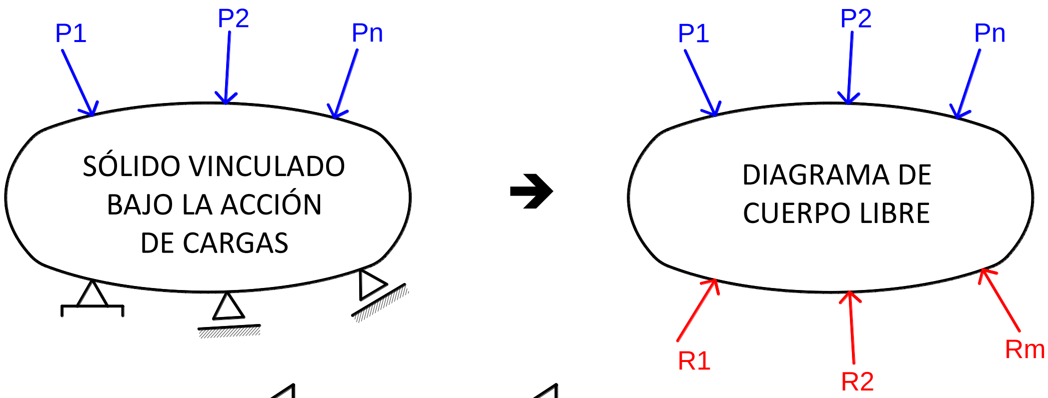
INTRODUCCION

TENSIONES Y DEFORMACIONES

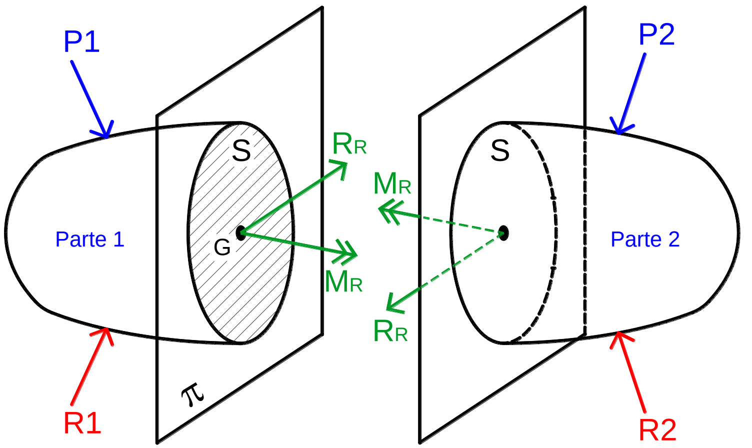
TENSIONES

INTRODUCCION



ANÁLISIS ESTÁTICO

- Se ponen en evidencia las reacciones de vínculo.
- **Sistema en equilibrio**.
- Diagrama de cuerpo libre.



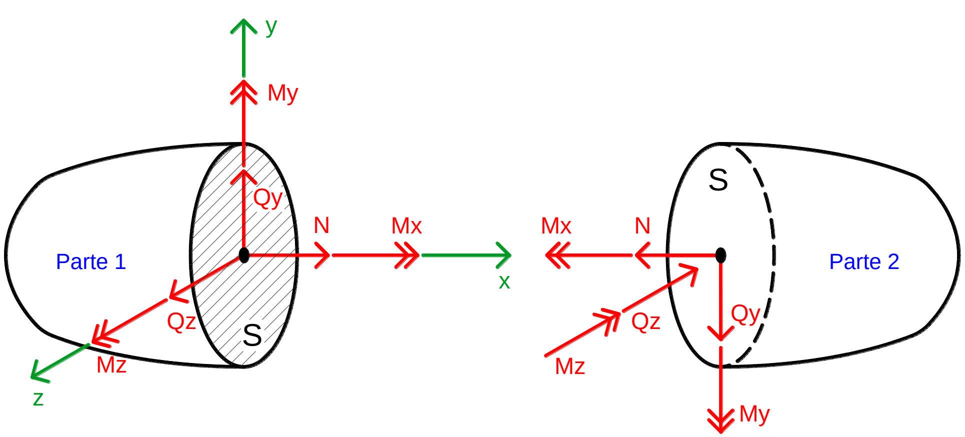
Se corta el sólido mediante un plano $\boldsymbol{\pi}$ arbitrario.

