01 - OBJETO:

martes, 15 de junio de 2021 10:08

SA → DESPLAZAMIENTOS $\Delta L(x) = \delta(x) = \int \frac{N}{EA}\, dx.$

SF → NO VIMOS.

ST → " $\phi(x) = \int \frac{M_T(x)}{G \cdot I_p} \cdot dx$ P/ secciones circulares "Coulomb"

FV → " $w(x) = \int dw = \int dc = \int \frac{k_y \cdot Q_z(x)}{G \cdot A}\, dx$

02 - NOMENCLATURA:

martes, 15 de junio de 2021 10:11

CARGAS $\begin{cases} p_z(x) = q_z(x). \\ p_y(x) = q_y(x) \end{cases}$

$\boxed{\begin{cases} M_y(x) \\ Q_z(x) \end{cases} \quad \begin{cases} M_z(x) \\ Q_y(x) \end{cases}}$ SOLICITACIONES

$w(x)$: DESPLAZAMIENTO EN 'z'

$v(x)$: " " 'y'

$u(x)$: " " 'x'.

$\theta_y(x)$: GIROS ALREDEDOR DEL EJE 'y'

$\chi_y(x)$: CURVATURA DE FLEXIÓN EJE 'y'

$\begin{cases} B_y = E \cdot I_y \\ B_z = E \cdot I_z \end{cases}$ RIGIDEZ A FLEXIÓN.

$\theta_z(x)$: " 'z'

$\chi_z(x)$: " 'z'

$C(x)$: CENTRO DE CURVATURA.

$\rho(x)$: RADIO " "

dx : DIFERENCIAL DE LONGITUD DE LA BARRA.

ds : " DEL ARCO DE LA ELÁSTICA DE LA BARRA.

$d\theta_y(x)$: VARIACIÓN DEL ÁNGULO ENTRE 2 SECCIONES dx

$d\theta_z(x)$: " " " " " dx

03 - HIPÓTESIS:

martes, 15 de junio de 2021 10:12

1) MATERIAL
- CONTINUOS
- HOMOGÉNEOS
- ISÓTROPOS.

2) COMPORTAMIENTO MECÁNICO

HLM → 'LEY DE HOOKE'

3) DESPLAZAMIENTOS: → $\boxed{\text{HLG}}$ O DE LOS PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS.

→ HLE:

→ HLC:

4) DEFORMACIONES: → $\boxed{\text{H P DEFORMACIONES}}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} \ll 1 \\ \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} \lll \varepsilon_{ij} \end{cases}$$

5) CARGAS PSEUDOESTÁTICOS.

6) BARRAS DE EJE RECTO Y ESBELTAS $\frac{L}{d} \geq 10$.

04 - MÉTODOS DE CÁLCULO:

martes, 15 de junio de 2021 10:13

I MÉTODOS DIFERENCIALES : → MÉTODO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA LÍNEA ELÁSTICA.

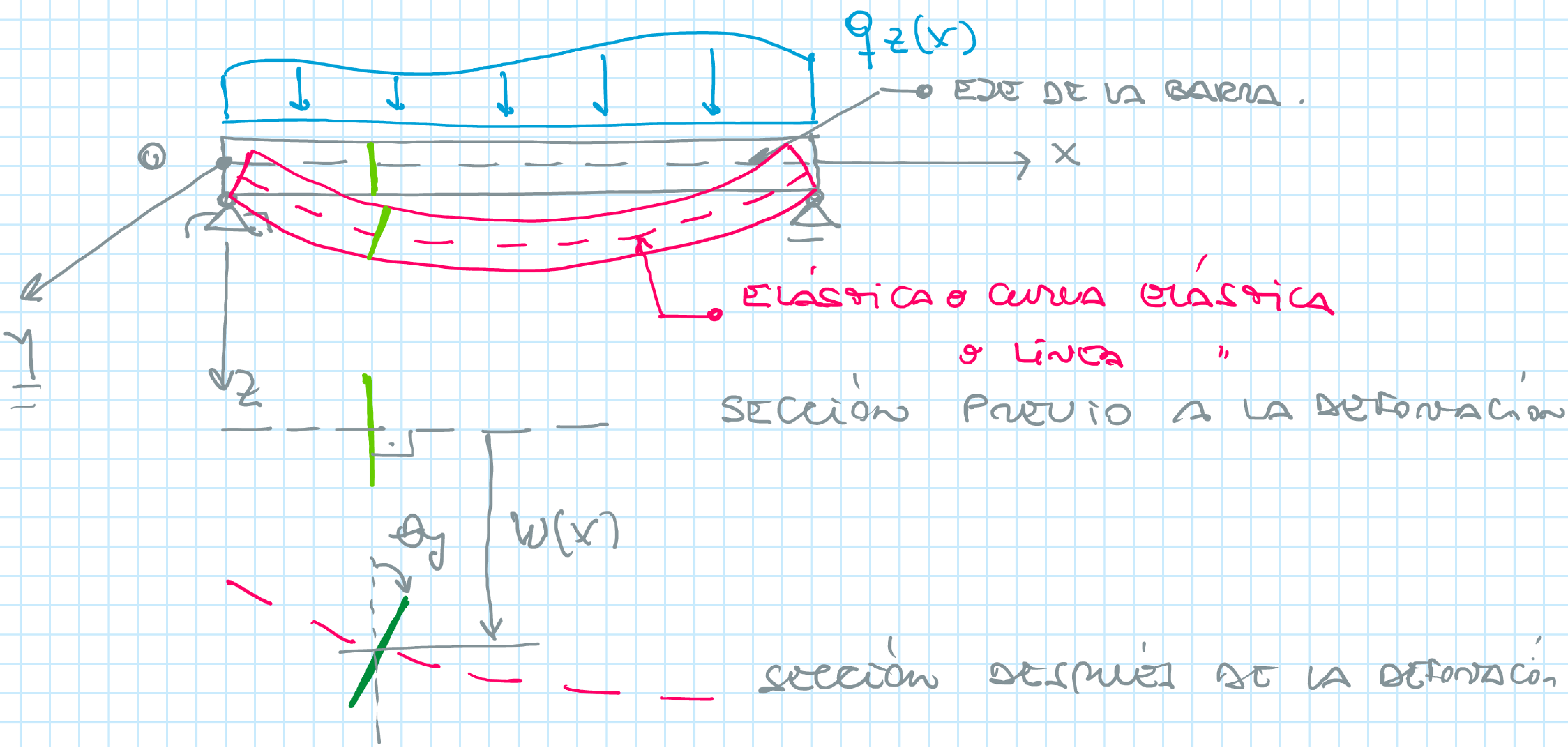
II " ENERGÉTICOS : → MÉTODO ENERGÉTICO BASADO EN EL TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES = TTV.

05 - DEFINICIÓN:

martes, 15 de junio de 2021 11:13

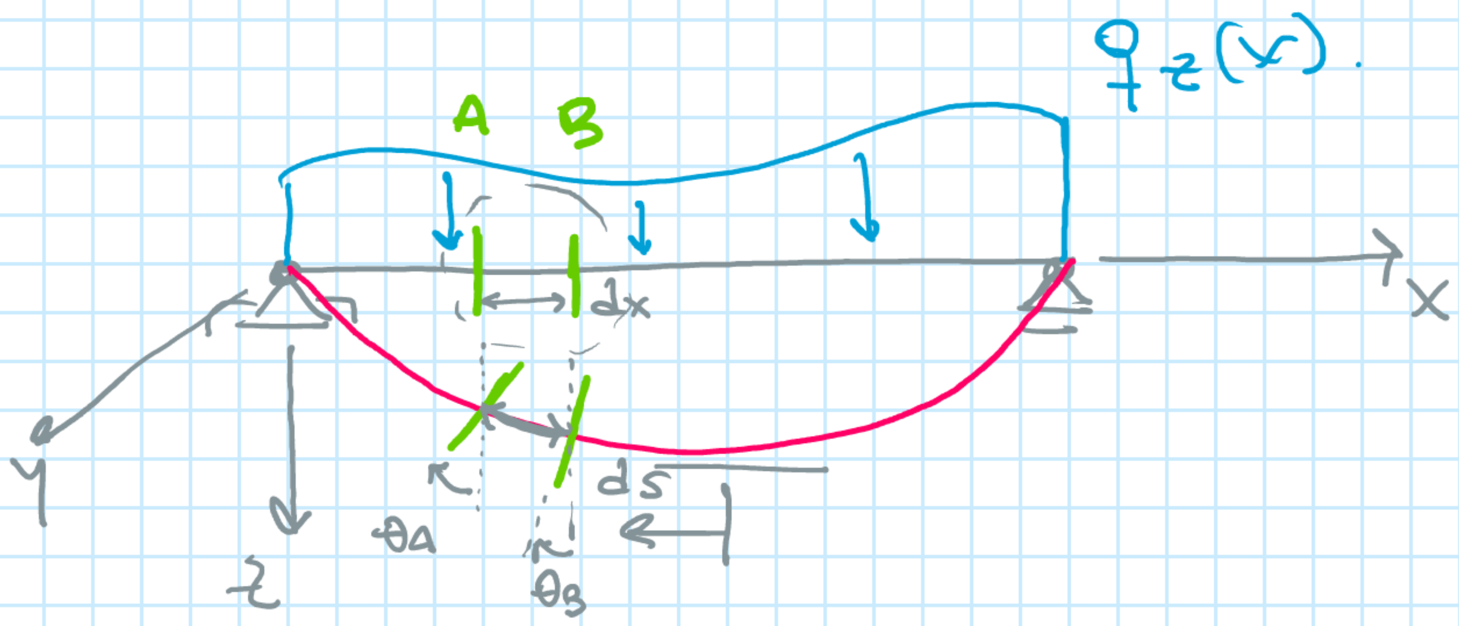
LÍNEA ELÁSTICA
CURVA ELÁSTICA
ELÁSTICA

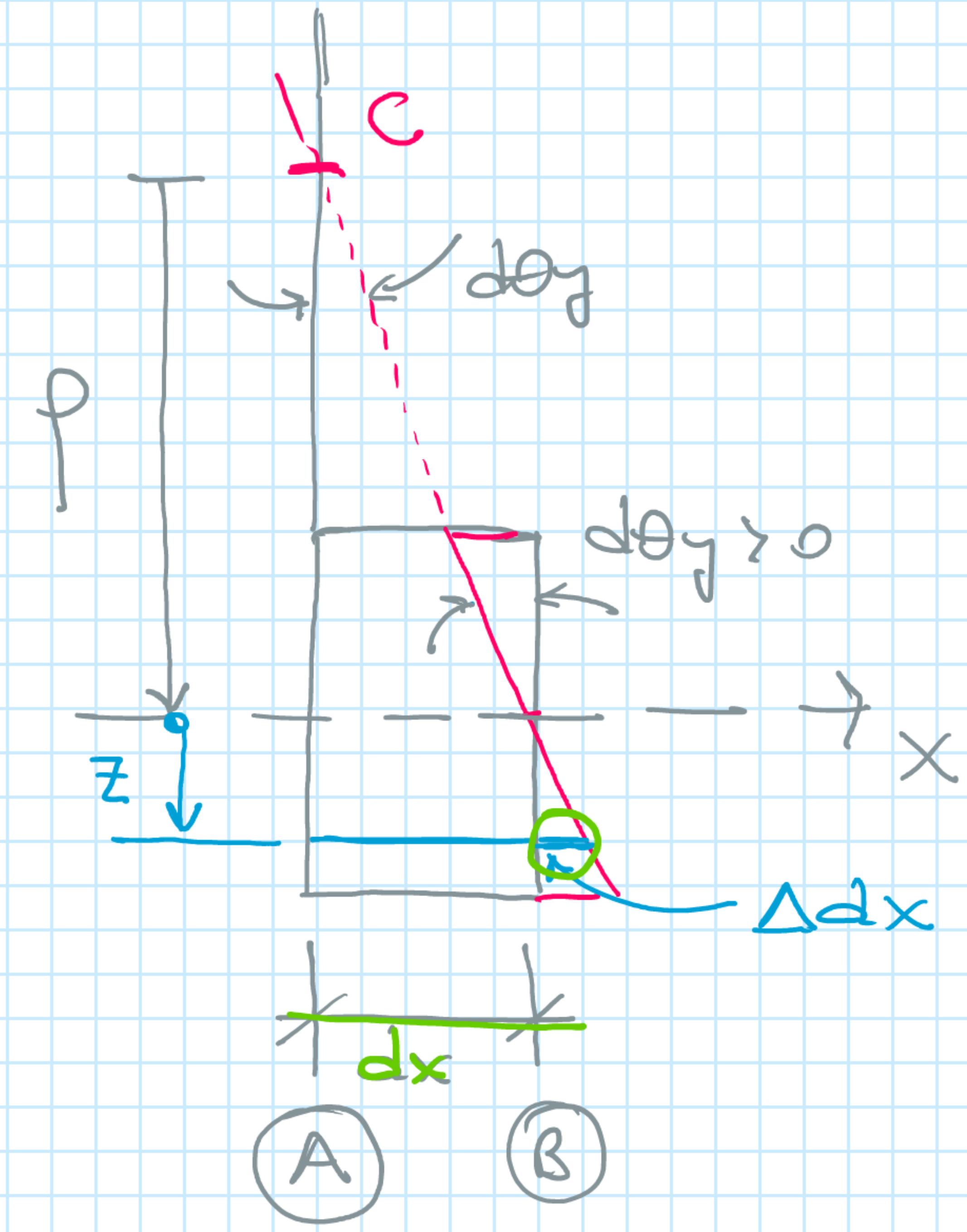
DEFORMADA DEL EJE DE LA BARRA O DEL ELEMENTO ESTRUCTURAL.



