$ MENORES COMPLEMENTARIOS DE LA DIAGONAL PPAL DEL $[TT]$

$MC_{a11} = \sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2$

$MC_{a22} = \sigma_x\sigma_z - \tau_{xz}^2$

$MC_{a33} = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

I_3 = DET $[TT]$

$\rightarrow$ EC. CARACTERÍSTICA DE LAS TENSIONES PPALES

y

EC. DE LAGRANGE.

- UNA VEZ CONOCIDAS LAS 3 TENS. PRALES SE TIENEN QUE CONOCER LAS 3 DIRECCIONES PRALES.

- $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

  $+20 > -50 > -100$

→ LAS TENSIONES PRALES SON LOS AUTOVALORES DEL. [TT]

- $$\begin{bmatrix} (\sigma_x-\sigma_1) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y-\sigma_1) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z-\sigma_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

→ LAS DIRECCIONES PRALES SON LOS AUTOVECTORES DEL [TT] ASOCIADAS A CADA AUTOVALOR.

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

13°) PROPIEDADES:

I) LAS 3 RAÍCES DE LA EC. CARACTERÍSTICA SON "REALES".

II) LOS 2 COEF. $(I_1$ e $I_2)$ Y EL TÉRMINO INDEPENDIENTE (I_3) SON.
"INVARIANTES" → NO DEPENDEN DEL $[TT]$ → NO DEPENDEN
DE LA TERNA.

III) LAS 3 DIRECCIONES PPALES SON ORTOGONALES.

14°) CLASIFICACIÓN DE LOS ESTADOS TENSIONALES UTILIZANDO LOS INVARIANTES

(I) SI $I_3 \neq 0$ → ET ES TRIPLE → COND NEC Y SUFICIENTE.

(II) SI $\underset{\text{NEC}}{I_3 = 0}$ Y $\underset{\text{SUF.}}{I_2 \neq 0}$ → EL ET ES DOBLE.

(III) SI $\underset{\text{NEC.}}{I_3 = I_2 = 0}$ e $\underset{\text{SUF}}{I_1 \neq 0}$ → EL ET ES SIMPLE

- EC. CARACTERÍSTICA DE LAS TENSIONES PPALES

9

↳ COMPLETA.

↳ C/ INVARIANTES.

EC. DE LAGRANGE.

$$\boxed{\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 + I_2 \sigma_i - I_3 = 0}$$

↳ EC. CÚBICA.

13°) → PROPIEDADES:

I) LAS 3 RAÍCES SON REALES.

II) LOS 2 COEFICIENTES Y EL TÉRMINO INDEP. SON "INVARIANTES".

III) LAS 3 DIRECCIONES PPALES SON ORTOGONALES.

I) → INVARIANCIA DE LOS COEF. DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE. 10

- LAS TENS. PPALES SE CORRESPONDEN A UN HECHO FÍSICO;
- ESTE HECHO ES:
  - ↳ VECTOR TENSIÓN SE CORRESPONDE C/ LA NORMAL AL PLANO Y CON LA TENSIÓN NORMAL;
- AL CONSIDERAR OTRA TERNA; LO ANTERIOR SEGUIRÁ VALIENDO, ES DECIR, EL HECHO FÍSICO ~~SEGUIRÁ~~ SE MANTENDRÁ ~~...~~ ASÍ SEGURAMENTE, LAS COMPONENTES AL ESTAR REFERIDAS A OTRA TERNA CAMBIARÁN;
- LUEGO, AUNQUE SE CAMBIE LA TERNA → LAS TENS. PPALES SERÁN LAS MISMAS → POR LO TANTO, LOS COEF. DE LA EC. CARACTERÍSTICA NO PODRÁN CAMBIAR;
- EN CONSECUENCIA; LOS INVARIANTES SON FUNCIÓN DE LAS TENS. PPALES.

III) → LAS 3 RAÍCES SON REALES: 11

- Partiendo de la ec. característica de las tens. ppales:

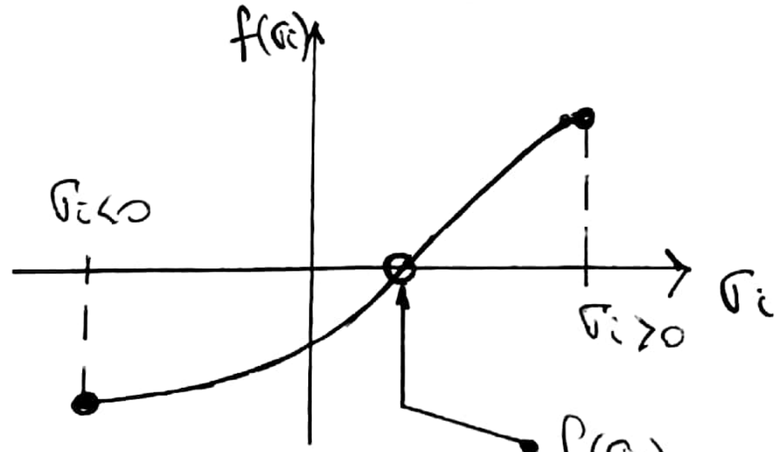
$$\sigma_i^3 - I_1\,\sigma_i^2 + I_2\,\sigma_i - I_3 = 0.$$

- Si se elige un valor de $\sigma_i > 0$ y muy grande $\rightarrow f(\sigma_i) > 0$.