➔ Se rompe el equilibrio.

Sección **"S"** : Área determinada por la intersección del plano $\boldsymbol{\pi}$ con el sólido. **"G"**: baricentro.

Para restituir el equilibrio es necesario **reducir las fuerzas actuantes en la parte 2 a un punto sobre la parte 1**.

Punto de reducción : Baricentro G ➔ Se obtiene $\boldsymbol{R_R}$ y $\boldsymbol{M_R}$.



Se adopta una terna cartesiana xyz.

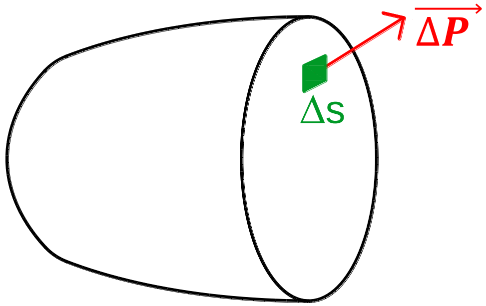
$$R_R = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Se obtuvieron las **Solicitaciones Internas en la sección S.**

$$\mathbb{S}_{(S)} = \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

CONCEPTO DE TENSIÓN

Contacto **punto a punto** entre las dos partes del sólido.

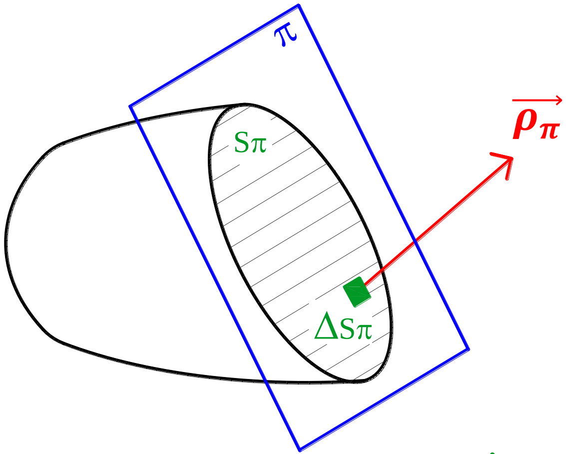


Se puede pensar en una fuerza ΔP aplicada en cada elemento de área ΔS

➔ **Conjunto Infinito de Fuerzas**.

Se define como ***"Tensión en el punto"*** a :

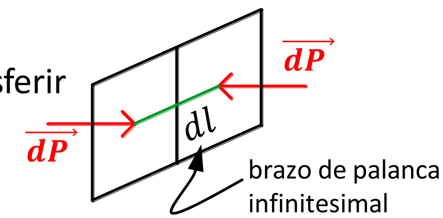
$$\boxed{\overrightarrow{\rho_\pi} = \lim_{\Delta S_\pi \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta P}}{\Delta S_\pi} = \frac{\overrightarrow{dP}}{dS}}$$

