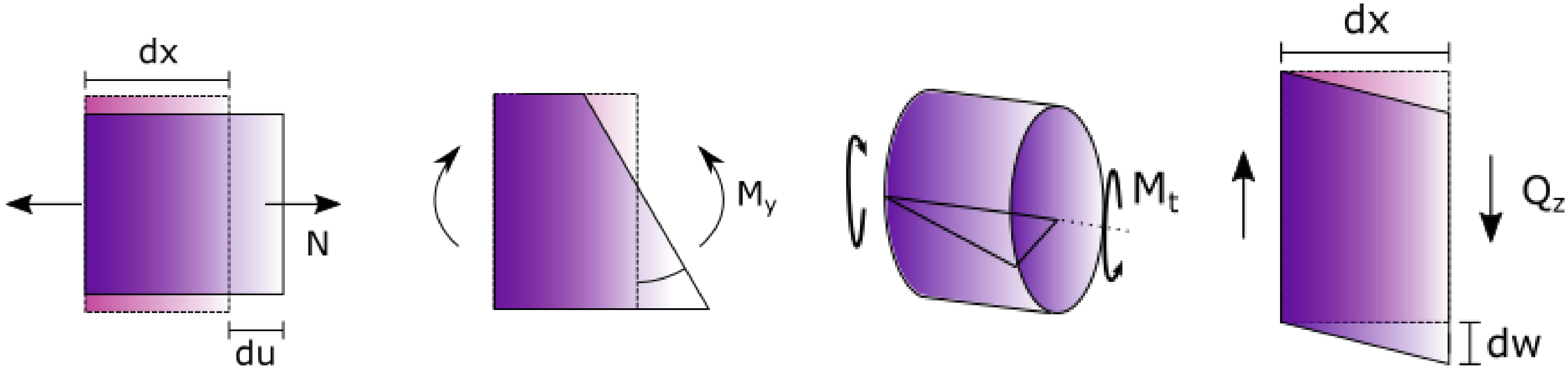
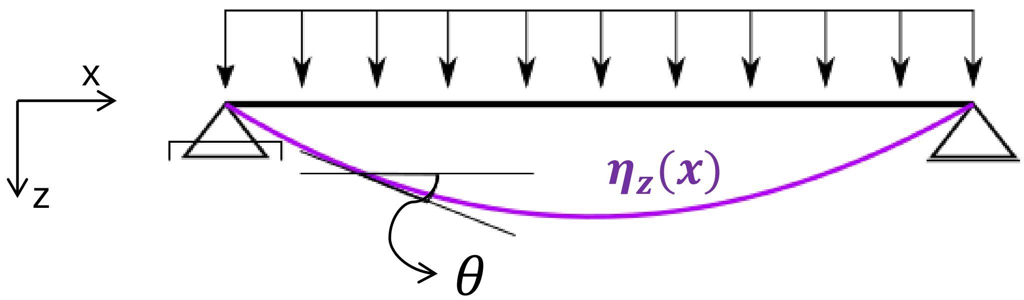
Cálculo de desplazamientos



Tania Poletilo - Constanza Ruffinelli - Manuela Medina

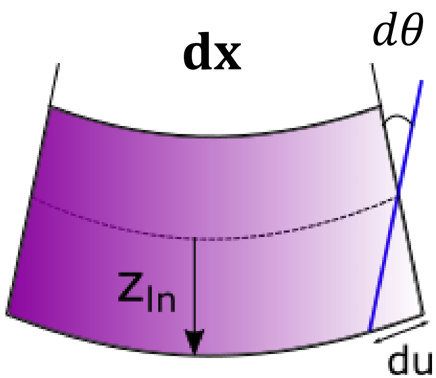
Repaso teórico

Desplazamiento por flexión y corte



$$\theta \approx tg(\theta) = -\frac{d\eta_z(x)}{dx}$$

Sabemos que $du = \varepsilon_x \cdot dx$



A partir del esquema: $du = d\theta \cdot z_{ln}$

$$d\theta \cdot z_{ln} = \varepsilon_x \cdot dx \longrightarrow \frac{d\theta}{dx} = \chi = \frac{\varepsilon_x}{z_{ln}}$$

Recordando la Ley de Hooke $(\sigma = E \cdot \varepsilon)$

y el cálculo de sigma para EPI $\left(\sigma = \frac{M_y}{J_y} \cdot z\right)$

$$\frac{d^2\eta_z(x)}{dx^2} = -\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\sigma_x}{E \cdot z_{ln}} = -\frac{M_y \cdot z_{ln}}{J_y \cdot E \ \cdot z_{ln}} = -\frac{M_y}{J_y \cdot E}$$

Ecuación diferencial de la elástica de deformación

$$\eta_z$$

$$-\theta = \frac{d\,\eta_z(x)}{dx}$$

$$-\chi = \frac{d^2\eta_z(x)}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{J_y \cdot E}$$

$$\frac{d^3\eta_z(x)}{dx^3} = -\frac{1}{J_y \cdot E} \cdot \frac{dM_y(x)}{dx} = -\frac{Q_z(x)}{J_y \cdot E}$$

$$\frac{d^4\eta_z(x)}{dx^4} = -\frac{1}{J_y \cdot E} \cdot \frac{dQ_z(x)}{dx} = \frac{q_z(x)}{J_y \cdot E}$$

Entonces

Si $q = cte \Rightarrow Q: lineal \Rightarrow M: cuadrática \Rightarrow \theta:$ cúbica

$\eta_z(x): polinomio\ de\ orden\ 4 \Rightarrow \eta_z(x) = A \cdot x^4 + B \cdot x^3 + C \cdot x^2 + D \cdot x + F$

$$\frac{d\eta_z(x)}{dx} = -\theta = 4 \cdot A \cdot x^3 + 3 \cdot B \cdot x^2 + 2 \cdot C \cdot x + D$$

$$\frac{d^2\eta_z(x)}{dx^2} = -\chi = -\frac{M_y(x)}{J_y \cdot E} = 12 \cdot A \cdot x^2 + 6 \cdot B \cdot x + 2 \cdot C$$

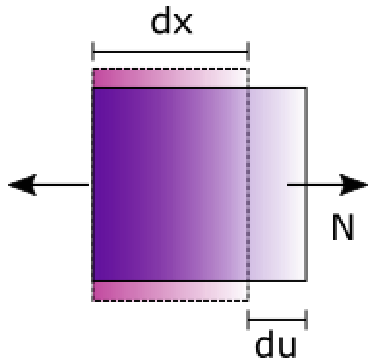
$$\frac{d^3\eta_z(x)}{dx^3} = -\frac{Q_z(x)}{J_y \cdot E} = 24 \cdot A \cdot x + 6 \cdot B$$

$$\frac{d^4\eta_z(x)}{dx^4} = \frac{q_z}{J_y \cdot E} = 24 \cdot \mathrm{A} \Rightarrow A = \frac{q_z}{24 \cdot J_y \cdot E}$$

Como tengo que determinar 4 constantes (B, C, D, F), necesito 4 condiciones de borde

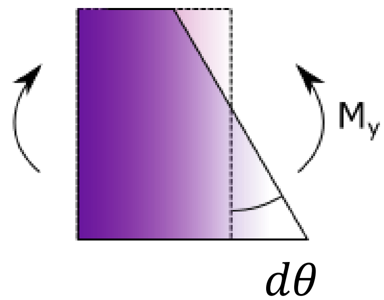
Relaciones entre solicitaciones y deformada

Axil



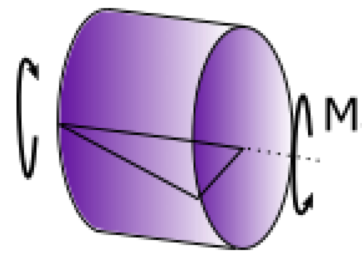
$$du = \varepsilon_x \cdot dx = \frac{N}{E \cdot A}\, dx$$

Flexión



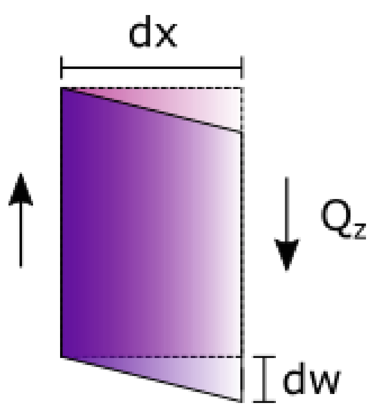
$$-d\theta_y = \chi_y\, dx = \frac{M_y}{J_y \cdot E} dx$$

Torsión



$$d\theta_x = \chi_x\, dx = \frac{M_t}{J_p \cdot G}\, dx$$

Corte



$$dw = K_y \cdot \frac{Q_z}{G \cdot A}\, dx$$

$$K_y = \int_A \frac{S^2}{i_y^4 \cdot A \cdot b^2}\, dA$$

Con K_y: factor de forma

Para barras donde la $L >> a$ (L: longitud de la barra, a: mayor dimensión de la sección), se desprecia la deformación por corte

Cálculo de desplazamientos por TTV

$$W_E = W_I$$

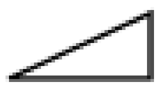
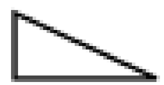
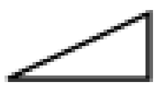
$$(+1) \cdot \eta = \int_L N_{se}\, du_{dv} + \int_L M_{y_{se}}\, d\theta_{y_{dv}} + \int_L M_{t_{se}}\, d\theta_{x_{dv}} + \int_L Q_{se}\, dw_{dv}$$

$$(+1) \cdot \eta = \int_L N^{se} \cdot \frac{N^{dv}}{E \cdot A}\, dx + \int_L M_y^{se} \cdot \frac{M_y^{dv}}{J_y \cdot E}\, dx + \int_L M_t^{se} \cdot \frac{M_t^{dv}}{J_p \cdot G}\, dx$$

$$\int i(x) \cdot j(x) \cdot dx = \alpha \cdot\ i \cdot j \cdot L$$

i y j valores máximos de la función

Allí la pendiente es cero

α				
	1	$^1/_2$	$^1/_2$	$^2/_3$
	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_6$	$^1/_3$