- Idem si $\sigma_i < 0$ y muy grande $\rightarrow f(\sigma_i) < 0$

- Es decir: $f(\sigma_i) = \sigma_i^3 - I_1\,\sigma_i^2 + I_2\,\sigma_i - I_3$

- Para que esto ocurra, $f(\sigma_i)$ cortará al eje de abscisas en algún pto.



$f(\sigma_i) = 0 \rightarrow$ 1° raíz.

- Luego σ_i es real.

- Veamos ahora si los 2 restantes son también reales:

- Para esto, se considera un nuevo sist. de ejes coordenados donde:

(x', y', z') donde $z' \equiv \sigma_i \equiv \sigma_3$. Es decir z' es dirección pral.

Si esto es así:

$$\tau_{z'x'} = \tau_{z'y'} = 0.$$

- Luego:

$$\begin{cases} (\sigma_{x'} - \sigma_i)\, l + \tau_{y'x'}\, m + 0\, n = 0 \\ \tau_{x'y'}\, l + (\sigma_{y'} - \sigma_i)\, m + 0\, n = 0 \\ 0 + 0 + (\sigma_{z'} - \sigma_i)\, n = 0 \end{cases}$$

- La solución de este sistema de ecs p/ que sea distinta de la trivial es que este determinante sea $= 0$;

- Se desarrolla el determinante:

$$(\sigma_{z'} - \sigma_i)\left[(\sigma_{x'} - \sigma_i)(\sigma_{y'} - \sigma_i) - \tau_{x'y'}^{2}\right] = 0$$

$$(\sigma_{z'} - \sigma_c)\left[\sigma_i^2 - (\sigma_{x'} + \sigma_{y'})\,\sigma_i + (\sigma_{x'}\sigma_{y'} - \tau_{x'y'}^2)\right] = 0 \qquad 13$$

- Si $\sigma_c = \sigma_{z'} = \sigma_3$ ya se sabía;
- Dentro [ ] tendrá como raíces:

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_{x'} + \sigma_{y'})}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{x'} + \sigma_{y'})^2 - 4(\sigma_{x'}\sigma_{y'} - \tau_{x'y'}^2)}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x'} + \sigma_{y'}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{x'}^2 + \sigma_{y'}^2 + 2\sigma_{x'}\sigma_{y'} - 4\sigma_{x'}\sigma_{y'} + 4\tau_{x'y'}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x'} + \sigma_{y'}}{2} \pm \sqrt{(\sigma_{x'}^2 + \sigma_{y'}^2 - 2\sigma_{x'}\sigma_{y'}) + 4\tau_{x'y'}^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x'} + \sigma_{y'}}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\sigma_{x'} - \sigma_{y'}}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2}_{> 0.}}$$

Luego σ_1 y σ_2 son siempre reales.

III) <u>LAS DIRECCIONES PPALES SON ORTOGONALES ENTRE SÍ.</u>

- SEAN 2 DIRECCIONES PPALES JUNTO A SUS TENSIONES, TAMBIÉN, PPALES:

$$\begin{cases} \sigma_r \rightarrow \breve{n}_r \\ \sigma_s \rightarrow n_s \end{cases}$$

- PARTIMOS DE QUE $\boxed{\sigma_r \neq \sigma_s}$

- $\{[TT] - \sigma_r [I]\} \cdot \{\breve{n}_r\} = 0.$ MULTIPLICO POR $\{\breve{n}_s\}$

$\{[TT] - \sigma_s [I]\} \cdot \{\breve{n}_s\} = 0$ " " $\{\breve{n}_r\}$

- $$\begin{cases} [TT]\, \breve{n}_r \cdot \breve{n}_s - \sigma_r \cdot [I] \cdot \breve{n}_r \cdot \breve{n}_s = 0 & (I) \\ [TT]\, n_s \cdot n_r - \sigma_s [I] \cdot \breve{n}_s \cdot \breve{n}_r = 0. & (II) \end{cases}$$

- SE RESTA M.A M (II) - (I)

$$\breve{n}_r \cdot \breve{n}_s = \breve{n}_s \cdot \breve{n}_r$$

$$\sigma_r [I]\, \breve{n}_r \cdot \breve{n}_s - \sigma_s [I]\, \breve{n}_s \cdot \breve{n}_r = 0.$$

$$\underbrace{\{\sigma_r [I] - \sigma_s [I]\}}_{\neq 0} \cdot \breve{n}_r \cdot n_s = 0$$

95

→ $\sigma_r[I] - \sigma_s[I] \neq 0$ porque

se partió de que $\sigma_r \neq \sigma_s$

→ Luego la única posibilidad es que

$\breve{n}_r \cdot \breve{n}_s = 0$ y esto se da cuando

$\breve{n}_r \perp \breve{n}_s$

→ Como 'r' y 's' varían de 1 a 3 → las

direcciones ppales son $\perp$ entre sí.