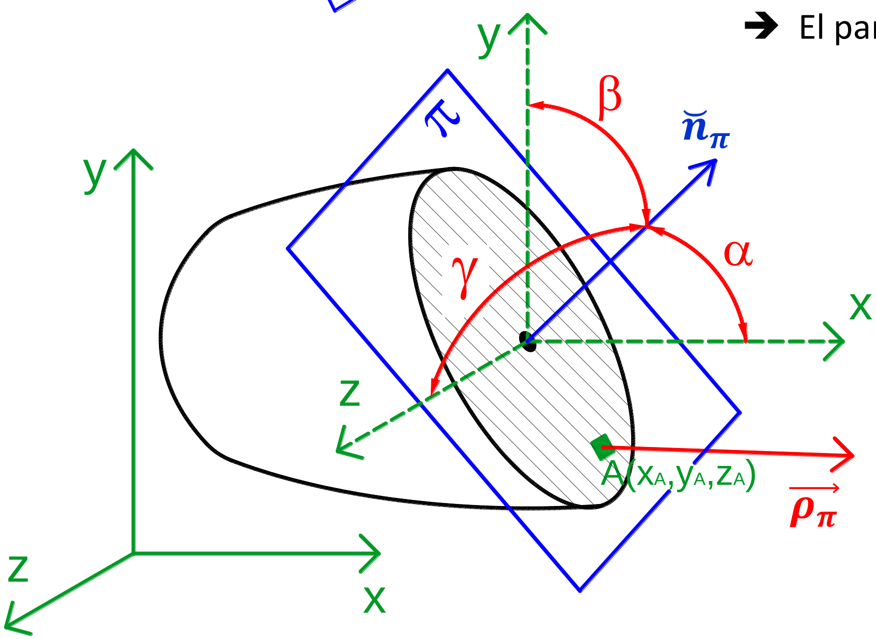


Se observa que:

- Es una **magnitud vectorial** (no necesariamente perpendicular al plano).
- **Unidades:** Fuerza sobre superficie (por ej.: KN/cm^2, Mpa)
- La tensión en general será distinta para **cada punto del plano** y además dependerá del **plano de corte π**.
- Por el diferencial de superficie se pueden transferir fuerzas pero **no** cuplas.

➔ El par es infinitésimo de orden superior.





El plano de corte π se identifica mediante el **versor** $\breve{n}_\pi$, normal al plano π.

α, β, γ : ángulos entre $\breve{n}_\pi$ y los ejes de la terna ***x, y, z***.

$$\left.\begin{aligned} l &= \cos\alpha \\ m &= \cos\beta \\ n &= \cos\gamma \end{aligned}\right\}$$

Cosenos directores del versor $\breve{n}_\pi$
(componentes del vector en la terna x,y,z)

$$\breve{n}_\pi = (l, m, n)$$

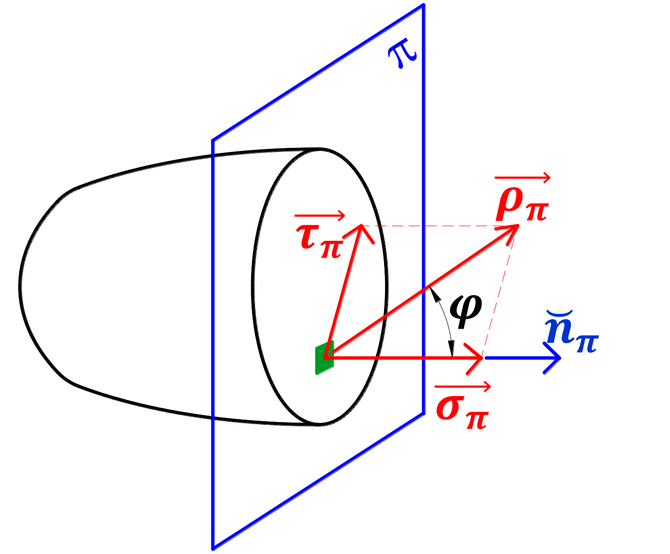
Propiedad de $\breve{n}_\pi$ (módulo): $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

Finalmente resulta : $\overrightarrow{\rho_\pi} = func(x_A, y_A, z_A, l, m, n)$

TENSIONES NORMALES Y TANGENCIALES

El vector tensión se suele representar mediante dos componentes :

- $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma_\pi}}$: Tensión normal al plano en estudio
- $\overrightarrow{\boldsymbol{\tau_\pi}}$: Tensión tangencial al plano en estudio
- $\boldsymbol{\varphi}$: Ángulo comprendido entre el vector tensión y el versor normal del plano considerado.