06 - DESARROLLO:

martes, 15 de junio de 2021 11:39





$\theta_A < 0$

$\theta_B < 0$

$|\theta_A| > |\theta_B|$

$\Delta\theta_{BA} = \theta_B - \theta_A = d\theta > 0$.

$$\rho \cdot d\theta_y = dx \qquad (1a)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} \qquad (1b).$$

$$z \cdot d\theta_y = \Delta dx\big]_z \qquad (2a).$$

$$d\theta_y = \frac{\Delta dx\big]_z}{z} \qquad (2b).$$

$$\frac{d\theta_y}{dx} = \frac{\Delta dx\big]_z}{dx} \cdot \frac{1}{z} = \frac{\varepsilon_x}{z} \qquad (3).$$

Combino (1b) y (3).

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{\varepsilon_x}{z}} \qquad (4)$$

Válida p/ cualquier tipo de material con cualquier comportamiento (elástico / plástico)

Material con comportamiento elástico → Ley de Hooke.

$$\sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x)$$

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\sigma_x(x)}{E} \qquad (5)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y(x)}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{\sigma_x(x)}{E \cdot z} \qquad (6).$$

FLEXIÓN SIMPLE

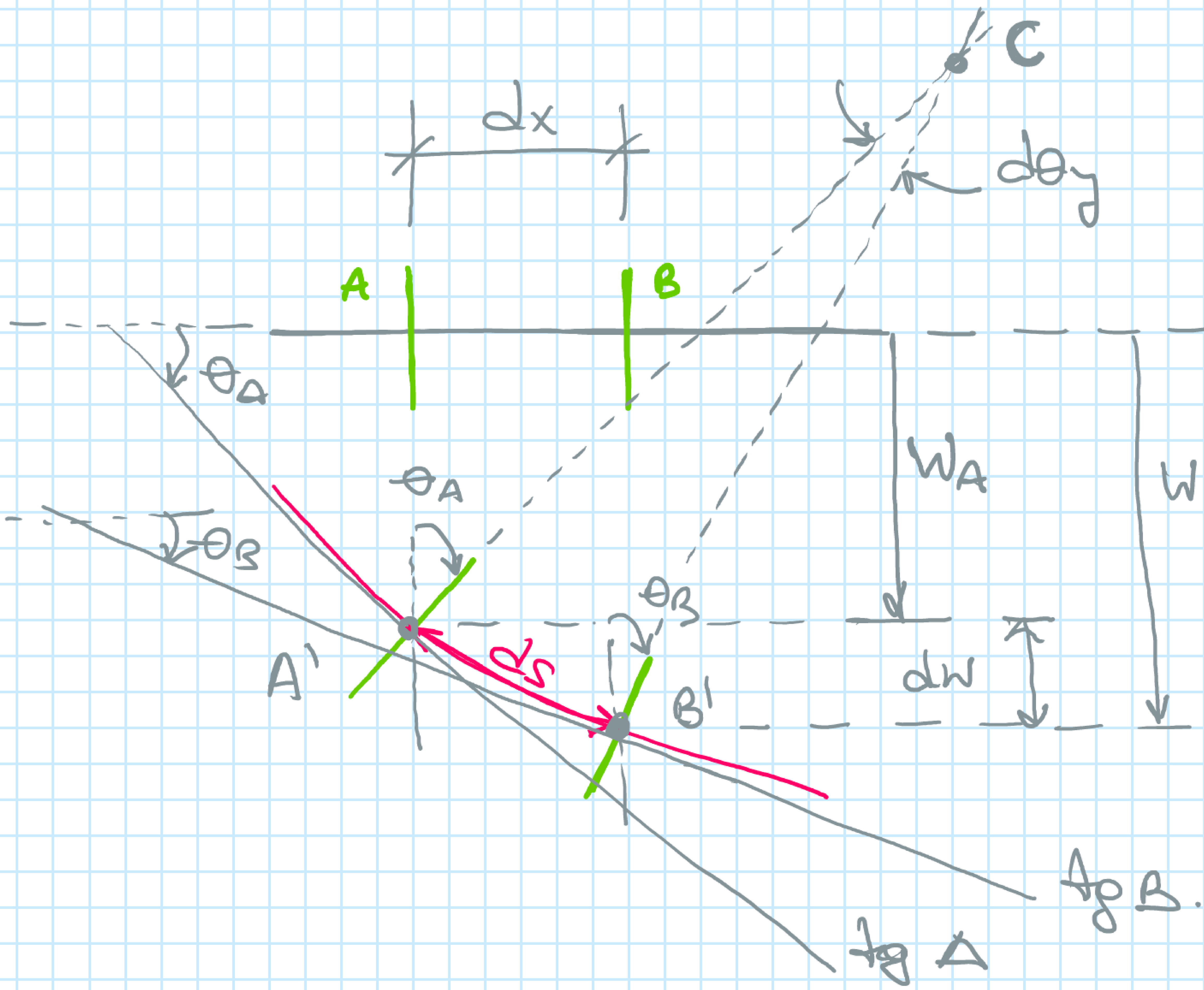
$$\sigma_x(x) = \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \qquad (7).$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y(x)}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{M_y}{E I_y} \cdot \frac{\cancel{z}}{\cancel{z}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y(x)}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{M_y(x)}{E \cdot I_y(x)} = \frac{M_y(x)}{B_y(x)}} \qquad (8)$$

06 - DESARROLLO:

martes, 15 de junio de 2021 12:03



$$\overline{CA'} = \rho(A)$$

$$\overline{CB'} = \rho(B)$$

$$\theta_A = \theta.$$

$$\theta_B = \theta + d\theta.$$

$$\theta_B - \theta_A = d\theta.$$

$$W_B = W_A + dW$$

$$ds = \rho \cdot d\theta_y \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{ds} \quad (9)$$

$\boxed{\text{H P DESPLAZ} \quad + \quad \text{HP. DEFORM}}$

$$ds \cong dx$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} \quad (10).$$

$$\tan\theta_y = \frac{dw}{dx} \quad (11) \rightarrow \text{HP DESPLAZ.} \quad \tan\theta_y \cong \theta_y$$

$$\theta_y(x) = \frac{dw(x)}{dx} = w'(x) \quad (12) \leftarrow$$

$$\theta'_y(x) = \frac{d\theta_y(x)}{dx} = \frac{d^2w(x)}{dx^2} = w''(x). \quad (13)$$

$$\theta'_y(x) = \frac{d\theta_y(x)}{dx} = \frac{d^2w(x)}{dx^2} = w''(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{M_y(x)}{B_y} \quad (14).$$

06 - DESARROLLO:

martes, 15 de junio de 2021 12:03

DE (12)

$$\underbrace{\underbrace{\theta_y(x)}_{-} = - \boxed{\underbrace{\frac{dw(x)}{dx}}_{+}}}$$

$\theta_y(x) < 0$

$dw(x) > 0$

$dx > 0$

DERIVO LA (12) P/ CONEXIÓN LA (14):

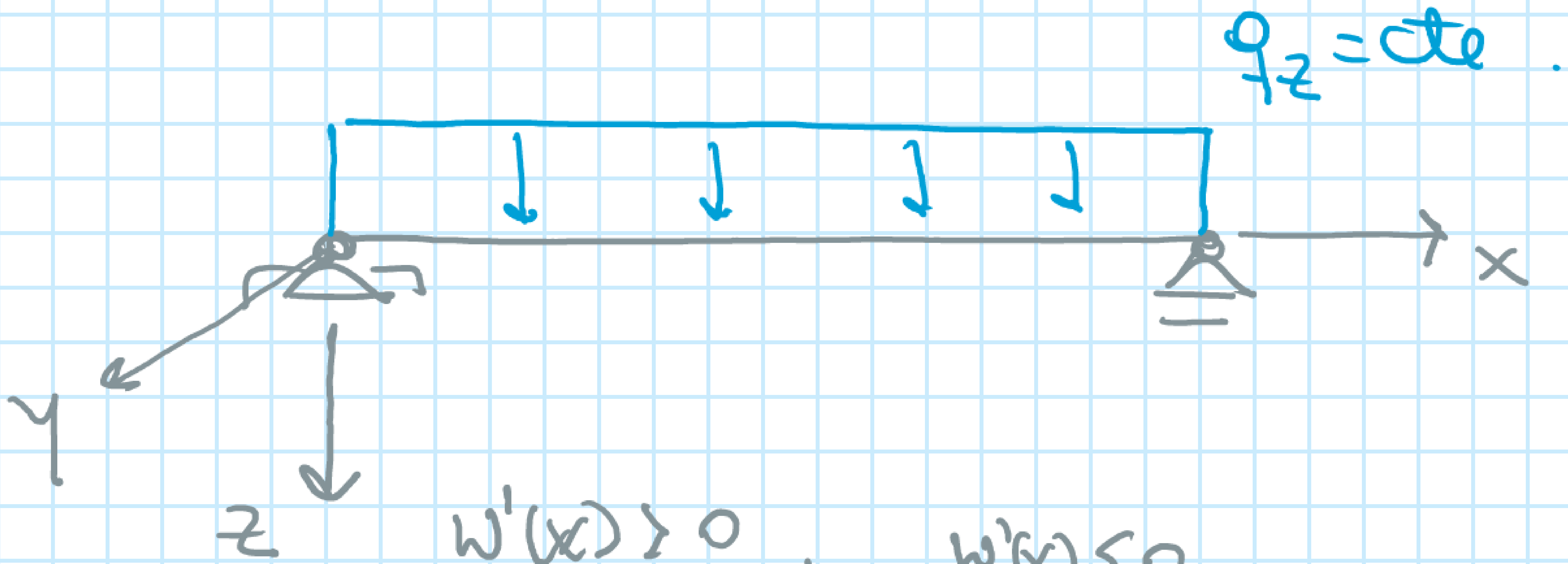
$$\boxed{w''(x) = \frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\theta'_y(x) = -\frac{d\theta_y(x)}{dx} = -\frac{M_y(x)}{B_y} = -\frac{1}{\rho}} \quad (15)$$