→ $\underline{\text{Si } \sigma_r = \sigma_s}$ → 2 tens ppales iguales

$$\underbrace{\{\sigma_r[I] - \sigma_s[I]\}}_{\substack{=0 \\ \text{por hipótesis}}} \underbrace{\breve{n}_r \cdot \breve{n}_s}_{} = 0$$

↓

Existen infinitas combinaciones que las satisfacen y que no necesitan ser $\perp$. Cualquier par de direcciones las satisfacen y son ppales.

Se tiene 1 plano donde todas las direcciones son ppales. Todas las direcc. ppales están contenidas en el plano formado por 'r' y 's'

→ Si $\sigma_r = \sigma_s = \sigma_t$ → 3 TENS PPALES IGUALES.

↳ TODAS LAS DIRECCIONES SON PRINCIPALES.

↳ EJEMPLO : → EQUITRACCIÓN

→ EQUICOMPRESIÓN.

- 14º) → $[TT]$ EXPRESADO EN LA TERNA PRINCIPAL.

$$[TT]_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

- 15º) → INVARIANTES TENSORIALES EN FUNCIÓN DE LAS TENSIONES PPALES

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

- Si $I_3 = 0 \rightarrow$ como mínimo alguna de las $\sigma_i = 0$

17

Suponiendo que $\sigma_3 = 0$.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 L \\ \sigma_2 m \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{siempre en el plano}$$

Si $\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \rightarrow I_3 = 0 \wedge I_2 = 0$.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{siempre en la dirección } \underline{\underline{1}}$$

- Luego

$\hookrightarrow$ si $I_3 = 0 \wedge I_2 \neq 0$ Plano

$\hookrightarrow$ si $I_2 = I_3 \wedge I_1 \neq 0$ Simple

$\hookrightarrow$ si $I_3 \neq 0$ Triple.

18|

16º) → TENSOR ESFÉRICO Y TENSOR DESVIADOR.

17º) → TENSIONES OCTAÉDRICAS.

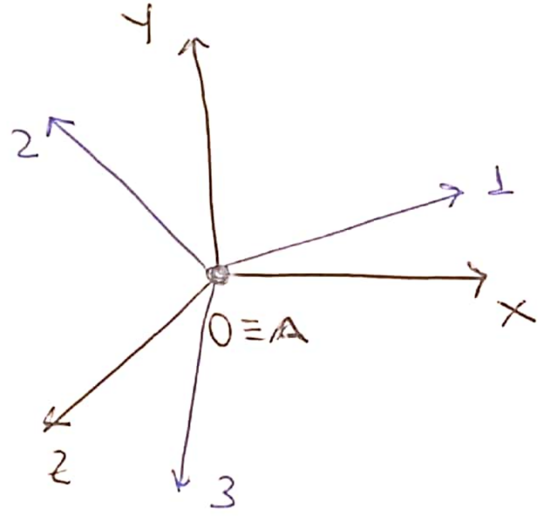
18º) → CIRCUNFERENCIA DE MOHR

↳ ESTADO TRIPLE

↳ ESTADO DOBLE.

1|12

15) $[TT]$ EN LA TERNA PRINCIPAL:



$$[TT]_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

16) INVARIANTES EN FUNCIÓN DE LAS TENSIONES PPALES

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \\ I_2 = \sigma_1 . \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3. \\ I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{cases}$$

$\boxed{\sigma_3 = 0.}$

$$[TT] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\bar{\rho}^{\pi}_{123}\right] \rightarrow \left\{\check{n}^{\pi}\right\} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}.$$

$$\left\{\bar{\rho}^{\pi}\right\} = [TT]\left\{\check{n}^{\pi}\right\}.$$

$$\begin{Bmatrix} \rho^{\pi}_1 \\ \rho^{\pi}_2 \\ \rho^{\pi}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 l. \\ \sigma_2 m \\ 0 \end{Bmatrix}$$

SIEMPRE EN 1 PLANO → $\boxed{12}$

$$\boxed{\sigma_2 = \sigma_3 = 0}$$

$$\begin{Bmatrix} \rho_1^{\pi} \\ \rho_2^{\pi} \\ \rho_3^{\pi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 l \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

→ siempre en 1 dirección

ESPACIAL O TRIPLE $I_3 \neq 0$. Cnj s.