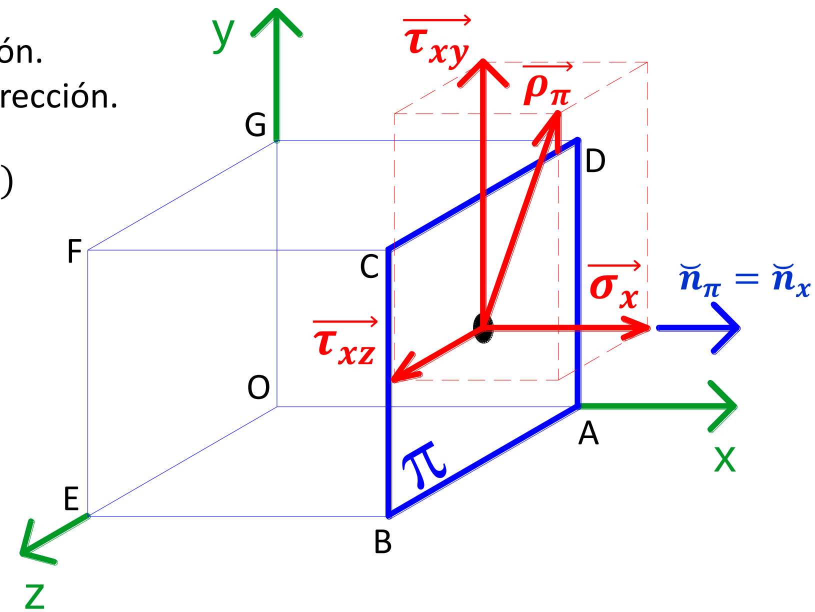
Módulos : $|\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma_\pi}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{\rho_\pi}}| \cdot \cos \boldsymbol{\varphi}$; $|\overrightarrow{\boldsymbol{\tau_\pi}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{\rho_\pi}}| \cdot \sin \boldsymbol{\varphi}$

NOTACIÓN Y CONVENCIÓN DE SIGNOS

Se requieren dos subíndices para designar las componentes de la tensión.
El primero indica el plano en el que actúa la tensión y el segundo, su dirección.

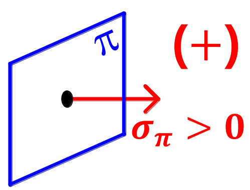
Ahora, el ***"plano π"*** ≡ ***"plano x"*** dado que : $\breve{\boldsymbol{n}}_\pi = \breve{\boldsymbol{n}}_x = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$

Resulta : $\boldsymbol{\rho_{\pi x} = \sigma_x}$ $\boldsymbol{\rho_{\pi y} = \tau_{xy}}$ $\boldsymbol{\rho_{\pi z} = \tau_{xz}}$

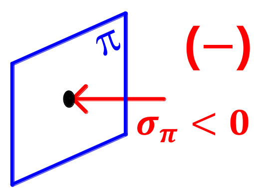


<u>Convención para Tens. Normales</u> :

Tensión normal **<u>saliente</u>** del plano



Tensión normal **<u>entrante</u>** al plano



<u>Convención para Tens. Tangenciales</u> : Definición : una cara es ***"positiva"*** si el vector normal saliente a dicha cara tiene la dirección positiva de un eje coordenado. (cara ABCD → "positiva", cara OEFG →"negativa", ambas son "caras x").

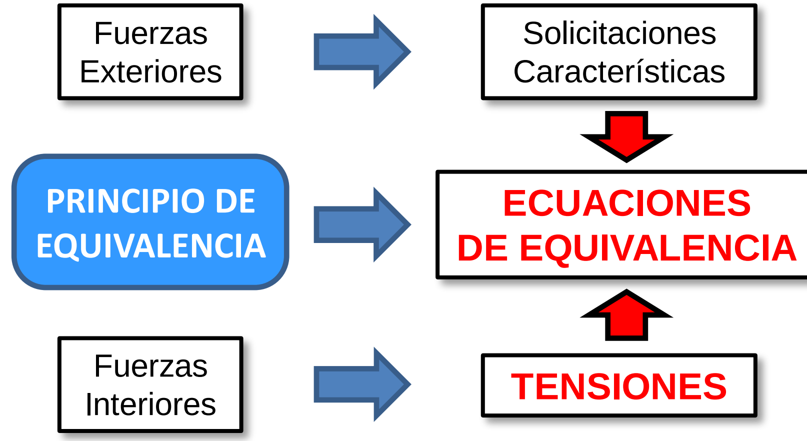
"La tensión tangencial será positiva, si actuando sobre una cara positiva, su sentido coincide con la dirección positiva de alguno de los ejes coordenados". En la figura $\boldsymbol{\tau_{xy}}$ y $\boldsymbol{\tau_{xz}}$ son ambas positivas.