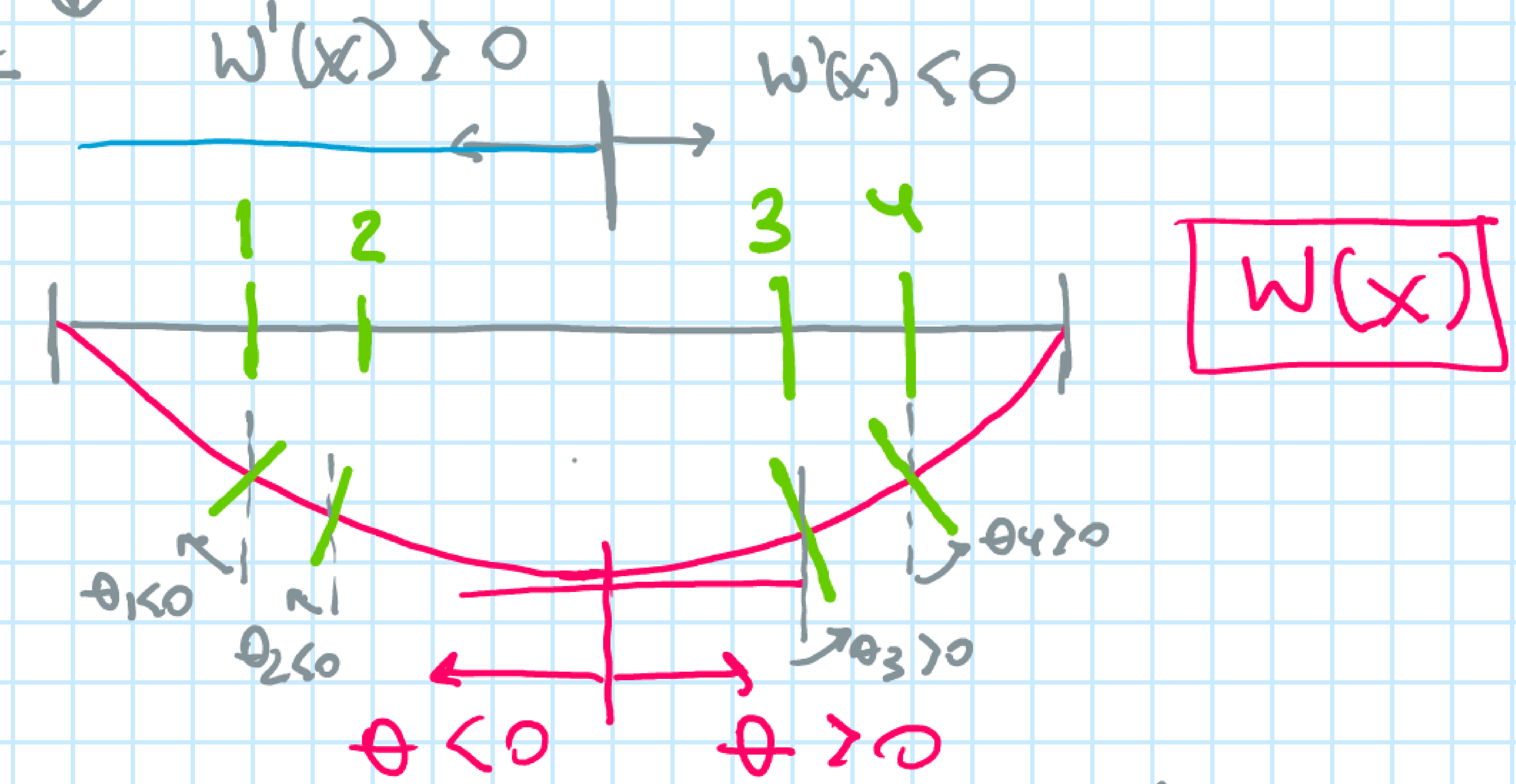
$$w'''(x) = -\theta''_y(x) = -\frac{M'_y(x)}{B_y} = -\frac{Q_z(x)}{B_y} \quad (16).$$

$$w^{IV}(x) = -\theta'''_y(x) = -\frac{M''_y(x)}{B_y} = -\frac{Q'_z(x)}{B_y} = +\frac{q_z(x)}{B_y} \quad (17).$$

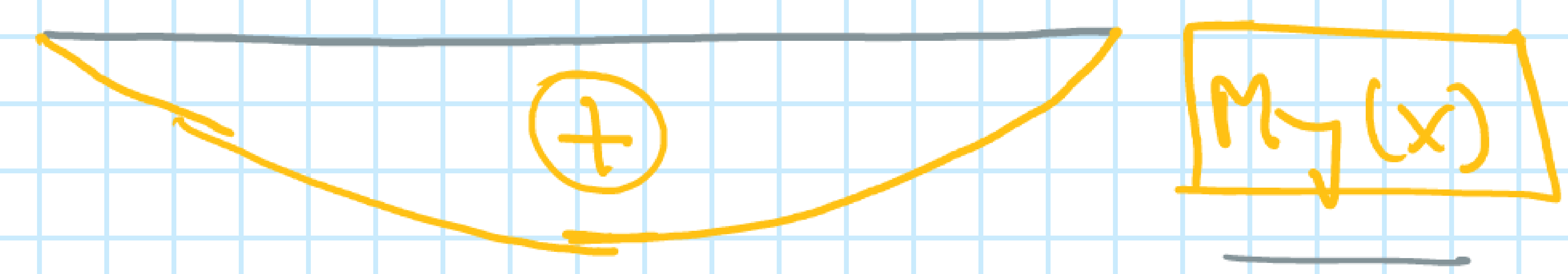
07 - ANÁLISIS CONCEPTUAL BÁSICO:

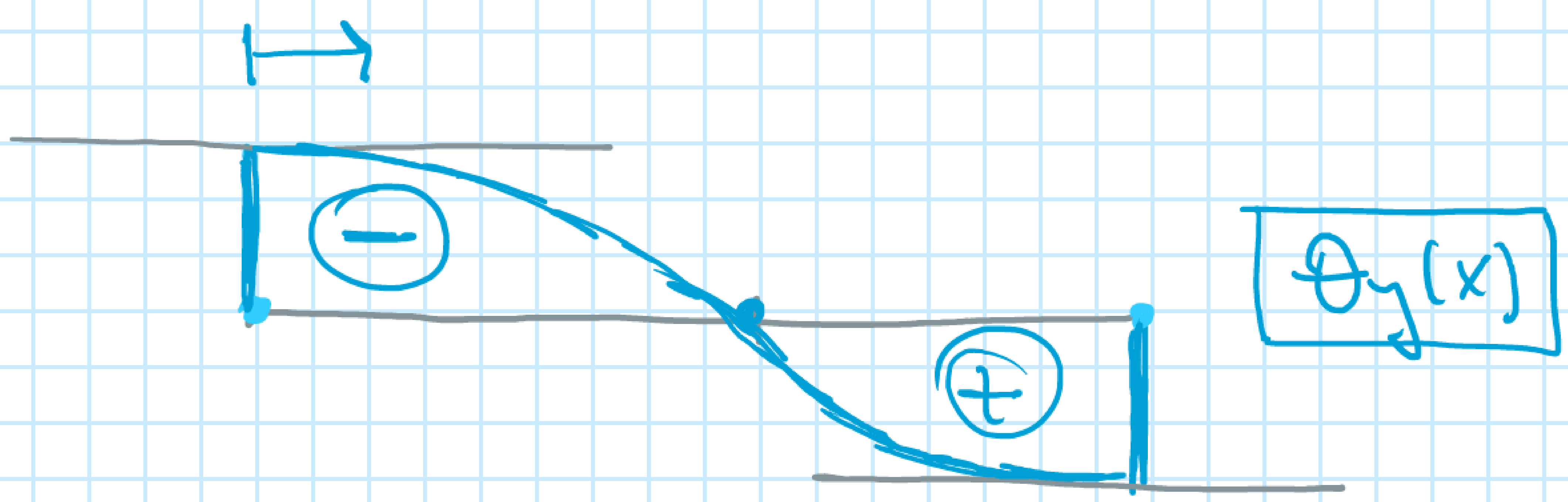
martes, 15 de junio de 2021 12:27

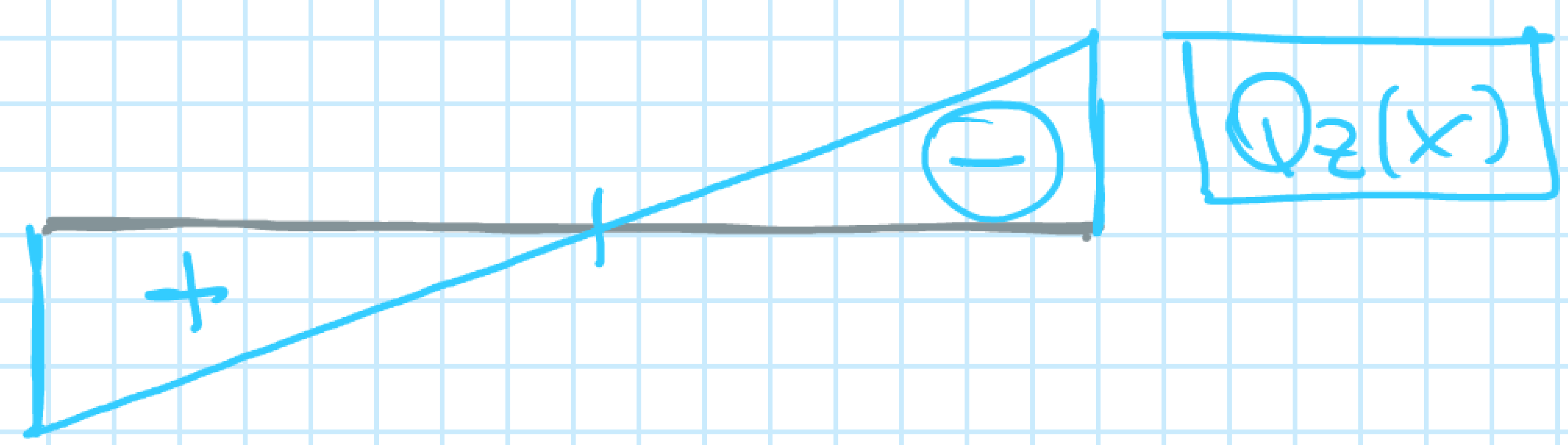




$|\theta_1| > |\theta_2|$ $|\theta_4| > |\theta_3|$







08 - PLANTEO GENERAL:

martes, 15 de junio de 2021 12:41

I RELACIONES BÁSICAS :

$$w(x)$$

$$w'(x) = -\theta_y(x)$$

$$w''(x) = -\theta'_y(x) = -\frac{M_y(x)}{B_y}$$

$$w'''(x) = -\theta''_y(x) = -\frac{M'_y(x)}{B_y} = -\frac{Q_z(x)}{B_y}$$

$$\boxed{w^{IV}(x) = -\theta'''_y(x)} = -\frac{M''_y(x)}{B_y} = -\frac{Q'_z(x)}{B_y} = \boxed{+\frac{q_z(x)}{B_y}}$$

08 - PLANTEO GENERAL:

martes, 15 de junio de 2021 12:41

II EXPRESIONES BÁSICAS P/ LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA:

$$W^{IV}(x) = \frac{q_z(x)}{B_y}$$

$$W'''(x) = \frac{q_z(x)}{B_y} \cdot x + C_1$$

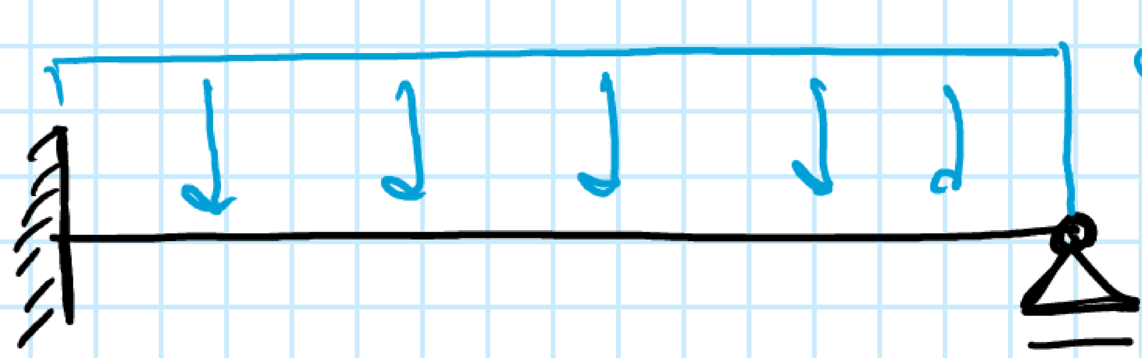
$$W''(x) = \frac{q_z(x)}{2B_y} \cdot x^2 + C_1 x + C_2 \leftarrow$$

$$W'(x) = \frac{q_z(x)}{6B_y} \cdot x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$W(x) = \frac{q_z(x)}{24 B_y} \cdot x^4 + \frac{C_1}{6} \cdot x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