PLANO O DOBLE $\begin{cases} I_3 = 0. & \text{Cnec.} \\ I_2 \neq 0 & \text{C suf.} \end{cases}$

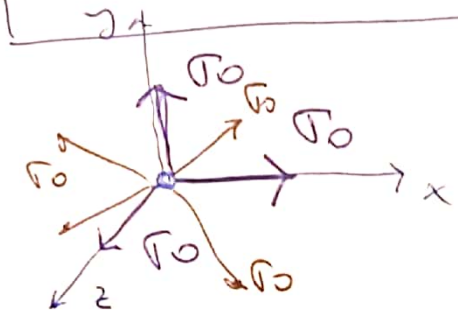
SIMPLE O UNIAXIAL $\begin{cases} I_3 = I_2 = 0 & \text{Cnec.} \\ I_1 \neq 0 & \text{Csuf.} \end{cases}$

17) TENSORES ESFÉRICO y DESVIADOR:

$$[TT] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}}_{\text{TENSOR ESFÉRICO}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}}_{\text{TENSOR DESVIADOR.}}$$

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}}$$



$$\begin{Bmatrix} p_x^\pi \\ p_y^\pi \\ p_z^\pi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_0 l \\ \sigma_0 m \\ \sigma_0 n \end{Bmatrix}$$

$$|\bar{p}^\pi| = \sqrt{(\sigma_0 l)^2 + (\sigma_0 m)^2 + (\sigma_0 n)^2} =$$

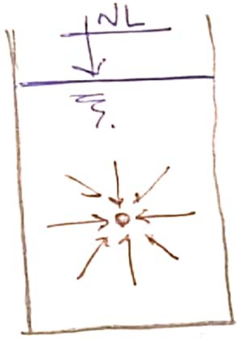
$$= \sqrt{\sigma_0^2 \underbrace{(l^2 + m^2 + n^2)}_{=1}} = \sigma_0$$

→ LA EXISTENCIA DEL T. ESFÉRICO

→ IMPLICA CAMBIOS DE VOLUMEN EN EL PUNTO A SER ANALIZADO.

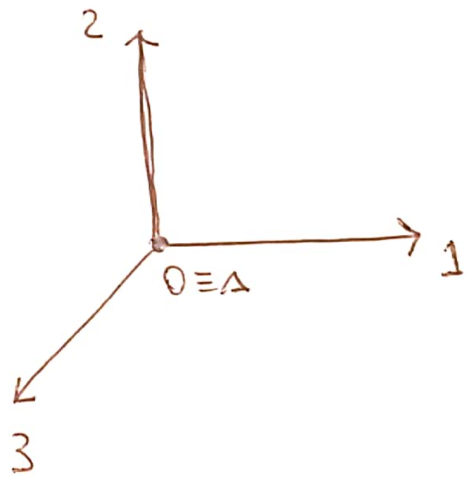
→ LA EXISTENCIA DEL T. DESVIADOR

→ IMPLICA CAMBIOS DE FORMA.



18) TENSIONES OCTAÉDRICAS.

$$[T]_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

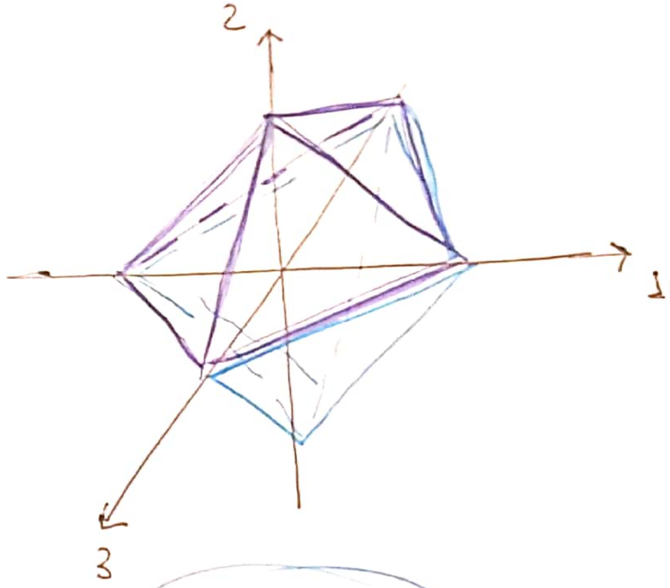


→ PLANO → CUYA NORMAL FORMA LOS MISMOS ÁNGULOS CON LOS 3 EJES PPALES

4) 12

$\alpha = \beta = \gamma \rightarrow$ SON IGUALES.