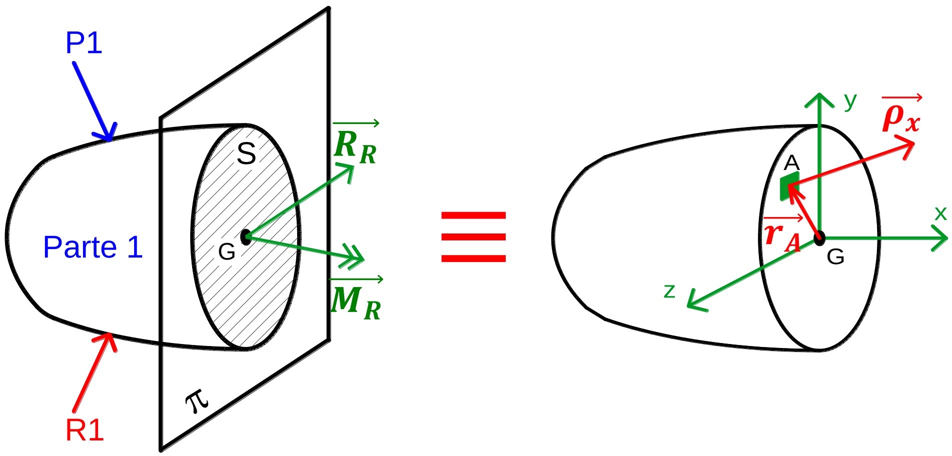
ECUACIONES DE EQUIVALENCIA

Actúan sobre el sólido dos sistemas de fuerzas:

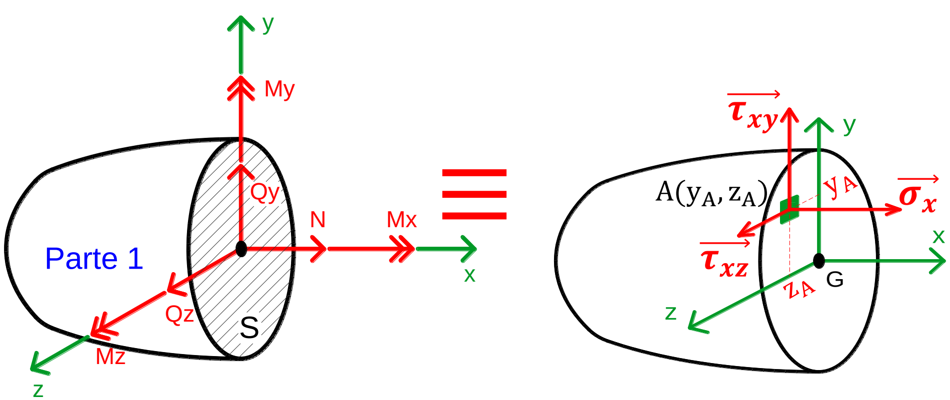
- **Fuerzas Exteriores**: activas y reactivas
  ➔ Solicit. Características
- **Fuerzas Interiores**: ➔ **TENSIONES**

El **principio de equivalencia** establece una relación de igualdad (equivalencia estática) entre ambos sistemas de fuerzas.





Fuerzas Exteriores ≡ Fuerzas Interiores



ECUACIONES DE EQUIVALENCIA

Forma vectorial :

$$\overrightarrow{R_R} = \int_S \overrightarrow{\rho_x}\, dS \qquad \overrightarrow{M_R} = \int_S \overrightarrow{\rho_x} \wedge \overrightarrow{r_A}\, dS$$