$$\rightarrow W''(x) = -\frac{M_y(x)}{B_y}$$

$$\boxed{M_y = -B_y \cdot W''(x)}$$

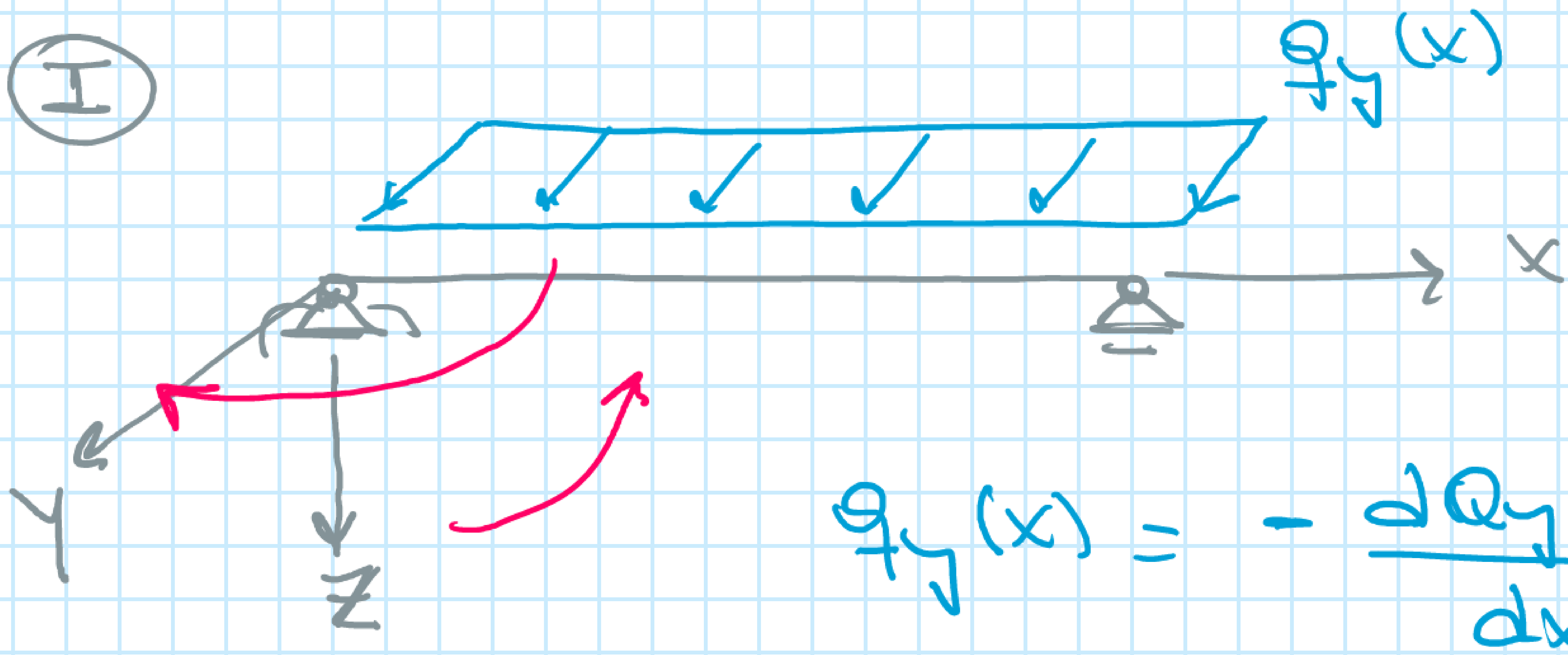


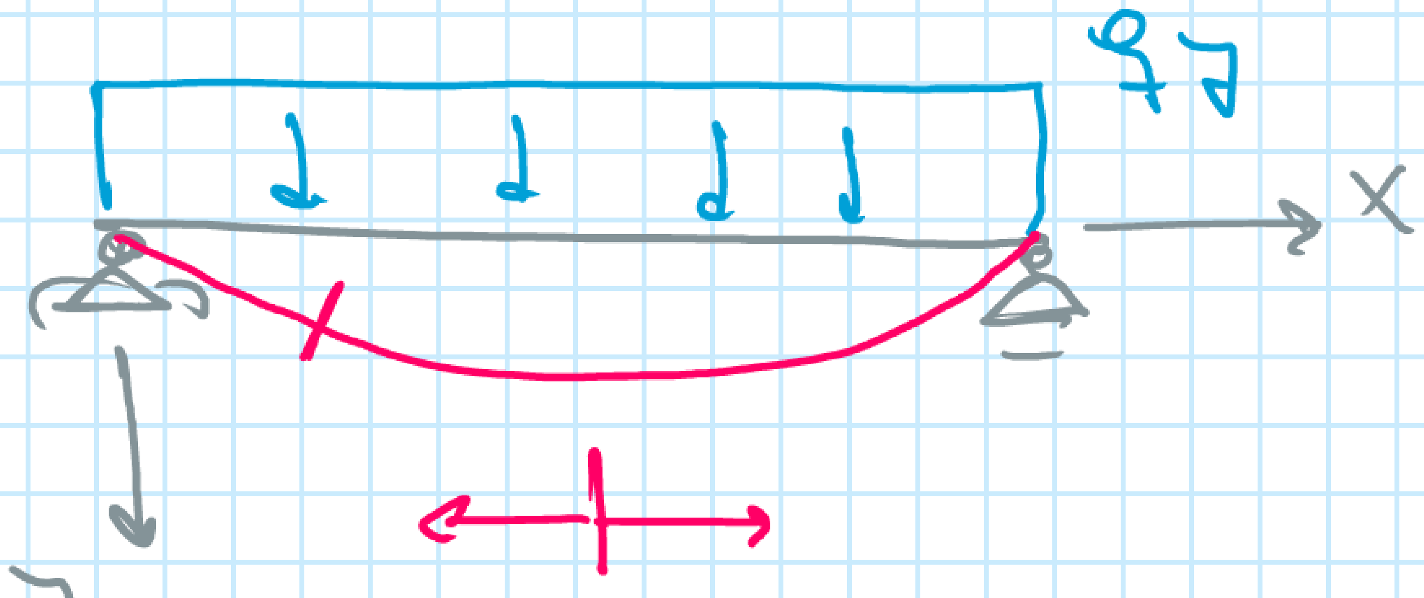
$q_z(x) = cte.$

VARIABLE	TIPO CB	$x = 0$	$x = L$
DESPLAZAMIENTO	CBC	$w(0) = 0$	$w(L) = 0$
GIROS	CBC	$w'(0) = 0$	
MOMENTOS	CBE		$w''(x=L) = 0$
CORTE	CBE		

09 - COMENTARIOS:

martes, 15 de junio de 2021 12:56





$\theta_z > 0 \qquad \theta_z < 0.$

$$q_y(x) = -\frac{dQ_y(x)}{dx}$$

$$Q_y(x) = -\frac{dM_z(x)}{dx}$$

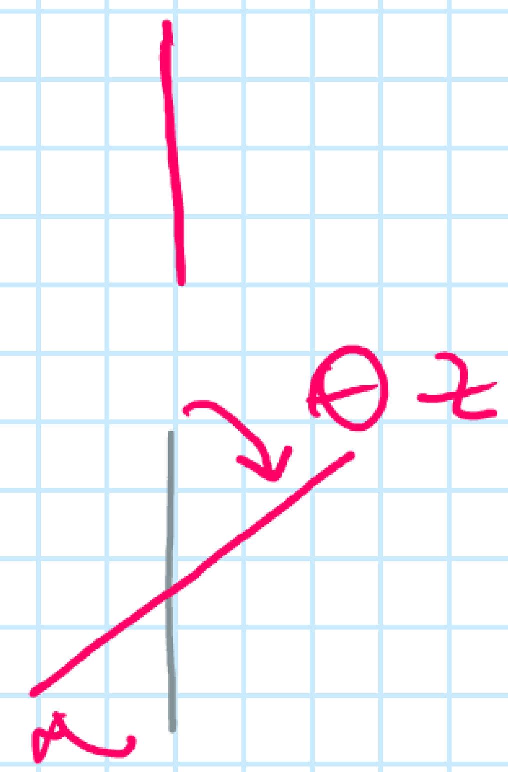
$$v'(x) = \theta_z(x)$$

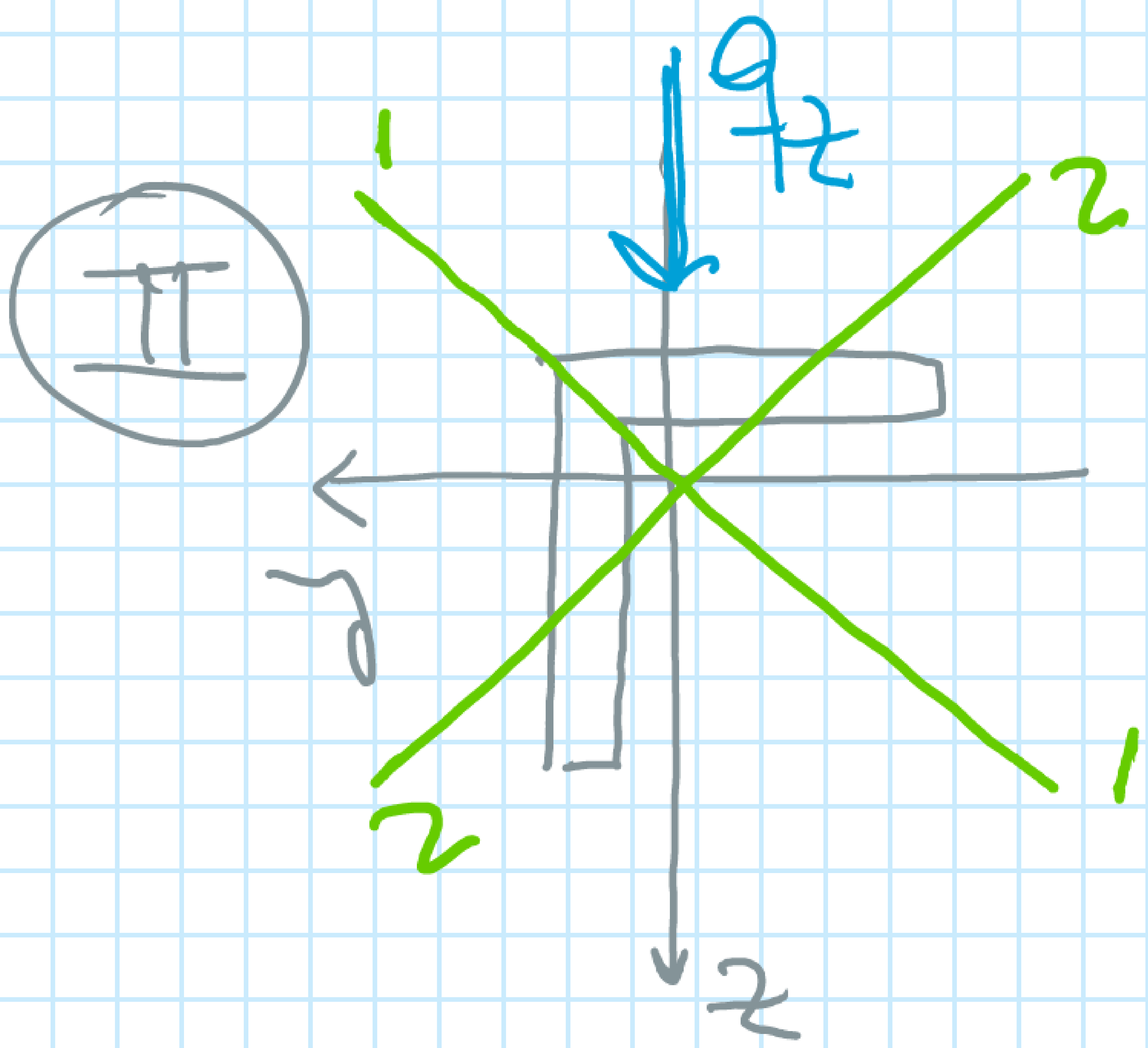
x y z

$x \times y = z$

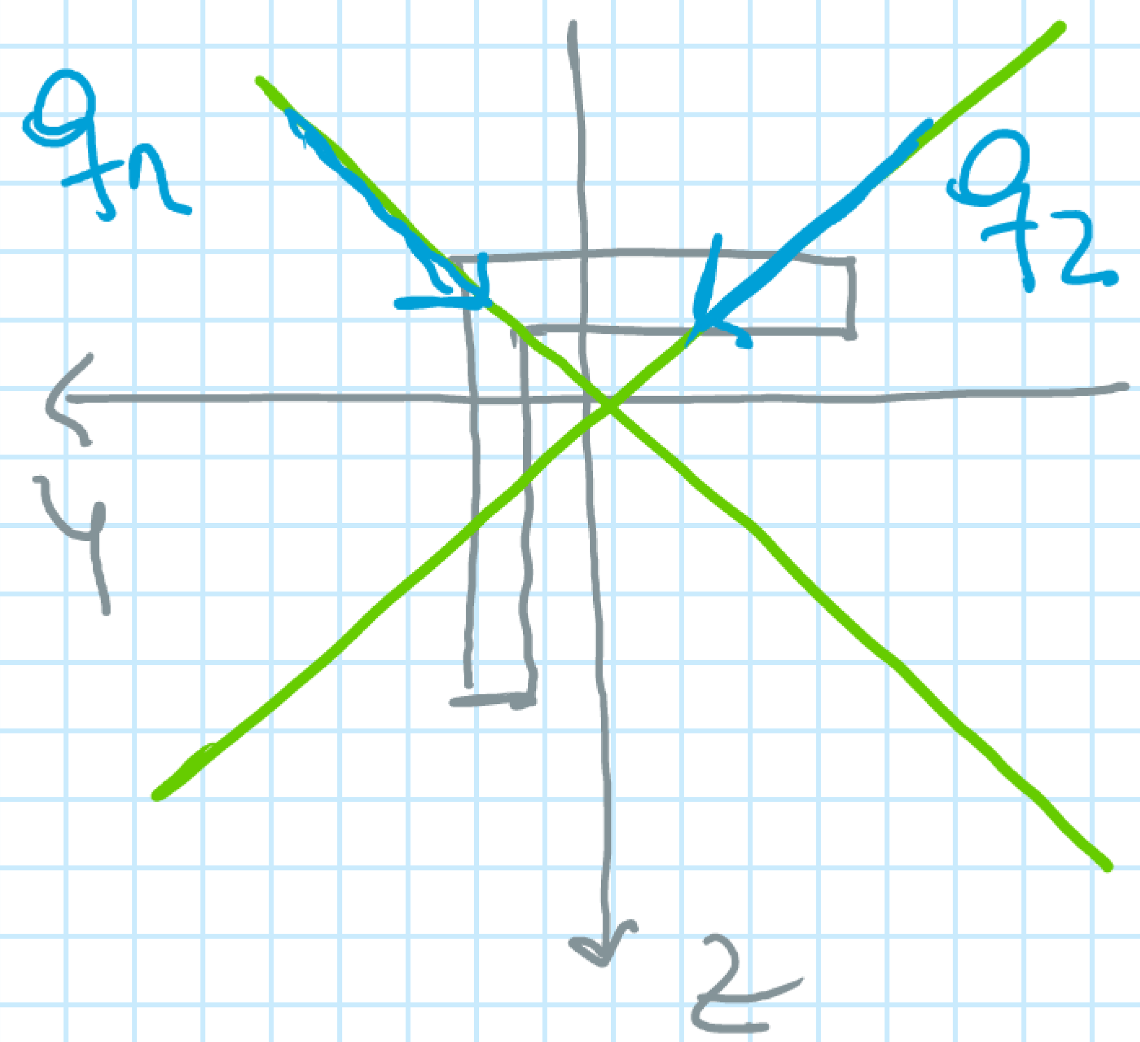
$y \times z = x$

$z \times x = y$





$\equiv$



2 elásticas d_1

d_2

2 función cómo

2 " M

2 " Q.

FLEXIÓN SIMPLE OBLICUA

2 FLEXIONES SIMPLES RECTAS
(SE TRATA C/U EN FORMA INDEPENDIENTE)

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

10 - CdD POR APLICACIÓN DEL TTV: (Método Energético):

martes, 15 de junio de 2021 13:09

$$W = U \qquad \text{Principio de equivalencia.}$$

$$\delta W = \underline{\underline{\delta U}}$$

$$\delta U = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{bi} N \cdot \underline{dn} + \int_{bi} Q_y \, \underline{dc_y} + \int_{bi} Q_z \, \underline{dc_z} + \int_{bi} M_x \, \underline{d\phi} + \int_{bi} M_y \, \underline{d\theta_y} + \int_{bi} M_z \, \underline{d\theta_z} \right] \qquad \text{(A)}$$

Válida p/ cualquier material y p/ cualquier comportamiento mecánico.

- Si el sistema es elástico y proporcional (ley de Hooke).

$$dn = \frac{N(x)}{E \cdot A} \cdot dx \; ; \qquad dc_y = \frac{\kappa_z \, Q_y(x)}{G \cdot A} \, dx \; ; \qquad dc_z = \frac{\kappa_y \, Q_z(x)}{G \cdot A} \cdot dx$$

$$d\theta_y = \frac{M_y(x)}{E \, I_y} \cdot dx \; ; \qquad d\theta_z = \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z} \cdot dx .$$

10 - CdD POR APLICACIÓN DEL TTV: (Método Energético):

martes, 15 de junio de 2021 13:09

$$d\phi = \frac{M_T(x)}{G\, I_p} \cdot dx$$ → T. de Coulomb → secciones circulares

$$d\phi = \frac{M_T(x)}{4\, G\, \Omega^2} \int \frac{ds}{e(s)} \cdot dx = \frac{M_T(x)}{G \cdot \underbrace{\dfrac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{e(s)}}}_{I_T}} \cdot dx = \frac{M_T}{G\, I_T}\, dx.$$

→ T. de Bredt → simplemente conexas de pequeño espesor.

$$d\phi = \frac{M_T(x)}{G \cdot I_T} \cdot dx$$ → T. de Saint Venant → perfiles abiertos

$$I_T = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot t_i^3$$

$$\delta U = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{b_i} \frac{N \cdot N}{E\,A} \cdot dx + \cancel{\int_{b_i} \frac{\kappa_z\, Q_y\, Q_y}{G\, A}\, dx} + \cancel{\int_{b_i} \frac{\kappa_y\, Q_z\, Q_z}{G\, A}\, dx} + \right.$$

$$\left. + \int_{b_i} \frac{M_T \cdot M_T}{G \cdot I_T} \cdot dx + \int_{b_i} \frac{M_y\, M_y}{E \cdot I_y} \cdot dx + \int \frac{M_z\, M_z}{E \cdot I_z}\, dx \right]$$ B

Si trabajamos con barras esbeltas $\kappa_y \cong 0$ $\kappa_z \cong 0$.

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES - UBA
FACULTAD DE INGENIERÍA - FI
DEPARTAMENTO DE ESTABILIDAD - DE

ESTABILIDAD II - EII-84.03

CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS

01 - OBJETO:

1.- El cálculo de desplazamientos en elementos estructurales solicitados exclusivamente a "Flexión".
Hasta ahora:

- Solicitación Axil - SA:	$\delta(x) = \Delta L(x)$	Visto en el dictado de SA
- Solicitación por Flexión - SF:	**???**	**Se verá con esta clase**
- Solicitación por Torsión - ST:	$\phi(x)$	Visto en el dictado de ST
- Flexión Variable - FV:	dc	Visto en el dictado de FV

2.- Cálculo de desplazamientos en un sistema estructural cualquiera bajo una combinación de esfuerzos internos.

02 - NOMENCLATURA:

VARIABLE - ABREVIACIÓN NOMENCLATURA	DESCRIPCIÓN
pz(x) = qz(x) :	Función de fuerzas activas en la dirección "Z"
py(x) = qy(x) :	Función de fuerzas activas en la dirección "Y"
My(x) :	Función Momento Flector alrededor del Eje "Y"
Qz(x) :	Función Esfuerzo de Corte en la dirección "Z"
Mz(x) :	Función Momento Flector alrededor del Eje "Z"
Qy(x) :	Función Esfuerzo de Corte en la dirección "Y"
w(x) :	Función desplazamiento en la dirección "Z"
v(x) :	Función desplazamiento en la dirección "Y"
u(x) :	Función desplazamiento en la dirección "X"

VARIABLE - ABREVIACIÓN NOMENCLATURA	DESCRIPCIÓN
$\theta y(x)$:	Función giros alrededor del Eje "Y"
$\chi y(x)$:	Función curvatura de flexión alrededor del Eje "Y" (ángulo específico de flexión)
$\theta z(x)$:	Función giros alrededor del Eje "Z"
$\chi z(x)$:	Función curvatura de flexión alrededor del Eje "Z" (ángulo específico de flexión)
By :	Rigidez a Flexión de la Barra respecto del Eje "Y" = E.Iy = E.Jy
Bz :	Rigidez a Flexión de la Barra respecto del Eje "Z" = E.Iz = E.Jz
c(x) :	Centro de curvatura
$\rho(x)$:	Radio de curvatura
dx :	Diferencial de longitud "inicial" de la barra
ds :	Diferencia del arco de la "Elástica" de la barra
$d\theta y(x)$:	Variación de los ángulos entre 2 secciones alrededor del Eje "Y" separadas un diferencial de longitud
$d\theta z(x)$:	Variación de los ángulos entre 2 secciones alrededor del Eje "Z" separadas un diferencial de longitud

03 - HIPÓTESIS:

1) - RESPECTO DEL MATERIAL:	- Continuos - Homogéneos - Isótropos
2) - COMPORTAMIENTO MECÁNICO DEL MATERIAL:	- Hipótesis de Linealidad Mecánica" : Validez de la "Ley de Hooke"
3) - RESPECTO A LOS DESPLAZAMIENTOS DE LA ESTRUCTURA:	- Hipótesis de Linealidad Geométrica o de los Pequeños Desplazamientos - Hipótesis de Linealidad Estática - Hipótesis de Linealidad Cinemática
4) - RESPECTO A LAS DEFORMACIONES DE LA ESTRUCTURA:	- Hipótesis de Pequeñas Deformaciones
5) - CARGAS PSEUDOESTÁTICAS:	
6) - BARRAS DE EJE RECTO:	
7) - APLICACIÓN A FLEXIÓN SIMPLE:	
8) - BARRAS ESBELTAS:	$\frac{L}{d} >= 10$

04 - MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS Y DE DEFORMACIONES:

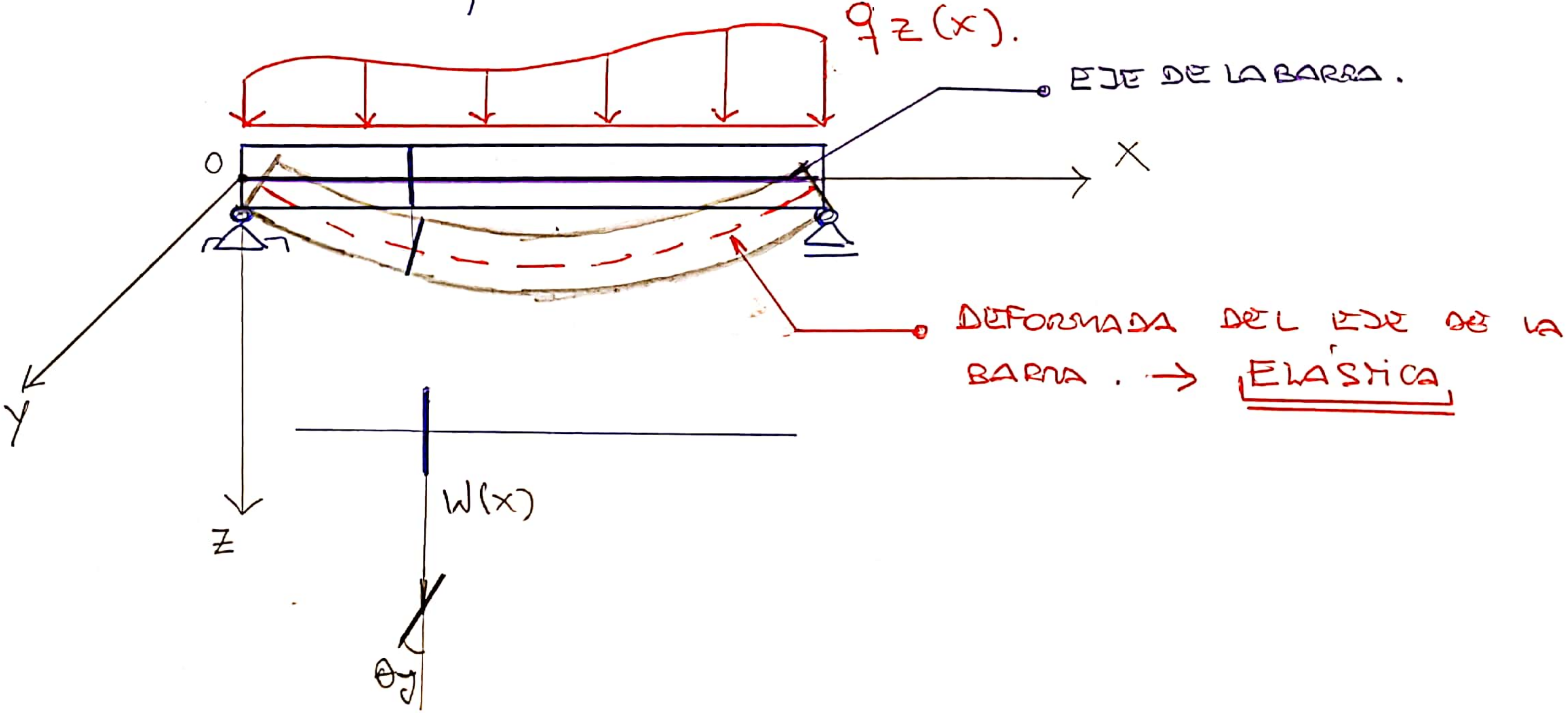
Métodos Diferenciales	**1.- Método de la Ecuación Diferencial de la Línea Elástica**	✓
	2.- Método de la Ecuación Universal de la Línea Elástica	☒
	3.- Método de los "Teoremas de Mohr"	☒