$l = m = n = c$



8 PLANOS.

$$\begin{Bmatrix} \rho_{oct,1} \\ \rho_{oct,2} \\ \rho_{oct,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ c \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 c \\ \sigma_2 c \\ \sigma_3 c \end{Bmatrix}$$

$$|\bar{\rho}_{oct}| = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \cdot c^2} = c\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$$

$\bar{\rho}_{oct.}$

$\bar{\sigma}_{oct}$

$\bar{\tau}_{oct}$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 3c^2 = 1$$

$$\boxed{c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

$$\boxed{c = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

1|4

ESTADO PLANO

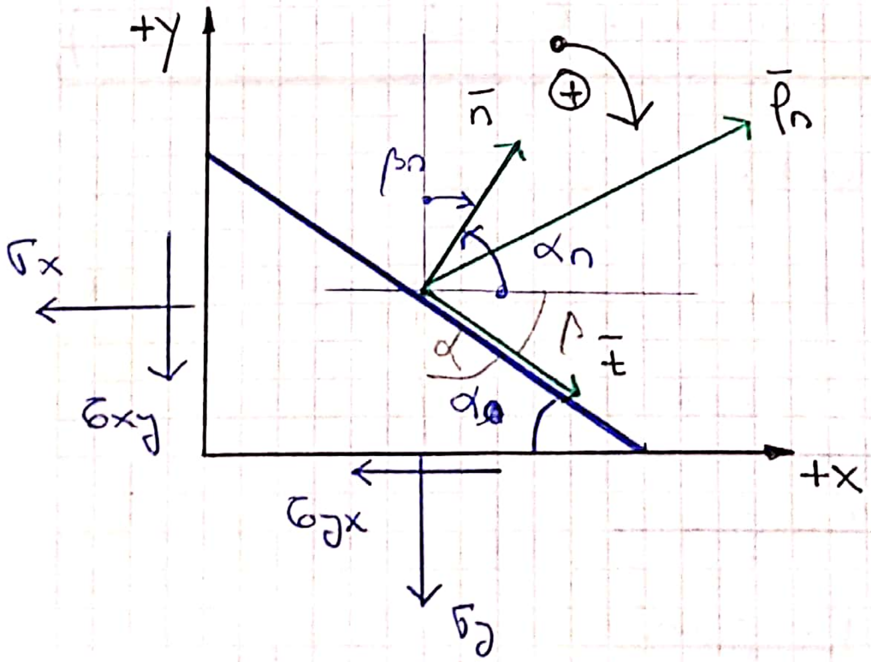
$$\bar{n} = \cos\alpha\,.\,\bar{e}_x + \operatorname{sen}\alpha\,.\,\bar{e}_y + 0\,\bar{e}_z$$

$$\begin{Bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \underset{\tau_{yx}}{\tau_{xy}} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_{nx} = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx}\,.\,\operatorname{sen}\alpha \\ p_{ny} = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y\,.\,\operatorname{sen}\alpha \\ p_{nz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_n = \bar{p}_n \cdot \bar{n} & \rightarrow \quad \bar{\sigma}_n = (\bar{p}_n \cdot \bar{n}) \cdot \bar{n} \\ \tau_n = \bar{p}_n \cdot \bar{t} & \rightarrow \quad \bar{\tau}_n = (\bar{p}_n \cdot \bar{t}) \cdot \bar{t}\,. \end{cases}$$

$$\bar{t} = \operatorname{sen}\alpha\,.\,\bar{e}_x - \cos\alpha\,.\,\bar{e}_y + 0\,.\,\bar{e}_z\,.$$



- NUEVA CONVENCIÓN DE SIGNOS PARA τ.
- $\sigma_x > \sigma_y$
- $\tau_{xy} < 0$

  $\tau_{yx} > 0$

$$\sigma_n = \bar{\rho}_n \cdot \bar{n} = (\sigma_x \cos\alpha \bar{e}_x + \tau_{yx} \operatorname{sen}\alpha \, \bar{e}_y) \cdot (\cos\alpha \cdot \bar{e}_x + \operatorname{sen}\alpha \, \bar{e}_y).$$

$$\cancel{\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha}$$

$$\sigma_n = \bar{\rho}_n \cdot \bar{n} = \left[(\sigma_x \cos\alpha_n + \tau_{yx} \operatorname{sen}\alpha_n) \bar{e}_x + (\tau_{xy} \cos\alpha_n + \sigma_y \cdot \operatorname{sen}\alpha_n) \bar{e}_y \right] \cdot (\cos\alpha_n \cdot \bar{e}_x + \operatorname{sen}\alpha_n \, \bar{e}_y)$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha_n + \tau_{yx} \cdot \operatorname{sen}\alpha_n \cos\alpha_n + \tau_{xy} \cdot \operatorname{sen}\alpha_n \cos\alpha_n + \sigma_y \cdot \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\boxed{\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha_n + \sigma_y \cdot \operatorname{sen}^2\alpha_n + 2\tau_{yx} \cdot \operatorname{sen}\alpha_n \cos\alpha_n .}$$

$$\tau_n = \bar{\rho}_n \cdot \bar{t} = \left[(\sigma_x \cos\alpha_n + \tau_{yx} \operatorname{sen}\alpha_n) \bar{e}_x + (\tau_{xy} \cdot \cos\alpha_n + \sigma_y \operatorname{sen}\alpha_n) \bar{e}_y \right] \cdot (\operatorname{sen}\alpha_n \, \bar{e}_x - \cos\alpha_n \, \bar{e}_y)$$

$$\tau_n = \sigma_x \operatorname{sen}\alpha_n \cos\alpha_n + \tau_{yx} \operatorname{sen}^2\alpha_n - \tau_{xy} \cos^2\alpha_n - \sigma_y \operatorname{sen}\alpha_n \cos\alpha_n$$

$$\boxed{\tau_n = (\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen}\alpha_n \cos\alpha_n - \tau_{yx} (\cos^2\alpha_n - \operatorname{sen}^2\alpha_n)}$$