Forma escalar (una ecuación para cada componente):

$$N = \int_S \sigma_x\, dS \qquad M_x = \int_S (\tau_{xz}\, y - \tau_{xy}\, z)\, dS$$

$$Q_z = \int_S \tau_{xz}\, dS \qquad M_z = -\int_S \sigma_x\, y\, dS$$

$$Q_y = \int_S \tau_{xy}\, dS \qquad M_y = \int_S \sigma_x\, z\, dS$$

ECUACIONES DE EQUIVALENCIA - (Continuación)

FORMA VECTORIAL

$$\vec{\mathbb{S}} = \begin{Bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \qquad \vec{\Gamma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \qquad \boxed{\vec{\mathbb{S}} = \int_F H\,\vec{\Gamma}\,\,dF} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z & y & 0 \\ Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Conocidas las tensiones $\vec{\rho}$ se pueden determinar las seis componentes de las solicitaciones características.

La inversa **NO** es posible (6 ecuaciones e infinitos valores de tensiones) ➔ **INDETERMINACIÓN ESTÁTICA**.

Se deberán plantear **hipótesis adicionales de deformación del sólido** para salvar la indeterminación (se abandona la hipótesis de cuerpo rígido).

TEOREMA DE CAUCHY

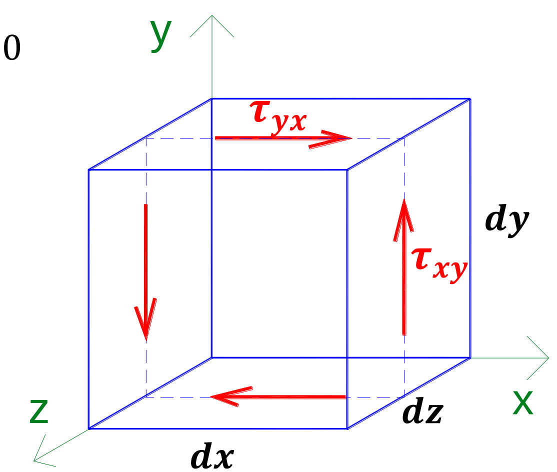
$\sum M_z = 0 \qquad \tau_{xy}\,dydz \cdot dx - \tau_{yx}\,dxdz \cdot dy = 0 \qquad (\tau_{xy} - \tau_{yx})dxdydz = 0$

➔ $\boldsymbol{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$

$\sum M_x = 0$ ➔ $\boldsymbol{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$

$\sum M_y = 0$ ➔ $\boldsymbol{\tau_{xz} = \tau_{zx}}$

TEOREMA DE CAUCHY

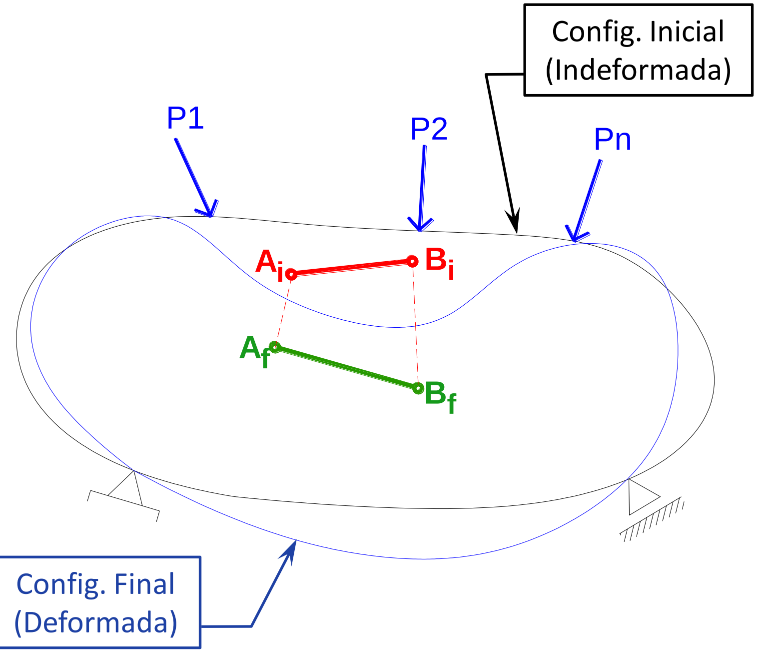


TEOREMA DE CAUCHY

"Las tensiones tangenciales actuantes sobre dos caras ortogonales y cuyas direcciones son perpendiculares a la arista son iguales y sus sentidos son tales que concurren a la arista o bien se alejan de ella".