Métodos Energéticos	4.- Método Energético Basado en el "Teorema de Castigliano"	☒
	5.- Método Energético Basado en el "Teorema de los Trabajos Virtuales"	✓

06) - DEFINICIÓN:

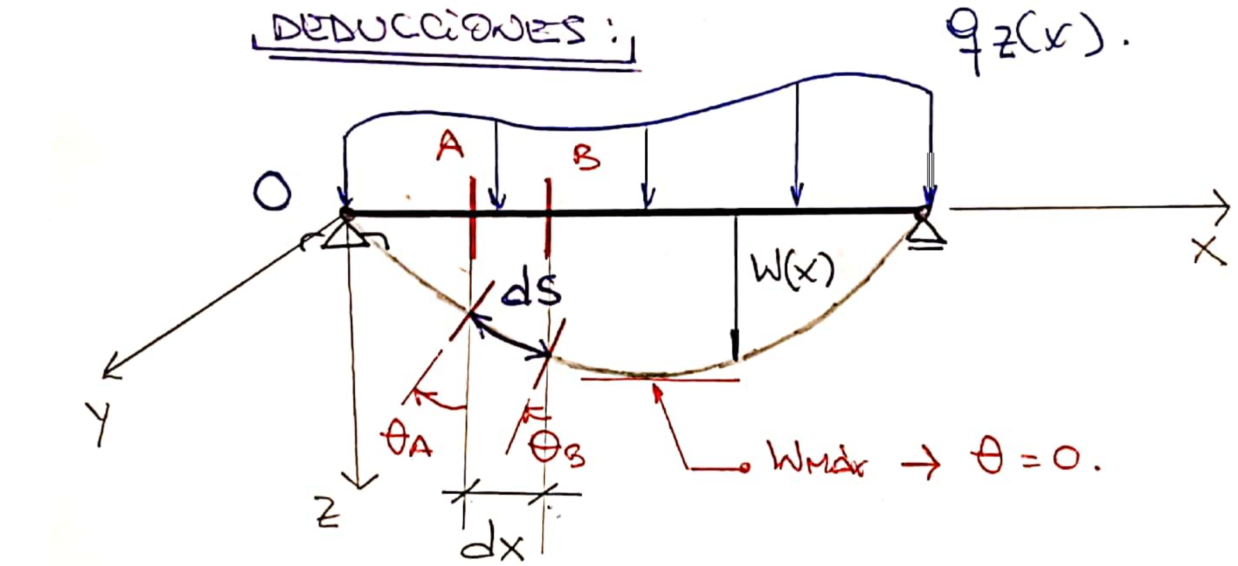
LÍNEA ELÁSTICA
CURVA ELÁSTICA.
ELÁSTICA

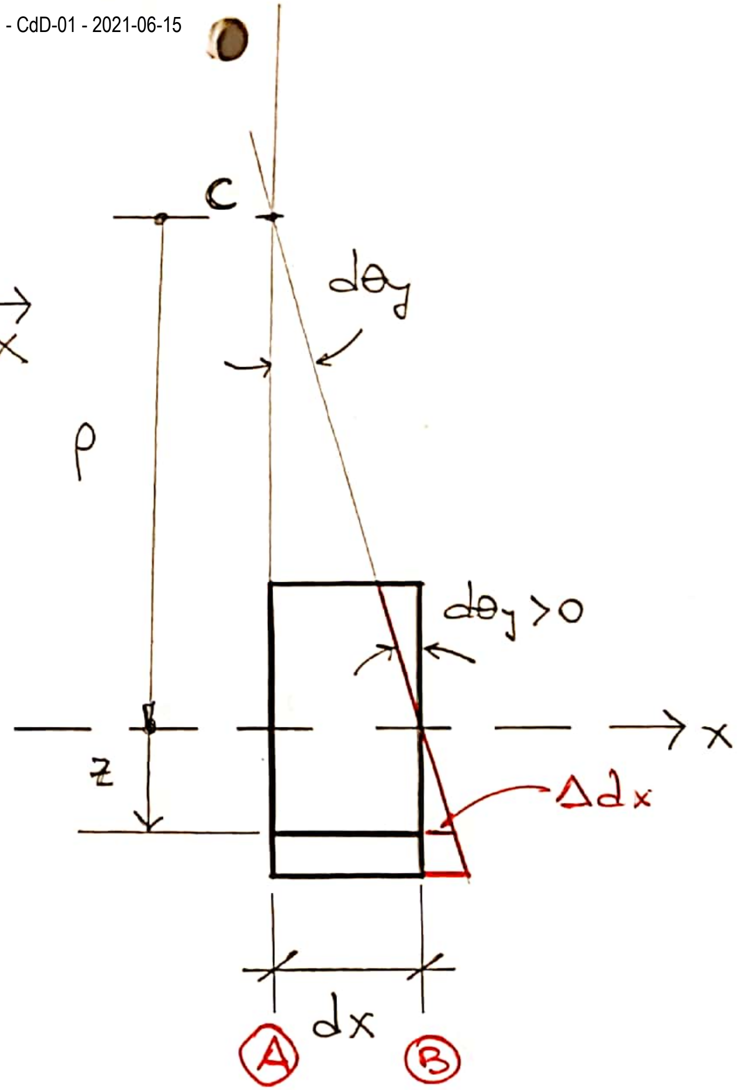
→ DEFORMADA DEL EJE DE LA BARRA O DE LA PIEZA ESTRUCTURAL.



07) - DEMOSTRACIONES

DEDUCCIONES:





$$\theta_A < 0$$

$$\theta_B < 0$$

$$|\theta_A| > |\theta_B|$$

$$\Delta\theta_{BA} = \theta_B - \theta_A = d\theta > 0$$

$$\rho \cdot d\theta_y = dx \qquad (1a).$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} \qquad (1b).$$

$$z \cdot d\theta_y = \Delta dx\big]_z \qquad (2a).$$

$$d\theta_y = \frac{\Delta dx\big]_z}{z} \qquad (2b).$$

DIVIDO A (2b) POR 'dx':

$$\frac{d\theta_y}{dx} = \frac{\Delta dx\big]_z}{dx} \cdot \frac{1}{z} = \frac{\varepsilon_x}{z} \qquad (3).$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{\varepsilon_x}{z}} \qquad (4)$$

ES VÁLIDA P/ CUALQUIER TIPO DE MATERIAL Y CUALQUIER COMPORTAMIENTO SEA ELÁSTICO O PLÁSTICO.

→ MATERIAL C/ COMPORTAMIENTO ELÁSTICO

→ "LEY DE HOOKE".

$$\sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) \rightarrow \varepsilon_x(x) = \frac{\sigma_x(x)}{E} \qquad (5).$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{\sigma_x(x)}{E \cdot z} \qquad (6)$$

→ FLEXIÓN SIMPLE:

$$\sigma_x = \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \qquad (7)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{M_y(x)}{E\, I_y} \cdot \frac{\cancel{z}}{\cancel{z}} \qquad (\cancel{8}).$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{M_y(x)}{E\, I_y} = \frac{M_y(x)}{B_y}}$$

(8)

COMENTARIOS:

1) → MAT. HOMOGÉNEO $E = cte = E(x)$.

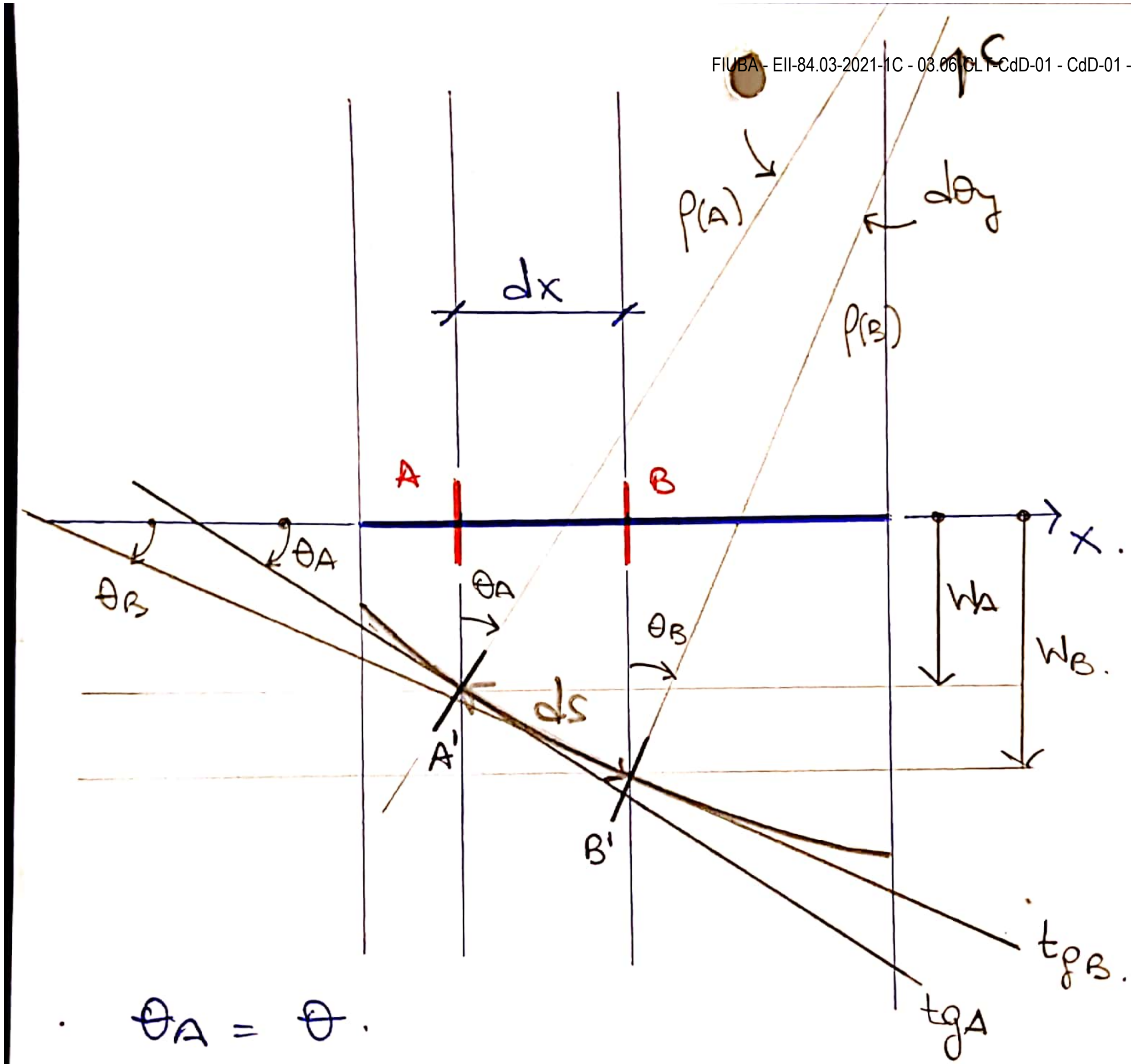
2) → LA INERCIA ES CTE $I_y = I_y(x) = cte$.

3) → LA RIGIDEZ A FLEXIÓN ES CTE $B_y = E\,I_y = cte$.

4) → $\rho(x) = \dfrac{E\,I_y}{M_y(x)} = \dfrac{B_y}{M_y(x)}$ SI $B_y \uparrow$ → $\rho \uparrow$ → LA BARRA ES MENOS DEFORMABLE

5) → $M_y(x) = cte$ → $\rho(x) = cte$ → LA ELÁSTICA →

→ ¿QUÉ CURVA ES? → ES UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA.



$$ds = \rho \cdot d\theta_y \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{ds} \quad (9)$$

• HIP PEQ DESPLAZAMIENTOS

(+)

HIP PEQ DEFORMACIONES.

$$ds \cong dx.$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} \quad (10).$$

• $$\tan\theta_y = \frac{dw}{dx}. \quad (11).$$

• HIP. PEQ DESPLAZAM.

$$\tan\theta_y \cong \theta_y.$$

$$\theta_y(x) = \frac{dw(x)}{dx} = w'(x) \quad (12).$$

• DERIVO LA (12).

$$\theta'_y(x) = \frac{d\theta_y(x)}{dx} = \frac{d^2w(x)}{dx^2} = w''(x). \quad (13)$$

• $\theta_A = \theta.$

$\theta_B = \theta + d\theta.$ $\quad w_B = w_A + dw$

$\theta_B - \theta_A = d\theta.$

- COMBINO LA (13) CON LA (8):

$$\theta'_y(x) = \frac{d\theta_y(x)}{dx} = \frac{d^2w(x)}{dx^2} = w''(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{M_y(x)}{B_y}$$

(14).