Teniendo en cuenta que:

I) $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$

II) $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha$

III) $2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$.

smom $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

rmem $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{yx}\,\text{sen}\,2\alpha .$$

$$\tau_n = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{sen}\,2\alpha - \tau_{yx}\cos 2\alpha$$

- Si el plano caracterizado por $\bar{n}$ es principal:

$$\tau_A = 0 = \tau_P = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{sen}\,2\alpha - \tau_{yx}\cos 2\alpha = 0$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\text{sen}\,2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Solución: $\begin{cases} 2\alpha_1 \\ 2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \pi \rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \alpha} = 0 = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{sen}\,2\alpha + 2\tau_{yx}\cos 2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\text{sen}\,2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} .$$

→ Conclusión: → Los planos con valores máximo y mínimo de la tensión normal coinciden con los planos principales.

REESCRIBIENDO LAS EXPRESIONES DE σ_n y τ_n:

$$\sigma_n - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\alpha + \tau_{yx} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\tau_n = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \operatorname{sen} 2\alpha - \tau_{yx} \cdot \cos 2\alpha .$$

SE ELEVAN AMBAS AL CUADRADO Y SE SUMAN MIEMBRO A MIEMBRO:

$$\tau_n^2 + \left[\sigma_n - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2$$

$$(y - y_c)^2 + (x - x_c)^2 = R^2 .$$

$$C = \left[\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) ; 0\right]$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}$$

Tensor de Tensiones:

Las expresiones (2.1) permiten definir la tensión en un punto asociada a cualquier plano π (de normal $\breve{e}$ o $\breve{n}$).

Lo anterior escrito en forma matricial queda de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}}_{3\times1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}}_{3\times3} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}}_{3\times1}$$

Vector. Matriz de los coeficientes de los cosenos directores.

↳ Tensor de Tensiones. → nuevo tipo de magnitud. Se requieren mayor cantidad de elementos para definirlo, por eso aparece.

$$[T_T] \equiv [T].$$

A continuación, se harán algunas consideraciones relativas a la aplicación de este tensor que servirán de base para los desarrollos posteriores.

1) → Sean 2 estados de tensión actuantes sobre un punto y referidos ambos al mismo sistema de coordenadas.
Las tensiones resultantes se obtienen como suma geométrica de las tensiones correspondientes a los estados que se suman. Es decir, se suman algebraicamente las componentes.

Es idéntico a la suma de matrices.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$$

$$[T_{T1}] \quad + \quad [T_{T2}] \quad = \quad [T_{T1+2}].$$

2) En forma similar, y basándonos en lo anterior es posible descomponer a un tensor (o matriz) en la suma de otros 2 tensores.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) & a_{22} & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(a_{12}-a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13}-a_{31}) \\ -\frac{1}{2}(a_{12}-a_{21}) & 0 & \frac{1}{2}(a_{23}-a_{32}) \\ -\frac{1}{2}(a_{13}-a_{31}) & -\frac{1}{2}(a_{23}-a_{32}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \underbrace{[S_A]}_{\text{Tensor simétrico}} + \underbrace{[A_A]}_{\text{Tensor Antisimétrico.}} = [T_T] = [T_{TS}] + [T_{TA}]$$

3) → Otra posible descomposición es la siguiente:

Para ello, llamamos a_0 al promedio de los elementos de la diagonal principal:

$$a_0 = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3}$$

La descomposición sería la siguiente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}}_{\text{TENSOR ESFÉRICO}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}-a_0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-a_0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-a_0 \end{bmatrix}}_{\text{TENSOR DESVIADOR.}}$$

4) → Trabajamos con el tensor de tensiones. Si esta referido a una terna cartesiana (x, y, z), estará dado de la siguiente forma:

$$[T_T]_{xyz} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Si la terna elegida está constituida por las direcciones principales:

$$[T_T]_{123} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Descomponemos al tensor $[T_T]_{xyz}$ en uno esférico y otro desviador:

$$[T_T]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_o & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_o & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_o \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\sigma_o = \frac{1}{3}\underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{I_1 = Tr[T_T]} = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3}\underbrace{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}_{I_1}.$$

IMP: El tensor esférico corresponde a un estado esférico de tensión.
Esto es así por cuanto las componentes de tensión no cambian para una rotación cualquiera de los ejes.