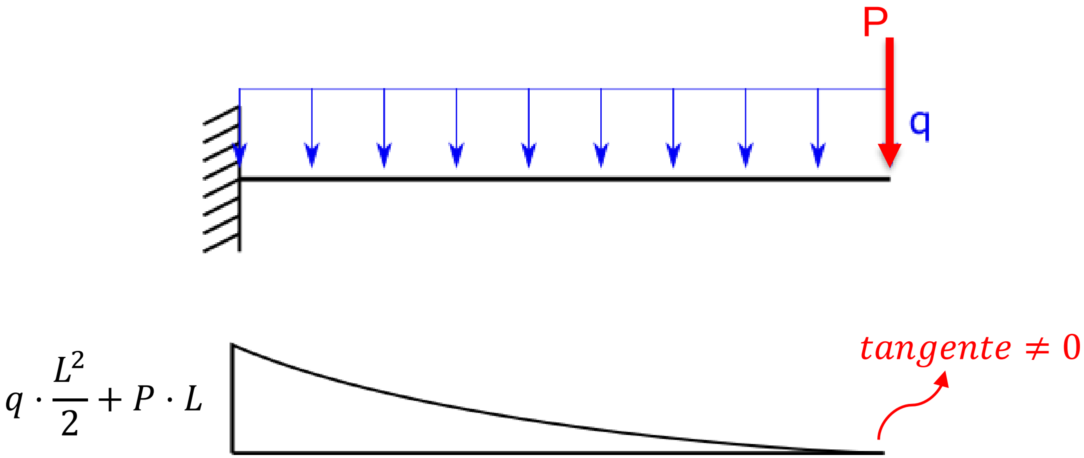
Aclaración

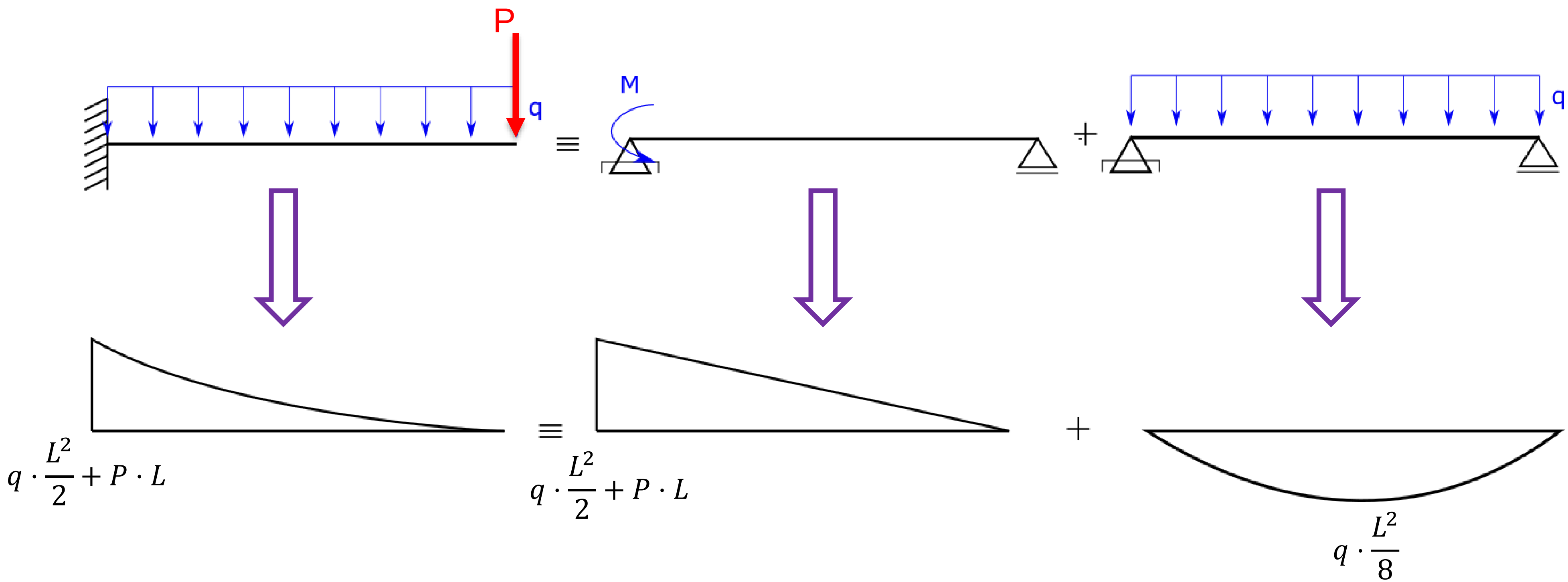
Ésta es una tabla simple, hay otras con más combinaciones pero siempre se pueden descomponer los diagramas en una suma de éstas

https://campus.fi.uba.ar/mod/folder/view.php?id=43794

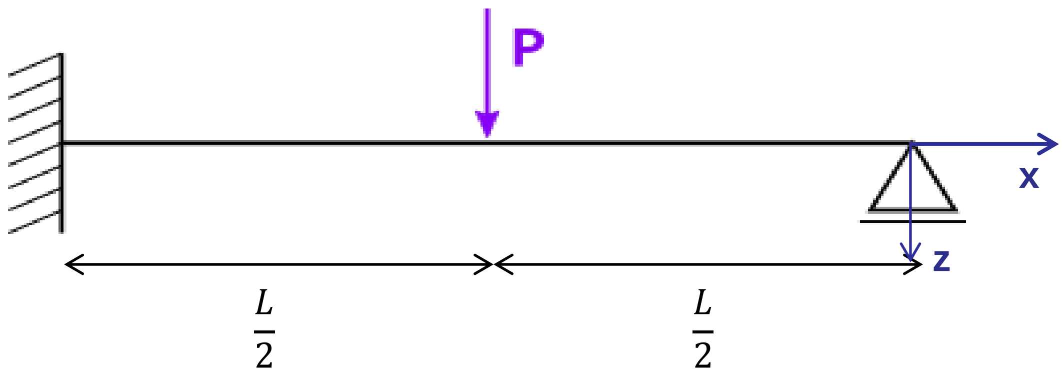
Descomposición de diagramas

Cómo ésta función no la encuentro en tabla debo dividirla en suma de funciones que si estén





Resolución de la elástica por ecuación diferencial y condiciones de borde



¿Cuántas funciones necesito?

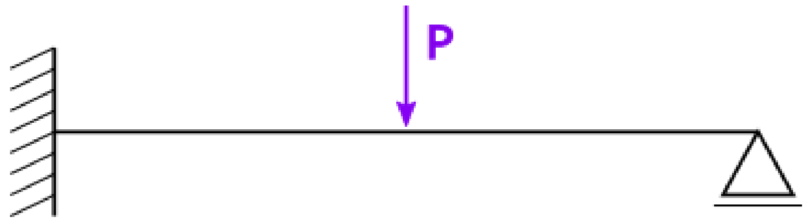
¿Cuántas condiciones de borde necesito?

Cada función $w_i(x)$ tiene 4 incógnitas

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x)\ si\ 0 < x < \frac{L}{2} \\ w_2(x)\ si\ \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

⇒ **8 condiciones de borde**

Condiciones de borde



1) $w_1(x = 0) = 0$

2) $\theta_1(x = 0) = 0$

3) $w_2(x = L) = 0$

4) $M(x = L) = 0 \rightarrow \chi_2(x = L) = 0$

5) $w_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = w_2\left(x = \frac{L}{2}\right)$

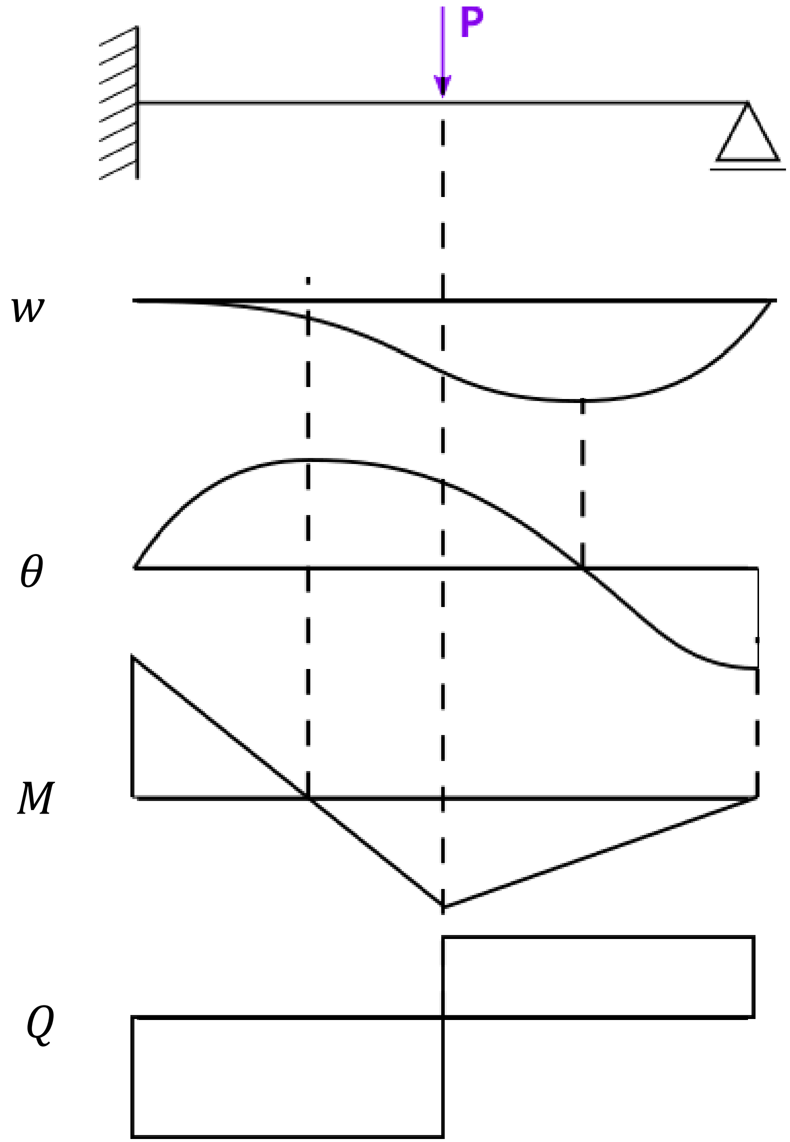
6) $\theta_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = \theta_2\left(x = \frac{L}{2}\right)$

7) $M_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = M_2\left(x = \frac{L}{2}\right)$

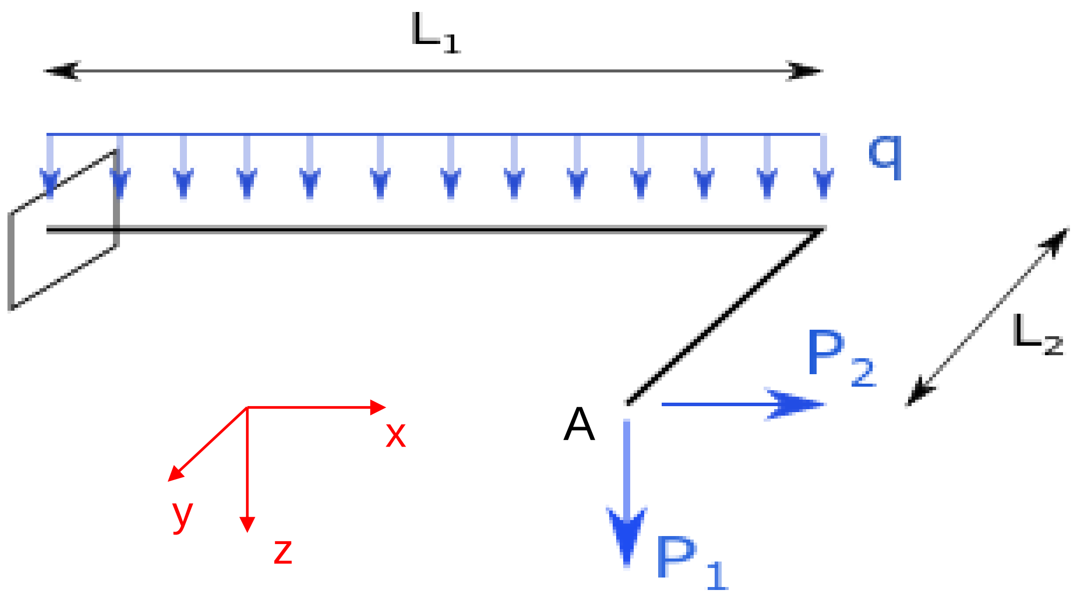
8) $Q_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = Q_2\left(x = \frac{L}{2}\right) + P$

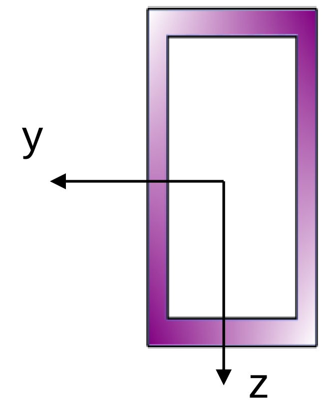
Una vez determinadas las 8 condiciones de borde tenemos un sistema de 8 ecuaciones y 8 incógnitas.