DEFORMACIONES

INTRODUCCIÓN



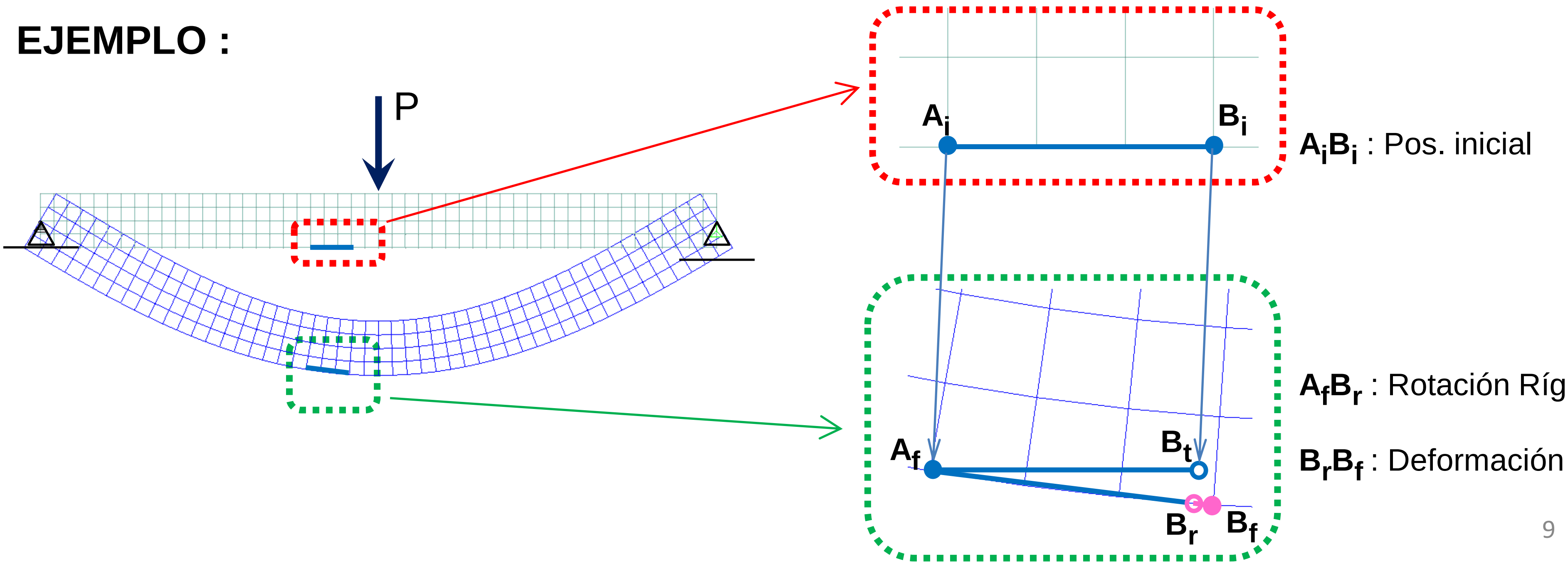
Se abandona la <u>hipótesis de cuerpo rígido</u> (la distancia entre dos puntos ya **NO** será invariable).

➔ CUERPO DEFORMABLE

Corrimiento de un segmento $\mathbf{A_iB_i}$ (pos. inicial) hasta la posición $\mathbf{A_fB_f}$ (pos. final). Se compone de dos desplazamientos :

- ❑ **CAMBIO DE POSICIÓN** (Traslación + Rotación Rígidas)
  Cinemática de los sistemas rígidos.
- ❑ **DEFORMACIÓN**
  Movimiento con cambio de forma