El 2º tensor, el tensor desviador, tendrá la siguiente forma cuando los ejes coordenados coinciden con las direcciones principales:

$$[T_D]_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_o \end{bmatrix}$$

Tensiones Octaédricas:

DEF.: Se denominan tensiones octaédricas a las tensiones correspondientes a planos que forman los mismos ángulos con las direcciones principales.

- Si esto es así, un plano ~~que forma~~ cuya normal forma el mismo ángulo con los 3 ejes principales, se tendrá que:

$$\begin{cases} \alpha = \widehat{1n} \\ \beta = \widehat{2n} \\ \gamma = \widehat{3n} \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta = \gamma \qquad (1)$$

con lo cual $\ell = m = n = c$ (2)

y la expresión que vincula a los cosenos directores quedará:

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1. \qquad (3)$$

$$c^2 + c^2 + c^2 = 1$$

$$3c^2 = 1$$

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \underline{\underline{c = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}}} \qquad (4)$$

y los ángulos serán:

$$\underline{\underline{\alpha = \beta = \gamma = 54{,}736^{\circ} = 54^{\circ}\,44'\,8{,}2''.}} \qquad (5)$$

- La tensión en un plano de esta naturaleza está dada por:

$$\{\rho\} = [T_T]_{123} \cdot \{\bar{n}\} \qquad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_1 = l \\ n_2 = m \\ n_3 = n \end{Bmatrix} = \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \sigma_1 n_1 = \sigma_1 l = \sigma_1 c. \\ \rho_2 = \sigma_2 n_2 = \sigma_2 m = \sigma_2 c \\ \rho_3 = \sigma_3 n_3 = \sigma_3 n = \sigma_3 c \end{cases} \qquad (8)$$

$$\rho^2 = |\bar{\rho}|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2$$

$$\rho^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)\, c^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\rho^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} \qquad (9).$$

~~Tensión Normal:~~

$$\bar{\rho} = \sigma_1 c\,\check{1} + \sigma_2 c\,\check{2} + \sigma_3 c\,\check{3}. \qquad (10)$$

- Tensión Normal:

$$\sigma = \bar{\rho} \cdot \bar{n} = (\sigma_1 l, \sigma_2 m, \sigma_3 n) \cdot (l, m, n) \qquad (11)$$

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \sigma_1 c^2 + \sigma_2 c^2 + \sigma_3 c^2$$

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\, c^2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \qquad (12)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma \cdot \bar{n} = (\bar{\rho} \cdot \bar{n}) \cdot \bar{n} = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right) \cdot (l, m, n)$$

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right) c\,\check{1} + \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right) c\,\check{2} + \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right) c\,\check{3}$$

$$\bar{\sigma} = (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\frac{\sqrt{3}}{9}\,\check{1} + (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\frac{\sqrt{3}}{9}\,\check{2} + (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\frac{\sqrt{3}}{9}\,\check{3} \,. \qquad (13)$$

- Tensión Tangencial:

$$\tau^2 = \rho^2 - \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{3} - \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right)^2$$

$$\tau^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3)$$

$$\tau^2 = \frac{3}{9}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2\sigma_1\sigma_2+2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3) \,.$$

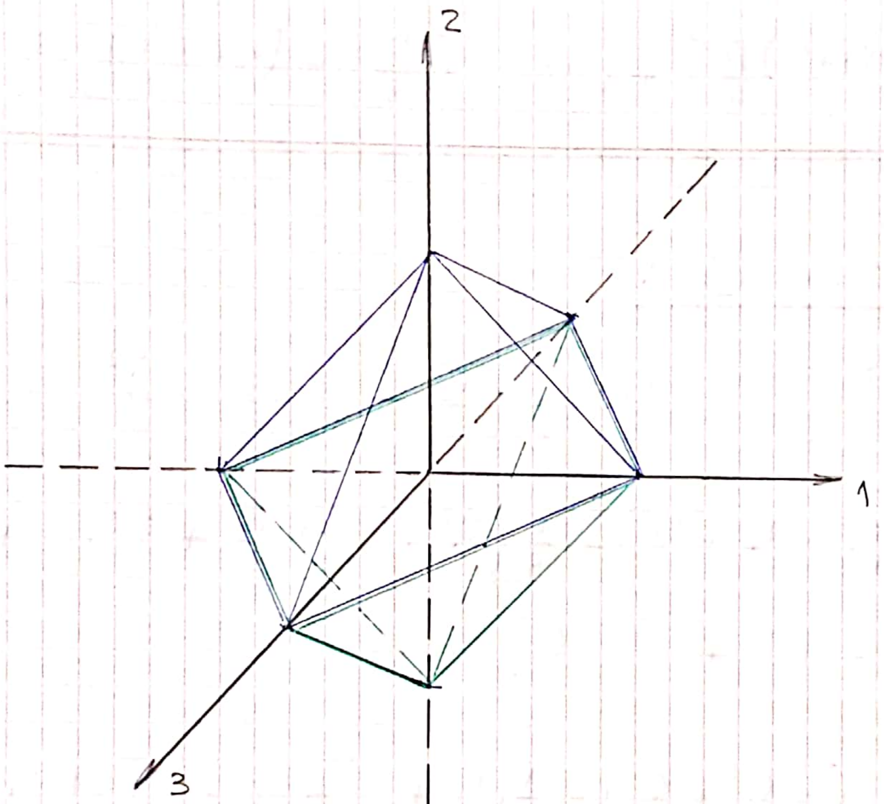
$$\tau^2 = \frac{1}{9}(3\sigma_1^2+3\sigma_2^2+3\sigma_3^2-\sigma_1^2-\sigma_2^2-\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3)$$