Diagramas



Ejercicio 2: Calcular el desplazamiento vertical en A y θ_{Ax}.





$Perfil\colon\ 100\ x\ 250\ x\ 10\ mm$

$J_y = 4515\ \mathrm{cm}^4$

$J_z = 1040\ \mathrm{cm}^4$

$J_t = 2777\ \mathrm{cm}^4$

$E = 21000\ \frac{kN}{cm^2}$ $\quad G = 8000\ \frac{kN}{cm^2}$

Cargas:

$P_1 = 5\ kN$ $\quad L_1 = 4\ m$

$P_2 = 10\ kN$ $\quad L_2 = 1\ m$

$q = 5\ \frac{kN}{m}$

Resolución:

Calculamos cada desplazamiento con TTV

$$W_E = W_i$$

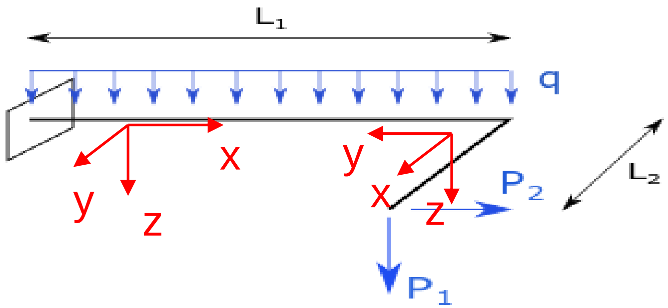
$$(+1) \cdot \eta = \int_L N^{se} \cdot \frac{N^{dv}}{E \cdot A}\, dx + \int_L M_{en}^{se} \cdot \frac{M_{en}^{dv}}{J_{en} \cdot E}\, dx + \int_L M_t^{se} \cdot \frac{M_t^{dv}}{J_t \cdot G}\, dx$$

Por lo que necesitamos:

- Diagramas del DV
- Diagramas de cada SE

Diagramas de características

DV

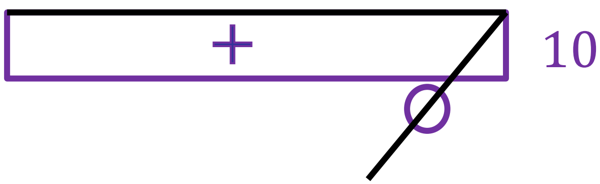


$P_1 = 5\ kN$ $\quad L_1 = 4\ m$

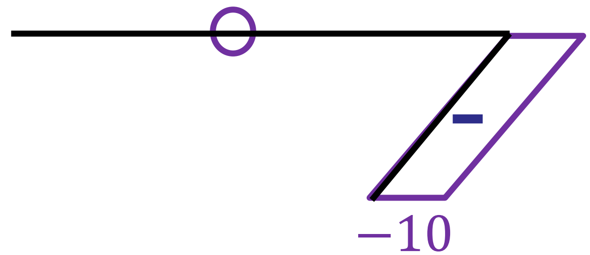
$P_2 = 10\ kN$ $\quad L_2 = 1\ m$

$q = 5\ \frac{kN}{m}$

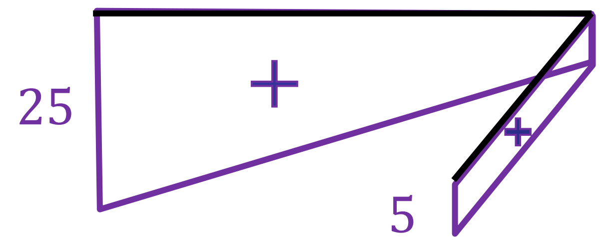
$N[kN]$



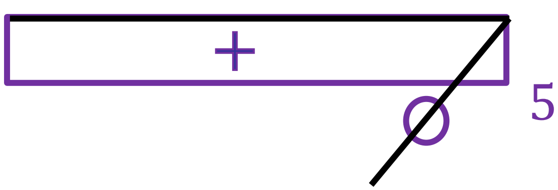
$Q_y[kN]$



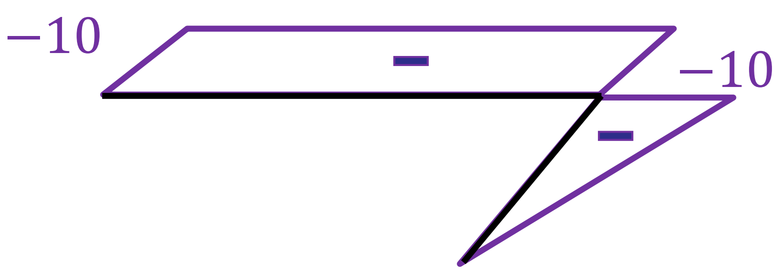
$Q_z[kN]$



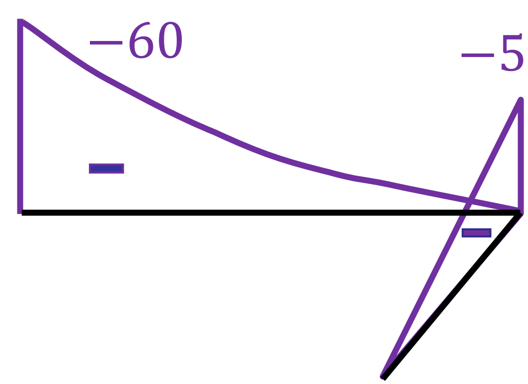
$M_t[kN\ m]$



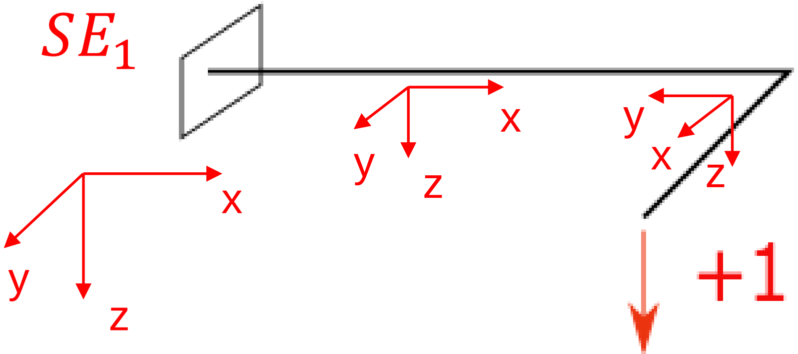
$M_z[kN\ m]$



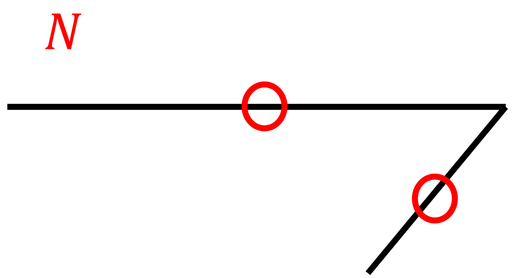
$M_y[kN\ m]$

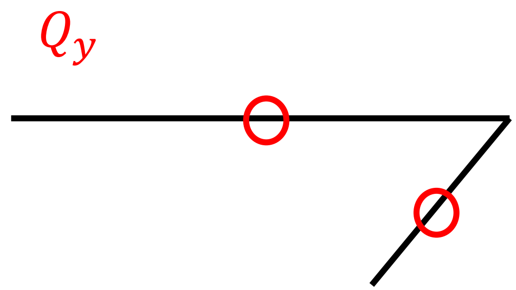


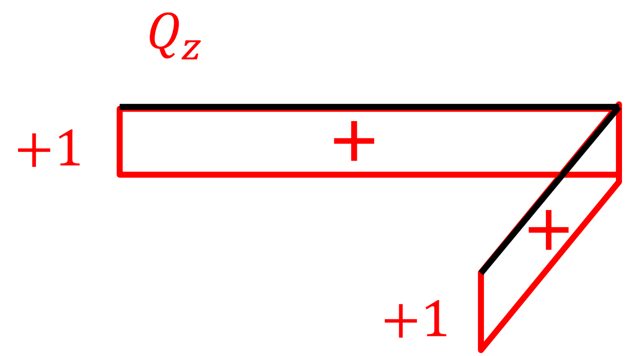
Desplazamiento vertical: η_A

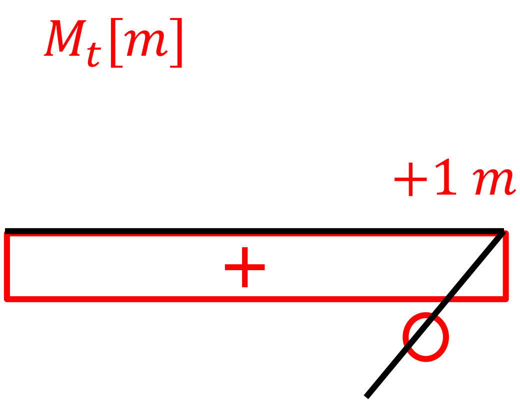


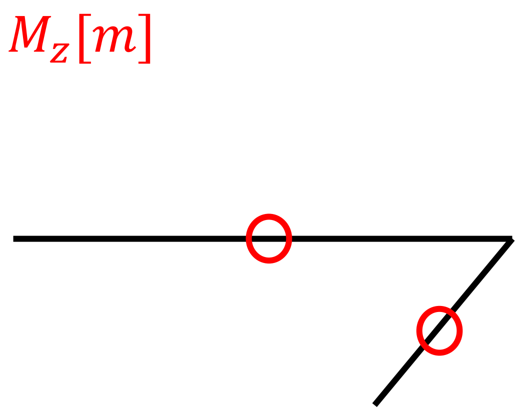
Quiero un desplazamiento vertical, por lo que en el SE debo poner una fuerza unitaria vertical en A