- RETOMANDO LA (12) PARA VER SI LOS SIGNOS ESTÁN BIEN:

$$\theta_y = - \frac{dw(x)}{dx}$$

$$\theta'_y = - \frac{d^2w(x)}{dx^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} dx > 0. \\ dw > 0. \\ \theta < 0 \end{array}\right\}$$

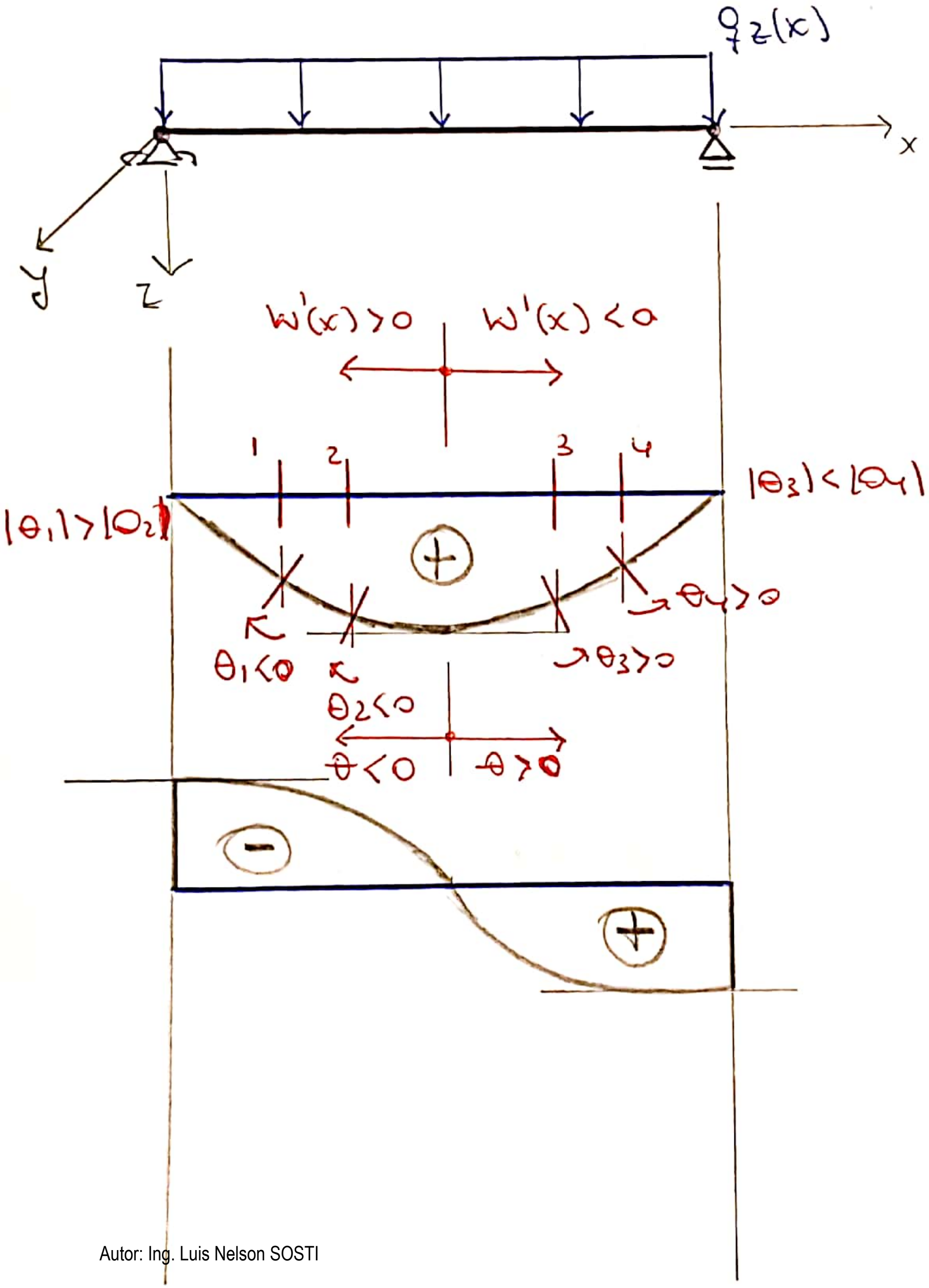
$$\boxed{w''(x) = \frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\theta'_y(x) = -\frac{M_y(x)}{B_y.} = -\frac{1}{\rho}}$$

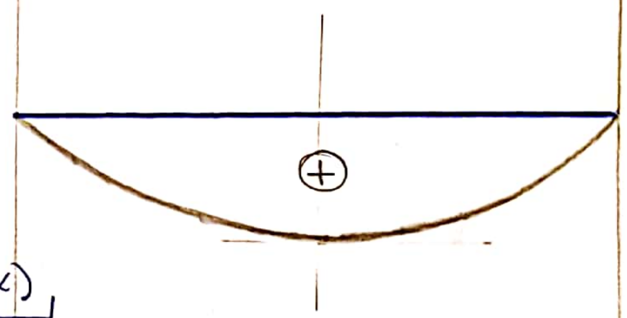
(15).

$$w'''(x) = -\theta''_y(x) = -\frac{M'_y(x)}{B_y} = -\frac{Q_z(x)}{B_y.}$$

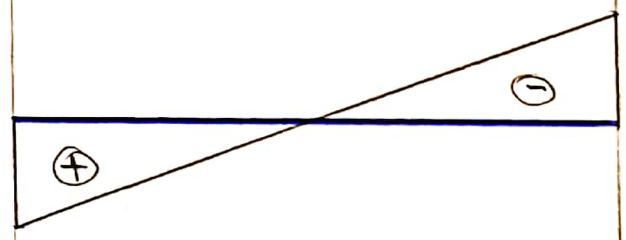
$$w^{IV}(x) = -\theta'''_y(x) = -\frac{M''_y(x)}{B_y} = -\frac{Q'_z(x)}{B_y} = \frac{q_z(x)}{B_y}$$

08.- ANÁLISIS CONCEPTUAL BÁSICO:





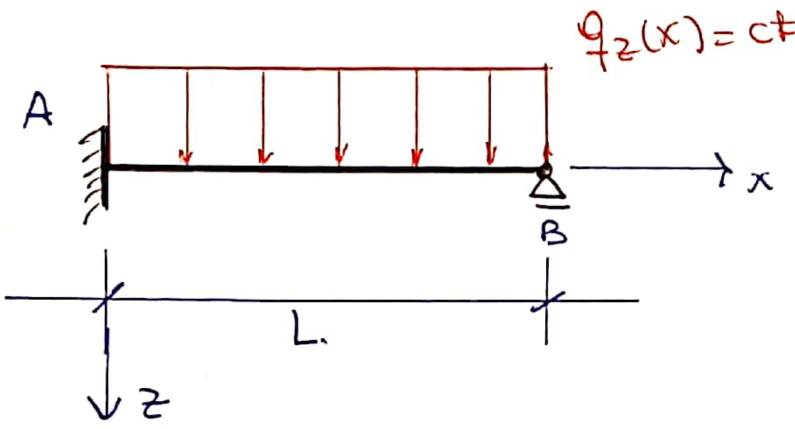
$M_y(x)$



$Q_z(x)$

01).-

EJERCICIO:



IPN 200.

$\sigma_{ADM} = 95\ kN/cm^2$.

$E = 21.000\ kN/cm^2$.

$L = 4{,}00\ m$.

1) RELACIONES BÁSICAS:

$$W(x)$$

$$W'(x) = -\theta_y(x)$$

$$W''(x) = -\theta'_y(x) = -\frac{M_y(x)}{B_y}$$

$$W'''(x) = -\theta''_y(x) = -\frac{M'_y(x)}{B_y} = -\frac{Q_z(x)}{B_y}$$

$$W^{IV}(x) = -\theta'''_y(x) = -\frac{M''_y(x)}{B_y} = -\frac{Q'_z(x)}{B_y} =$$

$$= +\frac{q_z(x)}{B_y}$$

2) CONDICIONES DE BORDE

VARIABLE	TIPO 'CB'	$x = 0$	$x = L$
DESPLAZAMIENTO	CBC	$W(0) = 0$	$W(L) = 0.$
GIROS	CBC	$W'(0) = 0$	
MOMENTOS	CBE		$W''(L) = 0.$
CORTE	CBE		

3) EXPRESIONES BÁSICAS:

$$W^{IV}(x) = \frac{q_z(x)}{B_y}.$$

$$W'''(x) = \frac{q_z(x)}{B_y} \cdot x + C_1$$

$$W''(x) = \frac{q_z(x)}{2B_y} \cdot x^2 + C_1 x + C_2$$

$$W'(x) = \frac{q_z(x)\, x^3}{6B_y} + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$W(x) = \frac{q_z(x)}{24B_y} x^4 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4.$$

4) DETERMINACIÓN DE CONSTANTES:

I $x = 0 \rightarrow W(0) = 0. = C_4 \rightarrow$

$$\boxed{C_4 = 0.}$$

II $x = 0 \rightarrow W'(0) = 0 = C_3 \rightarrow$

$$\boxed{C_3 = 0}$$

$$C_1 = -\frac{5}{8}\frac{q}{B_y}L.$$

$$C_2 = +\frac{1}{8}\frac{q}{B_y}L^2$$

5) ARMADO DE LAS FUNCIONES:

$$W(x) = \frac{q}{24B_y}x^4 - \frac{5}{48}\frac{q}{B_y}Lx^3 + \frac{1}{16}\frac{q}{B_y}L^2x^2$$

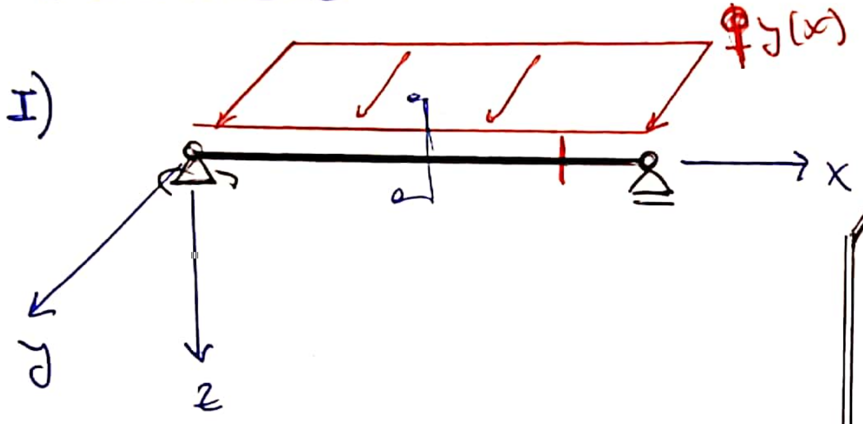
$$W'' = \frac{q}{2\cancel{B_y}}x^2 - \frac{5}{8}\frac{q}{\cancel{B_y}}Lx + \frac{1}{8}\frac{q}{\cancel{B_y}}L^2 = -\frac{M_y(x)}{\cancel{B_y}}$$

$$M_y(x) = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{5}{8}qLx - \frac{1}{8}qL^2$$

6) TRAZADO DE LAS FUNCIONES:

COMENTARIOS:

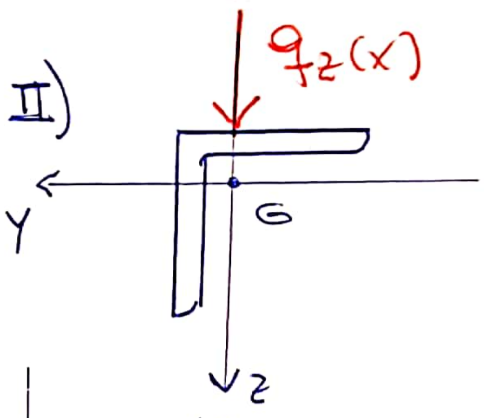
I)



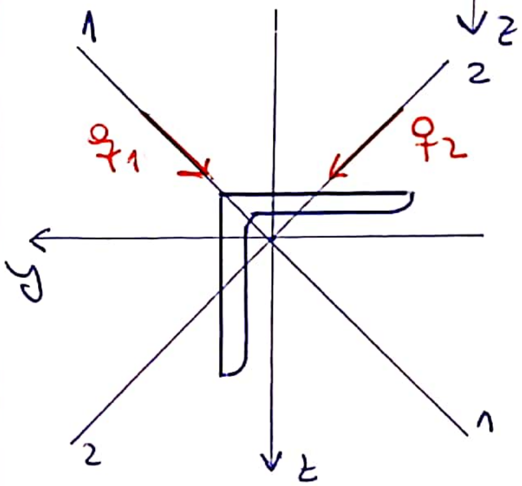
$$q_y(x) = - \frac{dQ_y(x)}{dx}.$$

$$Q_y(x) = - \frac{dM_z(x)}{dx}.$$

II)



FLEXIÓN SIMPLE OBLICUA.