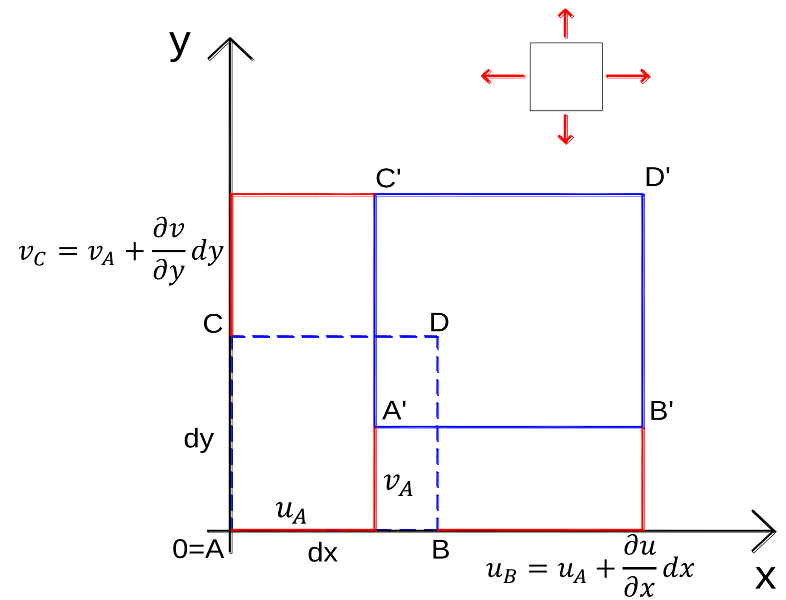
EJEMPLO :



DEFINICIONES - RELACIONES CINEMÁTICAS

Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ funciones que representan los corrimientos de un punto, en función de su posición, en las direcciones $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ respectivamente. Son funciones continuas y derivables. Los corrimientos son pequeños (Linealidad cinemática).

VARIACIONES DE LONGITUD



$$\varepsilon_x = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}}$$

$$\varepsilon_x = \frac{u_B + \cancel{dx} - u_A - \cancel{dx}}{dx} = \frac{\cancel{u_A} + \frac{\partial u}{\partial x} dx - \cancel{u_A}}{dx}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}}}$$

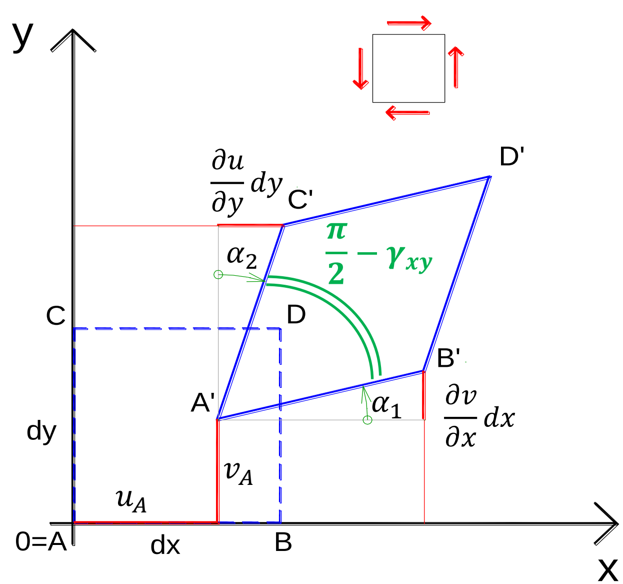
Deformación lineal específica o deformación unitaria

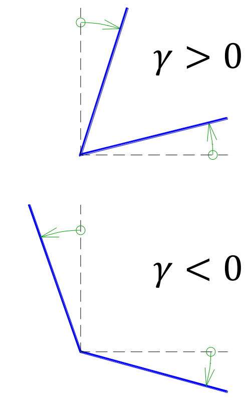
Análogamente : $\boldsymbol{\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}}$; $\boldsymbol{\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}}$

$\varepsilon > 0$ ➔ Alargamiento

$\varepsilon < 0$ ➔ Acortamiento

VARIACIONES DE ÁNGULOS





$$\tan \alpha_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \cong \alpha_1$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \cong \alpha_2$$

El ángulo BÂC, recto en la posición inicial, cambia en :

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\widehat{B'A'C'} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}$$

Deformación angular específica o distorsión angular

Análogamente : $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$