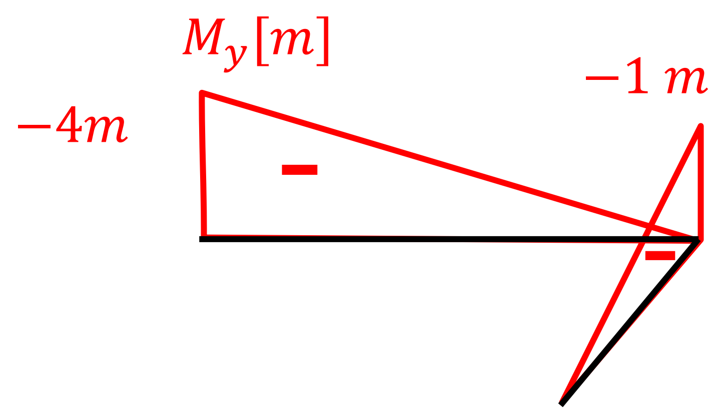


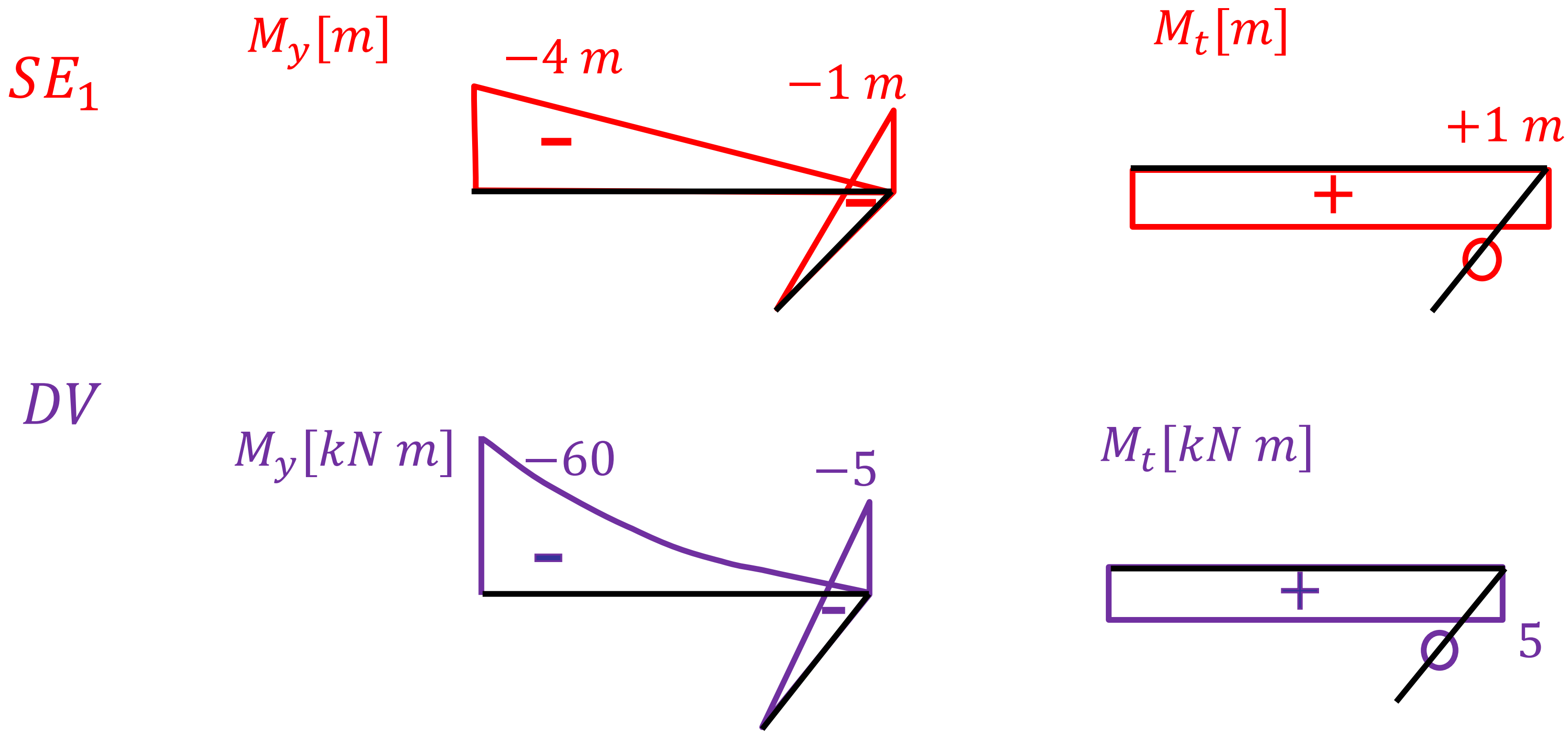






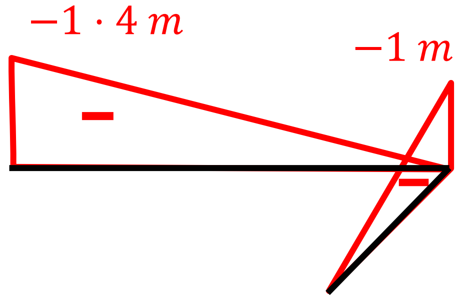


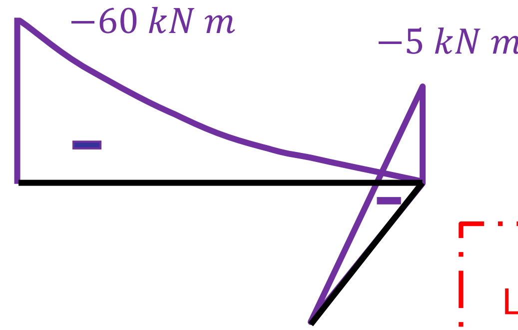




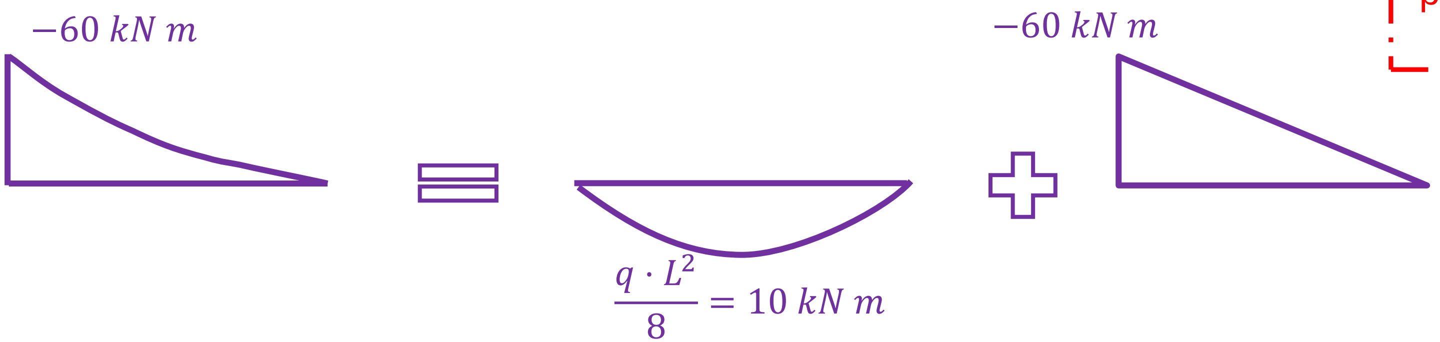
$$\eta_A = \int_L M_{se} \cdot \frac{M_{dv}}{E \cdot J}\, dx + \int_L Mt_{se} \cdot \frac{Mt_{dv}}{G \cdot J_t}\, dx = \eta_A^{M_y} + \eta_A^{M_t}$$

$\eta_A^{M_y}$

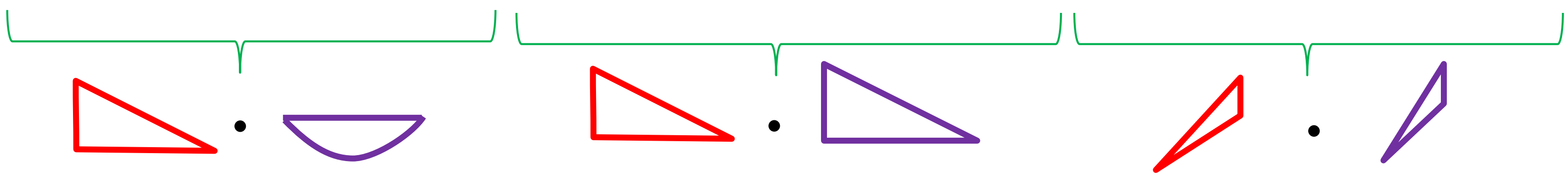




Cuidado!
La tangente no es nula, por lo tanto el coeficiente no esta en tabla.



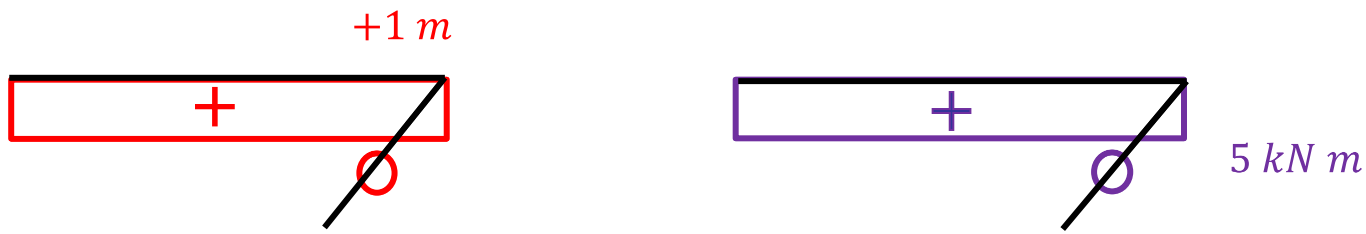
$$\int_L M_{se} \cdot \frac{M_{dv}}{E \cdot J} dx = \frac{1}{3} \cdot (-4m) \cdot \frac{10kNm}{E \cdot J_y} \cdot 4m + \frac{1}{3} \cdot (-4m) \cdot \frac{(-60kNm)}{E \cdot J_y} \cdot 4m + \frac{1}{3} \cdot (-1m) \cdot \frac{(-5kNm)}{E \cdot J_y} \cdot 1m$$



$$\eta_A^{M_y} = -0{,}562\ cm + 3{,}375\ cm + 0{,}018\ cm$$

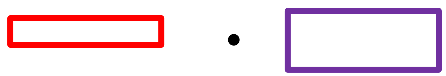
$$\eta_A^{M_y} = 2{,}831\ cm$$

$\eta_A^{M_t}$



$$\int_L Mt_{se} \cdot \frac{Mt_{dv}}{G \cdot J_t} dx = 1 \cdot (+1\ m) \cdot \frac{(+5\ kN\ m)}{G \cdot J_t} \cdot 4\ m$$

$$\eta_A^{M_t} = +0{,}900\ cm$$



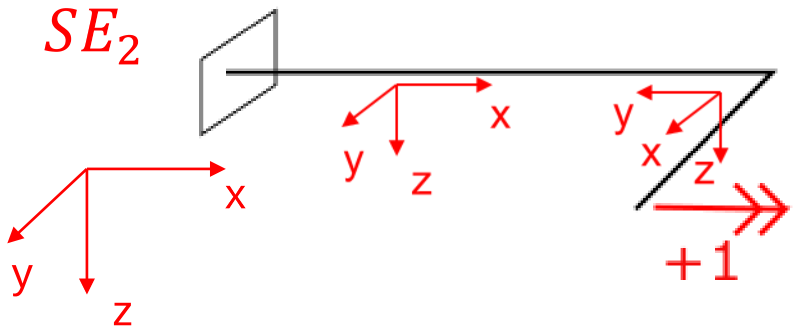
Desplazamiento total:

$$\eta_A = \eta_A^{M_y} + \eta_A^{M_t}$$

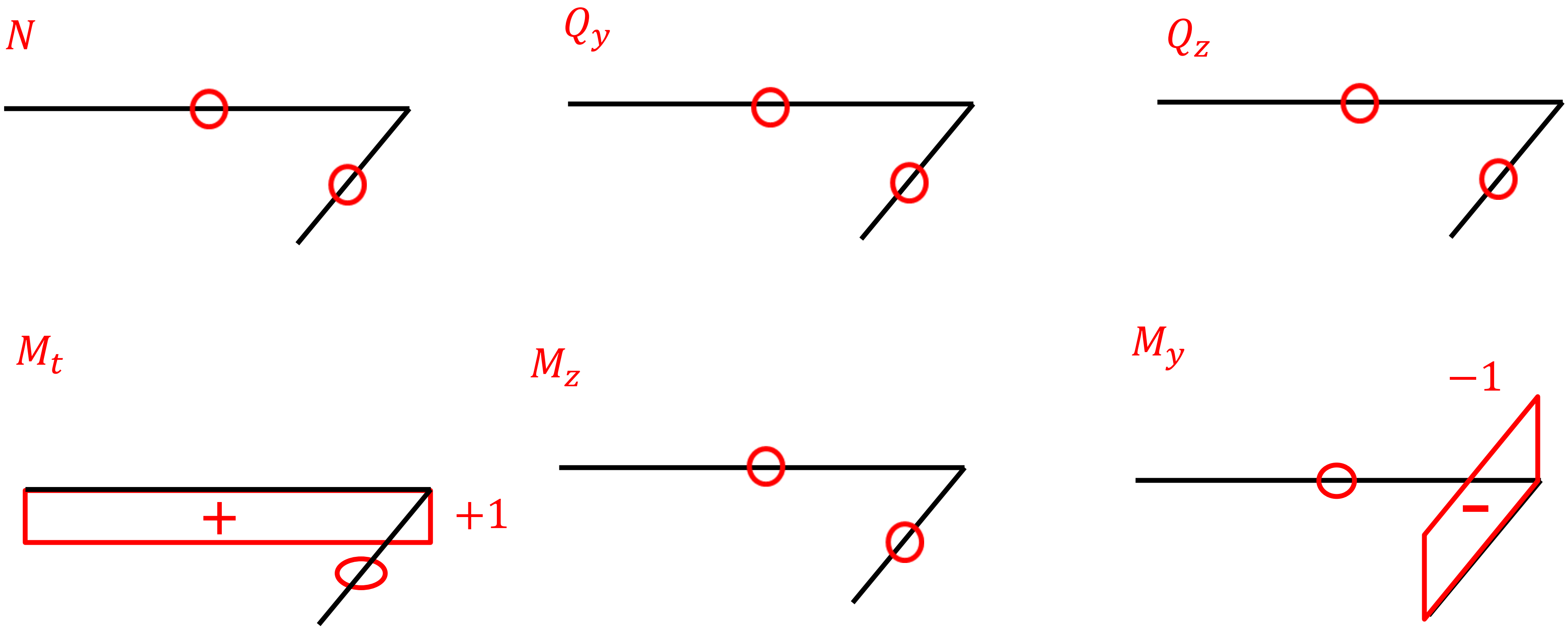
$$\eta_A = 2{,}831\ cm + 0{,}900\ cm$$

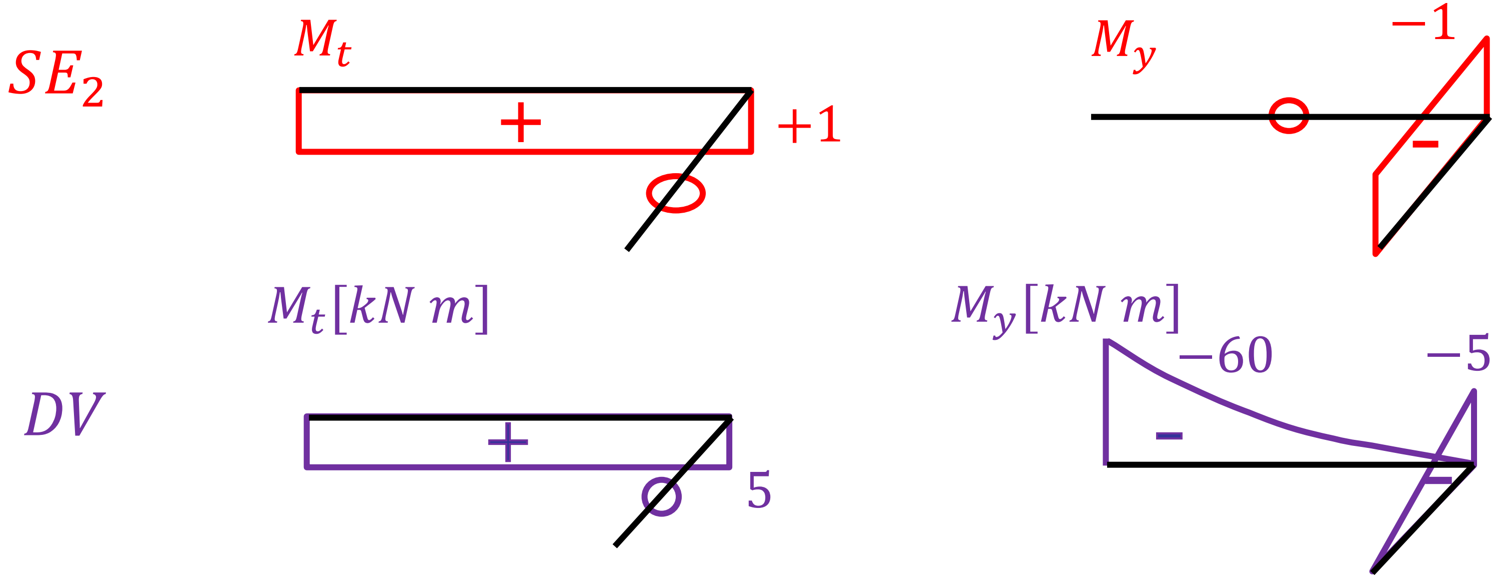
$$\boxed{\eta_A = 3{,}731\ cm}$$

Giro en A: θ_{xA}



Quiero un giro, por lo que en el SE debo poner un momento unitario en A





$$\theta_{xA} = \int_L Mt_{se} \cdot \frac{Mt_{dv}}{G \cdot J_t} dx + \int_L M_{se} \cdot \frac{M_{dv}}{E \cdot J} dx$$

$$\theta_{xA} = 1 \cdot (+1) \cdot \frac{(+5\ kN\ m)}{G \cdot J_t} \cdot 4\ m + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \frac{(-5\ kN\ m)}{E \cdot J_y} \cdot 1\ m$$

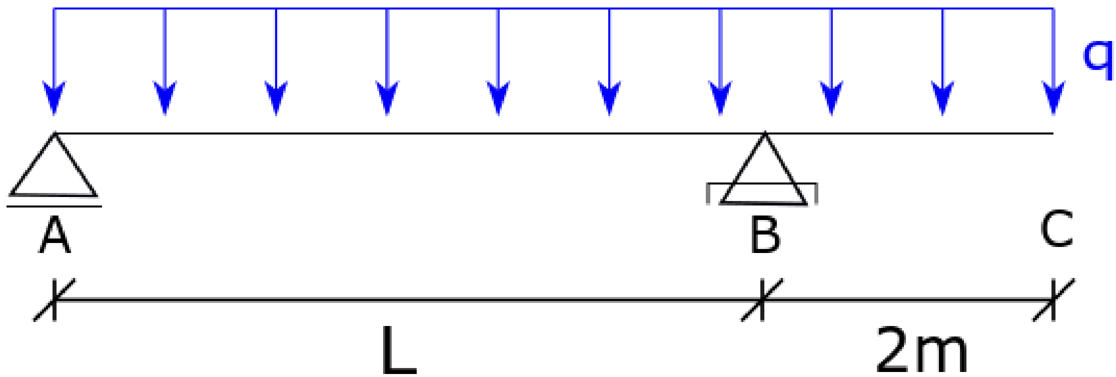
$$\theta_{xA} = 9{,}00 \cdot 10^{-3}\ rad + 2{,}63 \cdot 10^{-4}\ rad$$

$$\theta_{xA} = 9{,}263 \cdot 10^{-3}\ \text{rad}$$

Ejercicio 3:

a) Calcular la longitud “L” tal que el giro en la sección “B” sea nulo

b) Calcular el desplazamiento en “C”

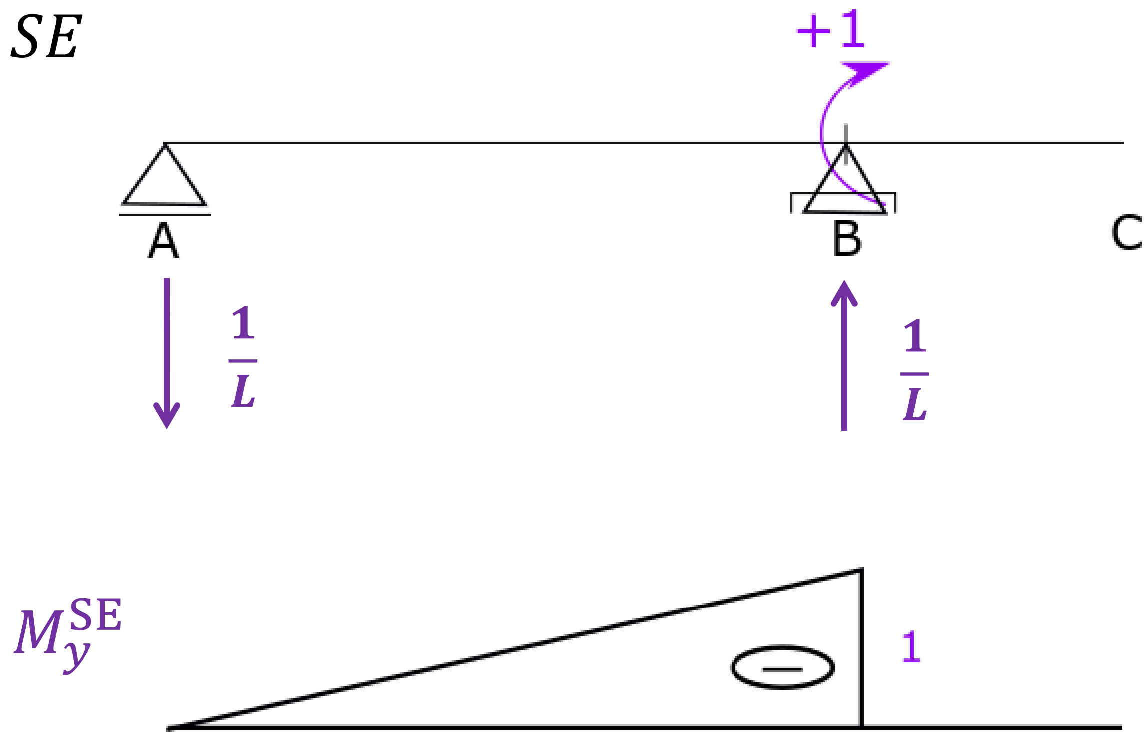


Datos: $E \cdot J = cte$

$$q = 10\ \frac{kN}{m}$$

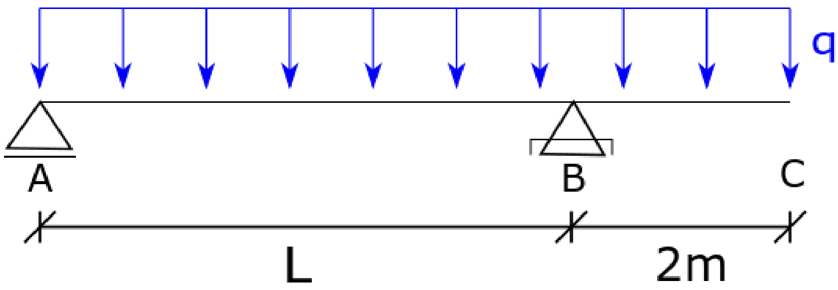
Calculo el giro utilizando TTV

Quiero calcular el giro, por lo tanto en el sistema equilibrado tengo que poner un momento unitario en “B”