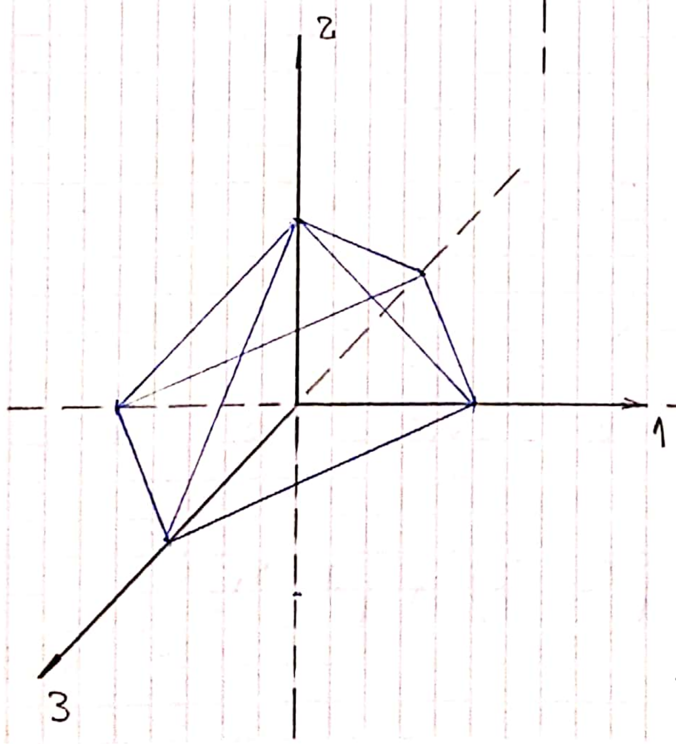
$$\tau^2 = \frac{1}{9}(2\sigma_1^2+2\sigma_2^2+2\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma_2-2\sigma_1\sigma_3-2\sigma_2\sigma_3)$$

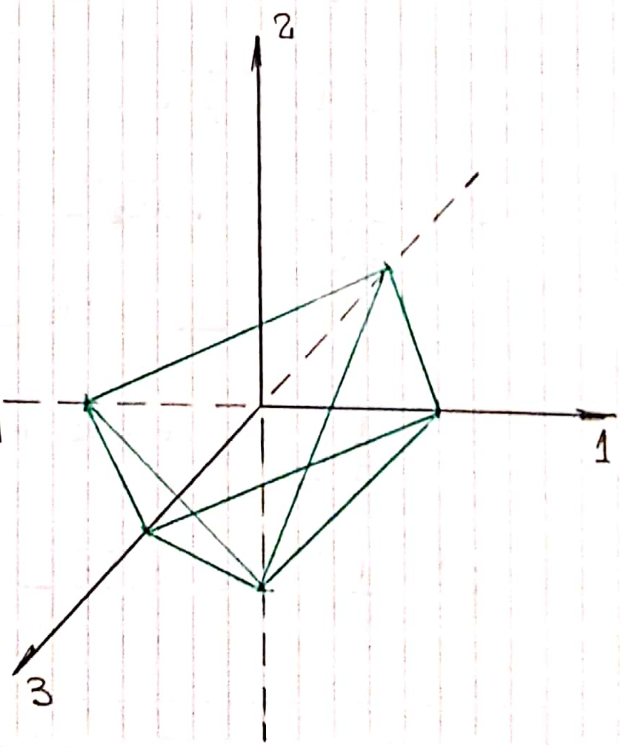
$$\tau^2 = \frac{1}{9}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \qquad (14)$$

- Cantidad de planos: → 8 por haber 8 octantes.







• Conclusiones y comentarios:

→ Al existir 8 octantes, podrán establecerse 8 planos con sendas normales que forman ángulos iguales con los ejes principales coordenados.

→ Las tensiones asociadas a esos 8 planos, así como sus componentes normales y tangenciales son iguales en módulo en todos los 8 planos.

→ El objeto de estudiar estas tensiones, se debe a que dentro de las teorías de rotura (TEL), requieren la definición de estas tensiones que denominaremos 'octaédricas' por estar en el octaedro que se ha dibujado.