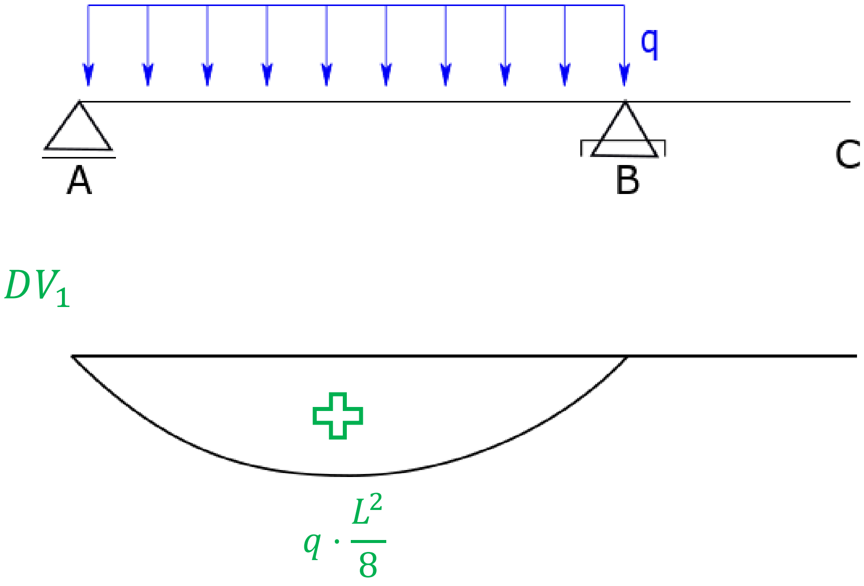


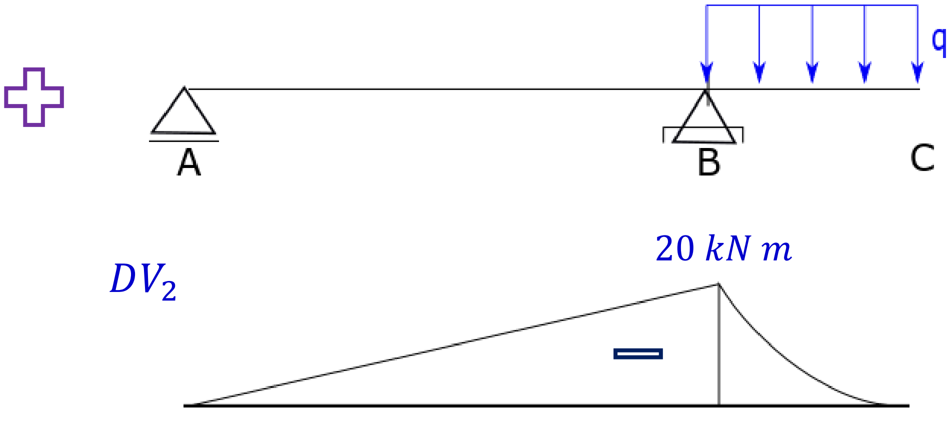
DV

Opción 1: Realizo los diagramas de características directamente de la estructura completa



Opción 2: Utilizo superposición de efectos

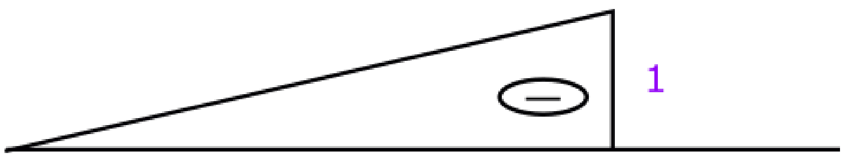




$$\theta_B = \int_L M^{SE} \cdot \frac{M^{DV}}{E \cdot J}\, dx = \int M^{SE} \cdot \frac{M^{DV_1}}{E \cdot J}\, dx + \int M^{SE} \cdot \frac{M^{DV_2}}{E \cdot J}\, dx$$

$$\int M^{SE} \cdot \frac{M^{DV_1}}{E \cdot J}\, dx \Longrightarrow$$

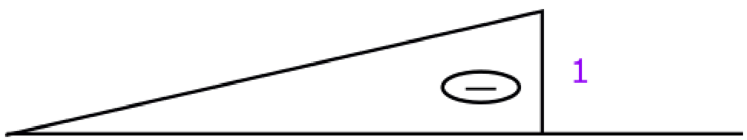
α				
	1	$^1/_2$	$^1/_2$	$^2/_3$
	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_6$	$^1/_3$

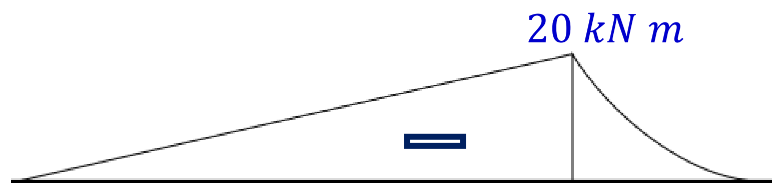


$$\int M^{SE} \cdot \frac{M^{DV_1}}{E \cdot J}\, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1) \cdot \left(10\, \frac{kN}{m} \cdot \frac{L^2}{8}\right) \cdot L}{E \cdot J} = -\frac{5}{12}\, \frac{kN}{m} \cdot \frac{L^3}{E \cdot J}$$

$$\int M^{SE} \cdot \frac{M^{DV_2}}{E \cdot J}\, dx \Longrightarrow$$

α				
	1	1/2	1/2	2/3
	1/2	1/3	1/6	1/3





$$\int M^{SE} \cdot \frac{M^{DV_2}}{E \cdot J}\, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1) \cdot (-20\ kN\ m) \cdot L}{E \cdot J} = \frac{20}{3} \cdot \frac{L}{E \cdot J}\ kN\ m$$

$$\theta_B = \int M^{SE} \cdot \frac{M^{DV_1}}{E \cdot J}\, dx + \int M^{SE} \cdot \frac{M^{DV_2}}{E \cdot J}\, dx$$

Reemplazando y recordando que $\theta_B = 0$

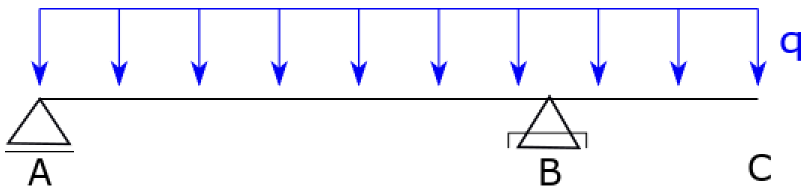
$$0 = -\frac{5}{12}\frac{kN}{m} \cdot \frac{L^3}{E \cdot J} + \frac{20}{3} \cdot \frac{L}{E \cdot J}\, kN\, m$$

$$\frac{5}{12}\frac{kN}{m} \cdot \frac{L^3}{E \cdot J} = \frac{20}{3} \cdot \frac{L}{E \cdot J}\, kN\, m \rightarrow \frac{5}{12} \cdot L^2 = \frac{20}{3}\, m^2$$

$$\boxed{L = 4\, m}$$

b) Desplazamiento en “C”

DV

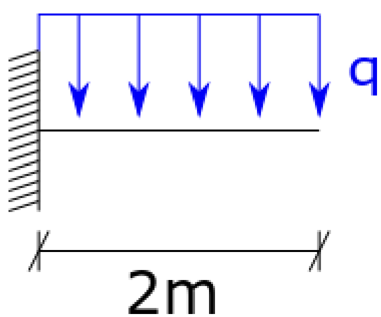


SE

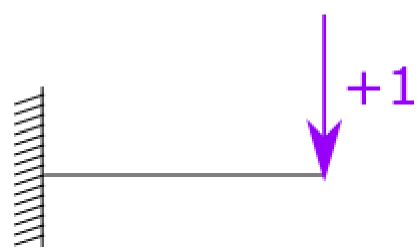
Pero sabemos que en el punto B no hay giros ni desplazamientos

El punto B funciona como un empotramiento

DV

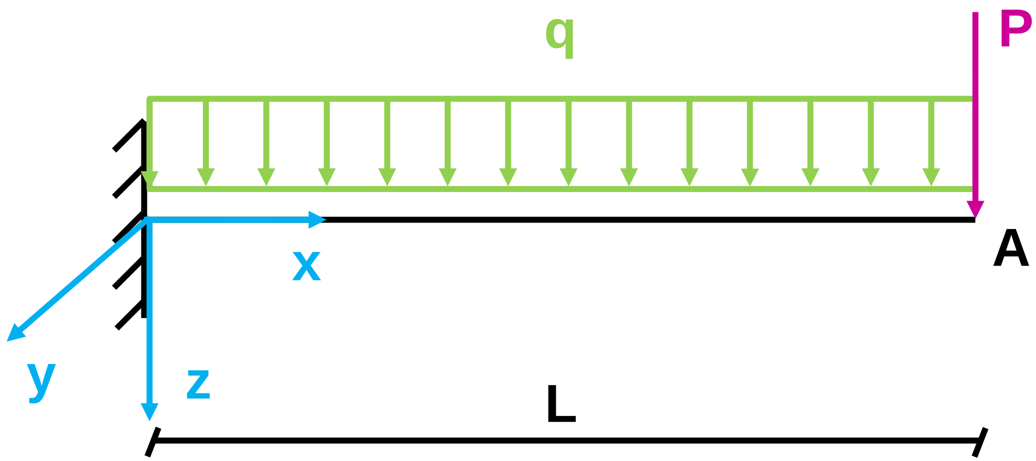


SE

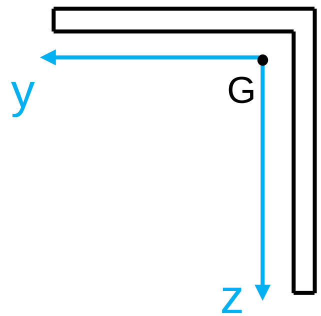


Ejercicio 4:

a) Calcular el desplazamiento máximo del punto A



Datos



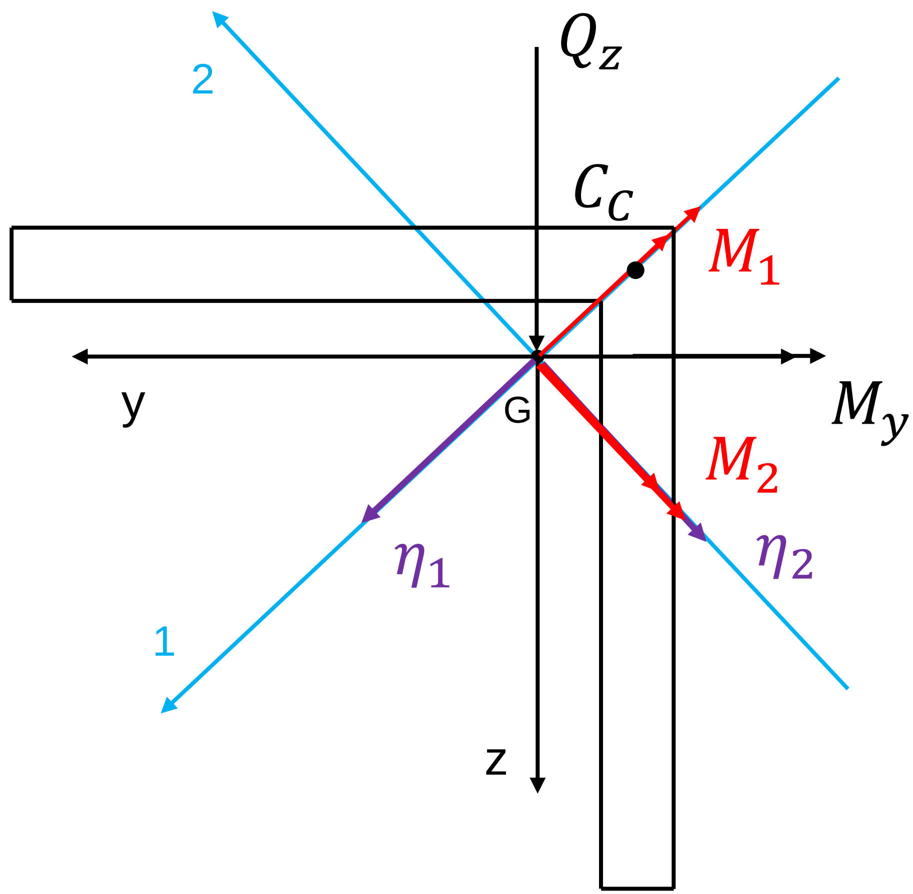
L

P, q

E

$Perfil\ angulo\ de\ alas\ iguales$

- Analizamos la sección



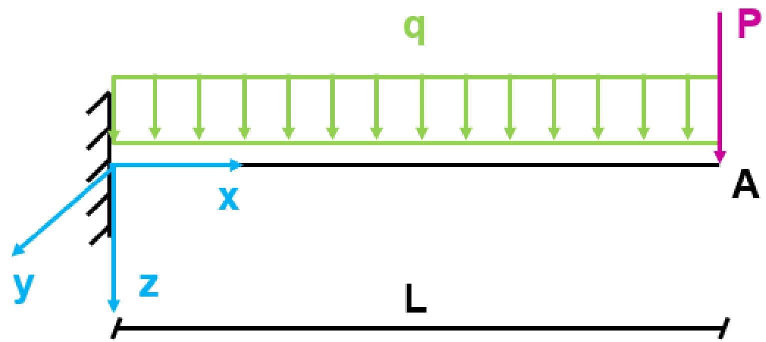
¡Observación!
Tenemos que trabajar con los ejes principales de inercia

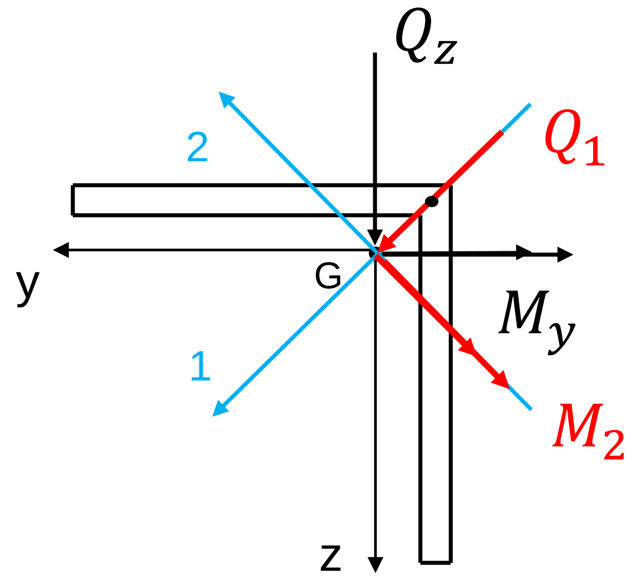
$$M_1 = M_y \cdot \cos 45^0 = M_2$$

¡Observación!
Aparece un efecto de torsión debido a que Q no pasa por el centro de corte

Desplazamiento $\eta_{A,1}$

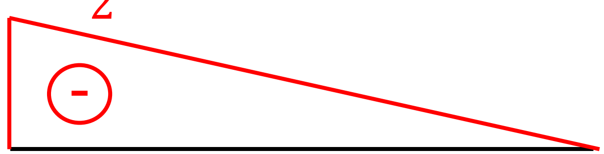
- Diagramas de la deformación virtual



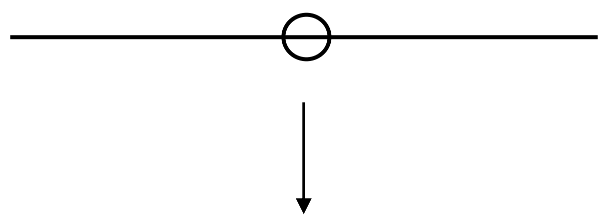


$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P \cdot L$

$M_{2,P}$

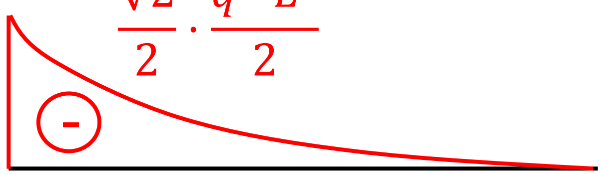


Mt



$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{q \cdot L^2}{2}$

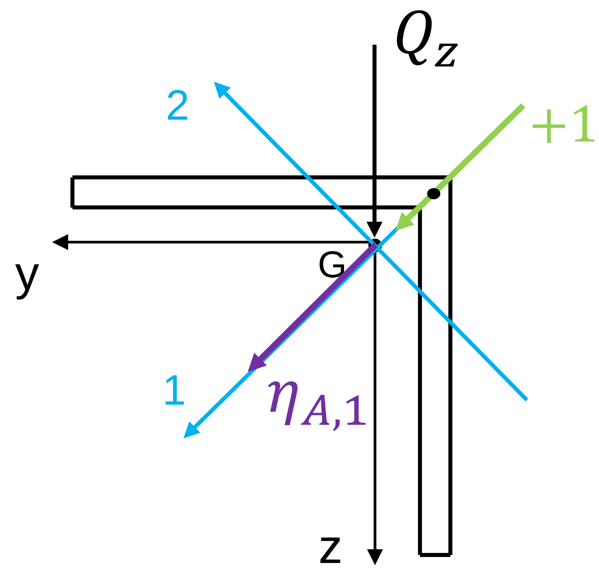
$M_{2,q}$

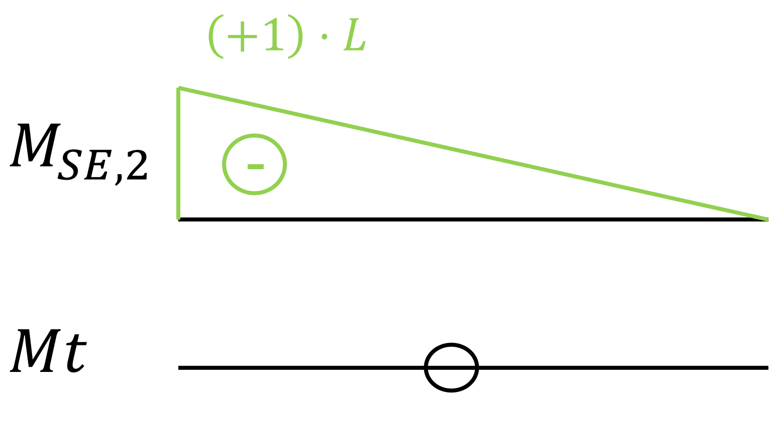


Q_1 pasa
por el centro de corte

- Sistema equilibrado → Aplicamos fuerza unitaria en **A** con dirección 1

- *Sección A*

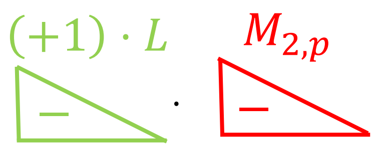


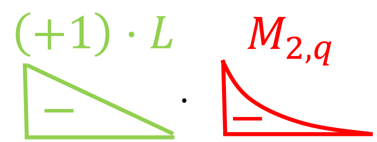


- Aplicamos el **Teorema de los trabajos virtuales**

$$(+1)\cdot \eta_{A,1} = \int \frac{M_2^{SE}\cdot M_2^{DV}}{E\cdot J_2}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int \frac{M_t^{SE}\cdot M_t^{DV}}{G\cdot J}\,dx}_{=\,0}$$

$$(+1)\cdot \eta_{A,1} = \int_0^L \frac{(+1)\cdot L \;\cdot\; M_{2,p}}{E\cdot J_2}\,\mathrm{d}x + \int_0^L \frac{(+1)\cdot L \;\cdot\; M_{2,q}}{E\cdot J_2}\,\mathrm{d}x$$



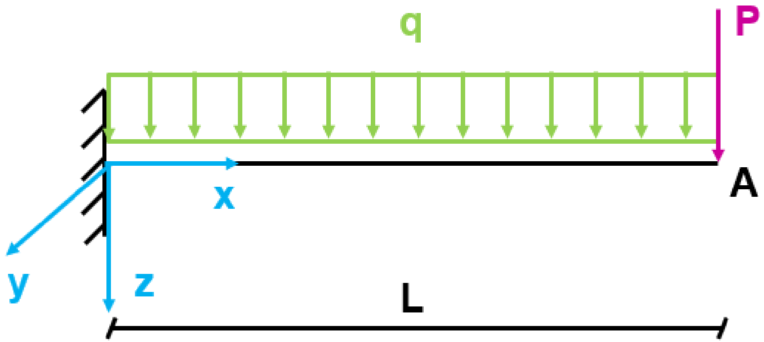


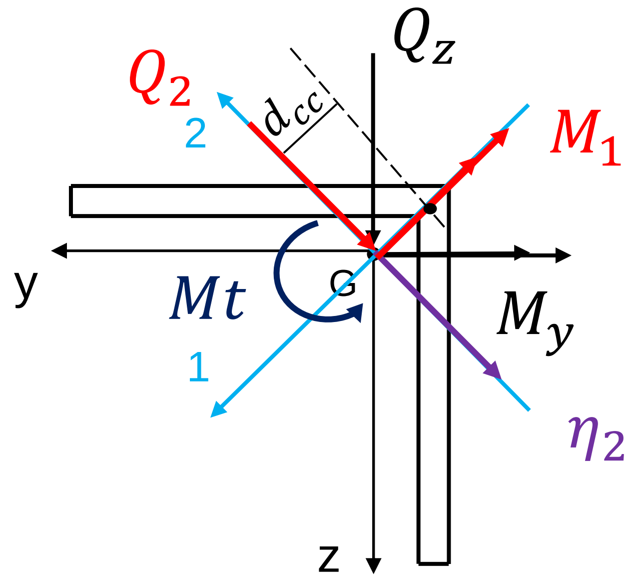
$$(+1)\cdot \eta_{A,1} = \frac{1}{3}\cdot\left(-(+1)\cdot L\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(-\mathrm{P}\cdot L)}{E\cdot J_2}\cdot L + \frac{1}{4}\cdot\left(-(+1)\cdot L\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(-q\cdot L^2)}{2\cdot E\cdot J_2}\cdot L$$

$$\boxed{\eta_{A,1} = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot E\cdot J_2}\cdot\left(\frac{P\cdot L^3}{3}+\frac{q\cdot L^4}{8}\right)}$$

Desplazamiento η_2

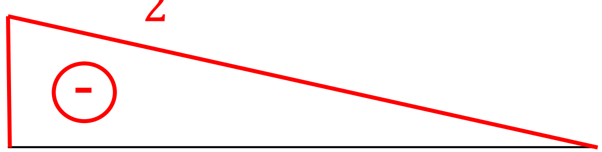
- Diagramas de deformación virtual





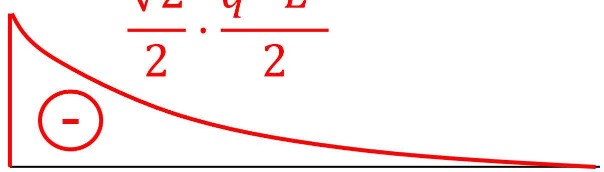
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P \cdot L$

$M_{1,P}$

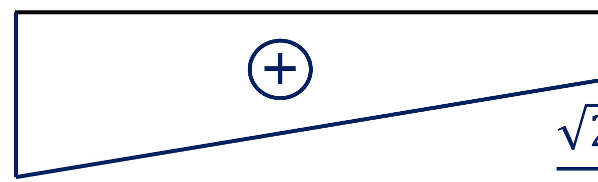


$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{q \cdot L^2}{2}$

$M_{1,q}$



Mt

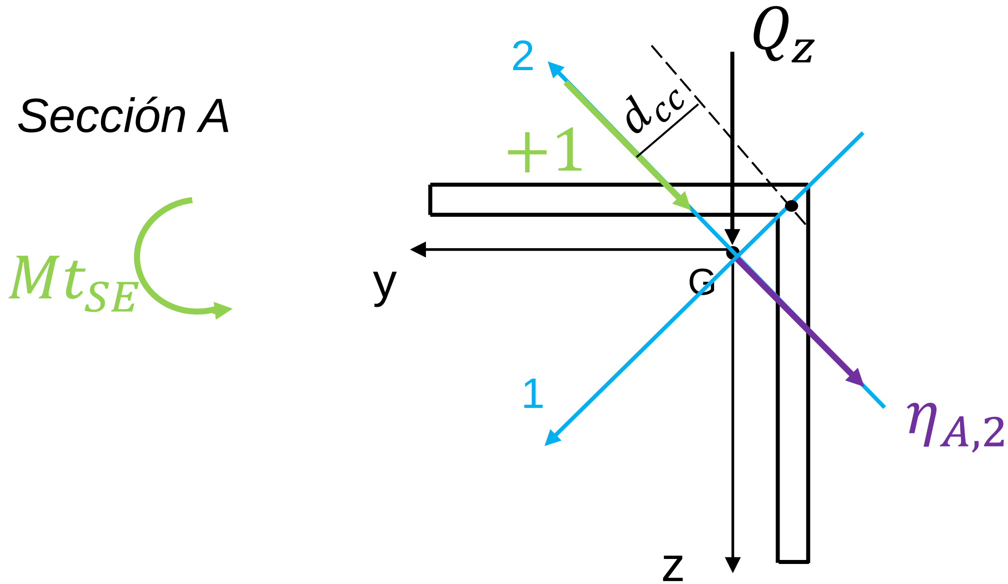


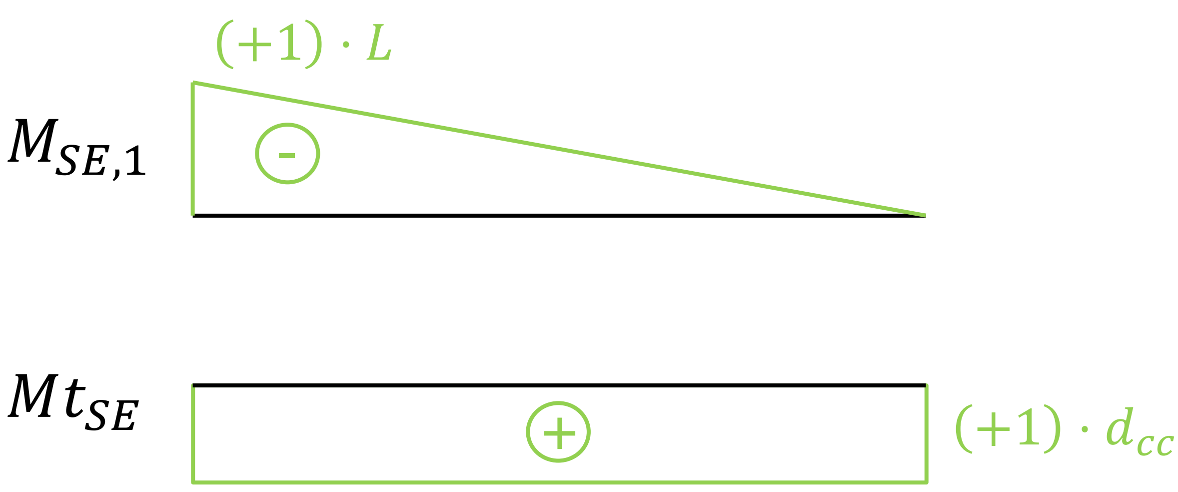
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P \cdot d_{cc}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (P + \mathrm{q} \cdot L) \cdot d_{cc}$

- Sistema equilibrado ⟶ Aplicamos fuerza unitaria en **A** con dirección 2

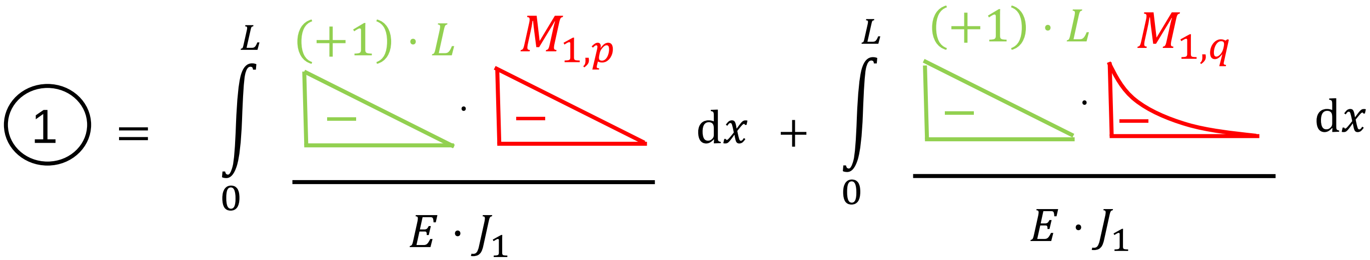
  - *Sección A*





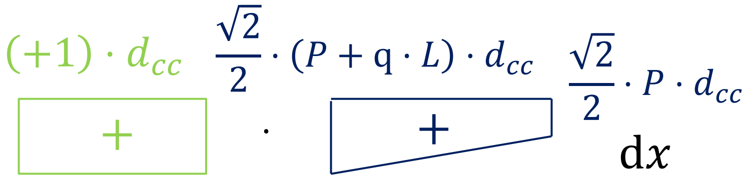
- Aplicamos el **Teorema de los trabajos virtuales**

$$(+1) \cdot \eta_{A,2} = \underbrace{\int \frac{M_1^{SE} \cdot M_1^{DV}}{E \cdot J_1} \mathrm{d}x}_{①} + \underbrace{\int \frac{M_t^{SE} \cdot M_t^{DV}}{\mathrm{G} \cdot J} dx}_{②}$$



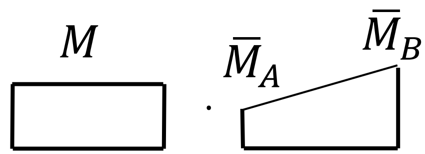
$$① = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot E \cdot J_1} \cdot \left(\frac{P \cdot L^3}{3} + \frac{q \cdot L^4}{8} \right)$$

(2) $= \displaystyle\int_0^L$



$$\frac{\ldots}{G \cdot J}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot G \cdot J} \cdot d_{cc}^2 \cdot L \cdot (2 \cdot P + q \cdot L)$$

Aplicando la fórmula
y reordenando



$$= \frac{1}{2} \cdot M \cdot (\bar{M}_A + \bar{M}_B) \cdot L$$

- Entonces,

$$\eta_{A,2} = (1) + (2)$$

$$\eta_{A,2} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot E \cdot J_1} \cdot \left(\frac{P \cdot L^3}{3} + \frac{q \cdot L^4}{8}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot G \cdot J} \cdot d_{cc}^2 \cdot L \cdot (2 \cdot P + q \cdot L)$$

- Cual es el **desplazamiento máximo** del punto A?

$$\eta_{A,1} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot E \cdot J_2} \cdot \left(\frac{P \cdot L^3}{3} + \frac{q \cdot L^4}{8} \right)$$

$$\eta_{A,2} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot E \cdot J_1} \cdot \left(\frac{P \cdot L^3}{3} + \frac{q \cdot L^4}{8} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot \mathrm{G} \cdot \mathrm{J}} \cdot d_{cc}^2 \cdot L \cdot (2 \cdot P + q \cdot L)$$

- El **desplazamiento máximo** del punto A, considerando esta sección, va a ser la composición de los calculados en los ejes 1 y 2

$$\eta_A = \sqrt{\left(\eta_{A,1}\right)^2 + \left(\eta_{A,2}\right)^2}$$

¡Observación!
La dirección del desplazamiento no es z