2 ELÁSTICAS

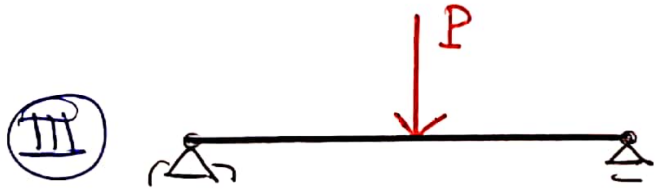
2 FUNC GIROS

2 " M.

2 " Q.

W_1 $\quad$ W_2 $\quad$ $W_{TOT} = \sqrt{W_1^2 + W_2^2}$

III)



10) -

CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS POR MEDIO DE TTV:

$W = U$ PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA.

$\int_{bi} M_x \cdot d\phi$

$\delta W = \delta U$

$$\delta U = \sum_{bi=1}^{n} \left[\int_{bi} N \cdot dn + \int_{bi} Q_z \cdot dc_z + \int_{bi} Q_y \, dc_y + \int_{bi} M_x \cdot d\phi + \right.$$

$$\left. + \int_{bi} M_y \, d\theta_y + \int_{bi} M_z \cdot d\theta_z \right]$$

K K

→ SI LOS SISTEMAS SON ELÁSTICOS Y PROPORCIONALES.

$$dn = \frac{N(x)}{E A} dx. \qquad dc_y = \frac{K_y Q_y(x)}{G \cdot A} dx \qquad d\theta_z = \frac{M_z(x)}{E I_z} dx.$$

$$dc_z = \frac{K_z Q_z(x)}{G A} dx \qquad d\theta_y = \frac{M_y(x)}{E I_y} \cdot dx$$

$$d\phi = \frac{M_T(x)}{G\, I_P}\, dx$$ → T. de Coulomb → Secc. circulares macizas o huecas.

$$d\phi = \frac{M_T(x)}{4 G \Omega^2} \int \frac{ds}{e(s)}\, dx = \frac{M_T(x)}{G \underbrace{\dfrac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{e(s)}}}_{I_T}}\, dx$$

Secciones tubulares simplemente conexas de e pequeño.
T. de Bredt.

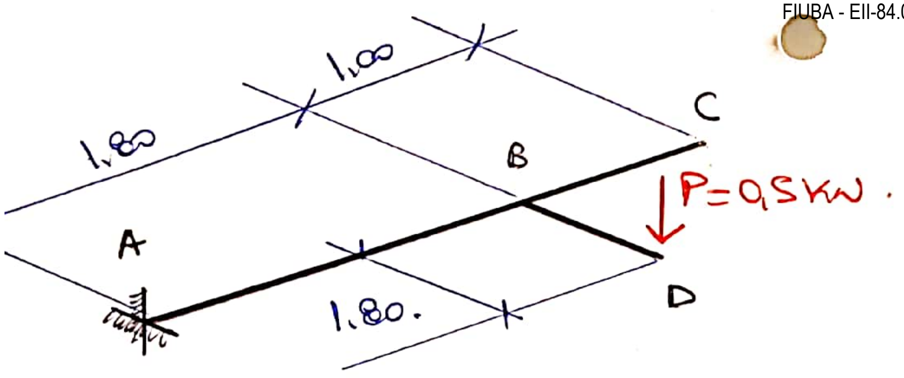
$$d\phi = \frac{M_T(x)}{G\, J_P}\, dx \qquad I_P = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} l_i\, t_i^3$$

Secciones abiertas
T. de Saint Venant.

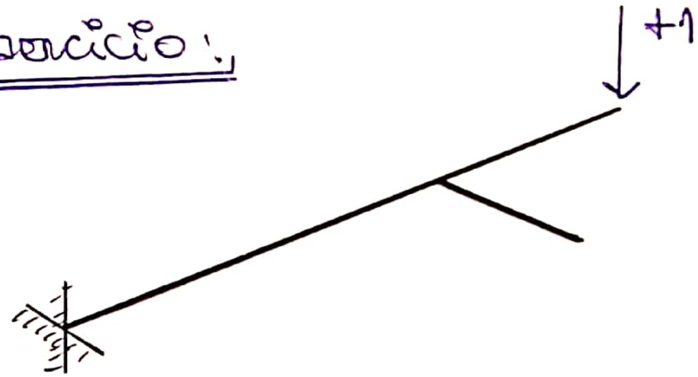
$$\delta U = \sum_{bi=1}^{n} \left[\int_{bi} \frac{N^{SE} \cdot N^{DV}}{EA}\, dx + \cancel{\int_{bi} \frac{Q_y^{SE}\, Q_y^{DV}\, k_y}{GA}\, dx} + \cancel{\int_{bi} \frac{Q_z^{SE}\, Q_z^{DV}\, k_z}{GA}\, dx} + \right.$$

$$\left. + \int_{bi} \frac{M_T^{SE}\, M_T^{DV}}{G\, I_T}\, dx + \int_{bi} \frac{M_y^{SE}\, M_y^{DV}}{E\, I_y}\, dx + \int_{bi} \frac{M_z^{SE}\, M_z^{DV}}{E\, I_z}\, dx . \right]$$

BARRAS ESBELTAS → las deformaciones son despreciables.



11) - EJERCICIO:

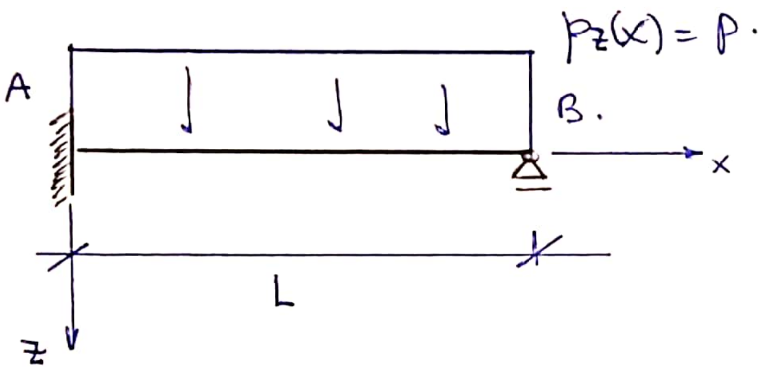


$\boxed{\text{SE}}$

ESTRUCTURA REAL EN LA CUAL QUEREMOS CALCULAR ALGÚN DESPLAZAMIENTO.

$\boxed{\text{DV}}$

EJERCICIO:



IPN 200 $\sigma_{ADM} = 15\ kN/cm^2$.

$E = 21.000\ kN/cm^2$.

$L = 4\ m$

1) RELACIONES BÁSICAS

$$W_z(x) = W(x)$$

$$W'(x) = -\theta_y(x)$$

$$W''(x) = -\theta'_y(x) = -\frac{M_y(x)}{B_y}.$$

$$W'''(x) = -\theta''_y(x) = -\frac{M'_y(x)}{B_y} = -\frac{Q_z(x)}{B_y}.$$

$$W^{IV}(x) = -\theta'''_y(x) = -\frac{M''_y(x)}{B_y} = -\frac{Q'_z(x)}{B_y} = +\frac{P_z(x)}{B_y}$$

2) CONDICIONES DE BORDE:

VARIABLE	TIPO 'CB'	$X = 0$	$X = L$
DESPLAZAMIENTO	CBC	$W_0(0) = 0$ ✓	$W(L) = 0.$ ✓
GIROS	CBC	$W'(0) = 0$ ✓	
MOMENTO	CBE		$W''(L) = 0.$ ✓
CORTE.	CBE.		

3) Expresiones básicas

$$W^{IV}(x) = \frac{pz(x)}{B_y}$$

$$W'''(x) = \frac{pz(x)}{B_y} \cdot x + C_1.$$

$$W''(x) = \frac{pz(x)}{2B_y} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

$$W'(x) = \frac{pz(x)}{6B_y} \cdot x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

$$W(x) = \frac{pz(x)}{24 B_y} \cdot x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

4) Desarrollo - Det. constantes:

- $x = 0 \rightarrow W(0) = 0.$

$$W(x=0) = 0 + C_4 \rightarrow \boxed{C_4 = 0}$$

- $x = 0 \rightarrow W'(0) = 0.$

$$W'(x=0) = 0 = C_3 \rightarrow \boxed{C_3 = 0}$$

- $x = L \rightarrow W(L) = 0.$

$$\boxed{0 = \frac{pL^4}{24B_y} + \frac{1}{6} C_1 L^3 + \frac{1}{2} C_2 L^2} \quad \text{I}$$

- $x = L \rightarrow W''(L) = 0.$

$$0 = \frac{pL^2}{2B_y} + C_1 L + C_2$$

$$\boxed{C_2 = -\frac{pL^2}{2B_y} - C_1 L.} \quad \text{II}$$

DE (I) y (II) OBTENEMOS:

$$\boxed{\begin{aligned} C_1 &= -\frac{5}{8}\frac{p}{B_y}L. \\ C_2 &= +\frac{1}{8}\frac{p}{B_y}L^2 \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} \text{(II)} & \theta_y(x) = -\dfrac{p}{6B_y}x^3 + \dfrac{5}{16}\dfrac{p}{B_y}Lx^2 - \dfrac{1}{8}\dfrac{p}{B_y}L^2x. \\ \text{(III)} & M_y(x) = -\dfrac{p}{2}x^2 + \dfrac{5}{8}pLx - \dfrac{1}{8}pL^2 \\ \text{(IV)} & Q_z(x) = -px + \dfrac{5}{8}pL. \end{cases}$$

$$W^{IV}(x) = \frac{p}{B_y}.$$

$$\begin{cases} p_z(x) = -\dfrac{dQ_z(x)}{dx}. \\ Q_z(x) = \dfrac{dM_y(x)}{dx} \end{cases}$$

$$W'''(x) = \frac{p}{B_y}\cdot x - \frac{5}{8}\frac{p}{B_y}L. = -\frac{Q_z(x)}{B_y}$$

$$W''(x) = \frac{p}{2B_y}x^2 - \frac{5}{8}\frac{p}{B_y}L\cdot x + \frac{1}{8}\frac{p}{B_y}L^2. = -\frac{M_y(x)}{B_y}$$

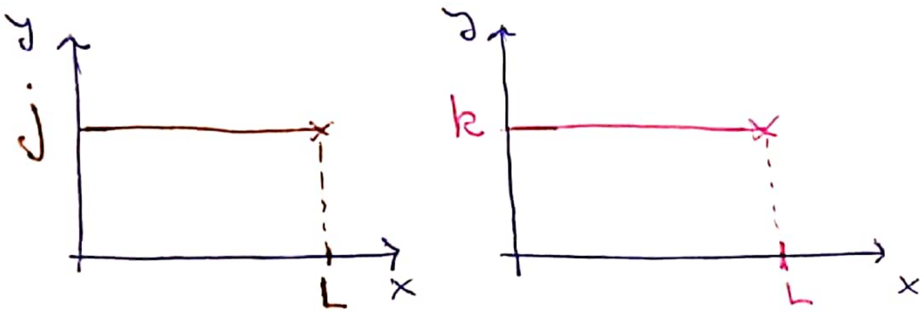
$$W'(x) = \frac{p}{6B_y}\cdot x^3 - \frac{5}{16}\frac{p}{B_y}Lx^2 + \frac{1}{8}\frac{p}{B_y}L^2x. = -\theta_y(x)$$

$$\boxed{W(x) = \frac{p}{24B_y}\cdot x^4 - \frac{5}{48}\frac{p}{B_y}L\cdot x^3 + \frac{1}{16}\frac{p}{B_y}L^2x^2.} \quad \text{(I)}$$

EC. DE LA ELÁSTICA.

CONSTRUCCIÓN DE LAS TABLAS:

1)

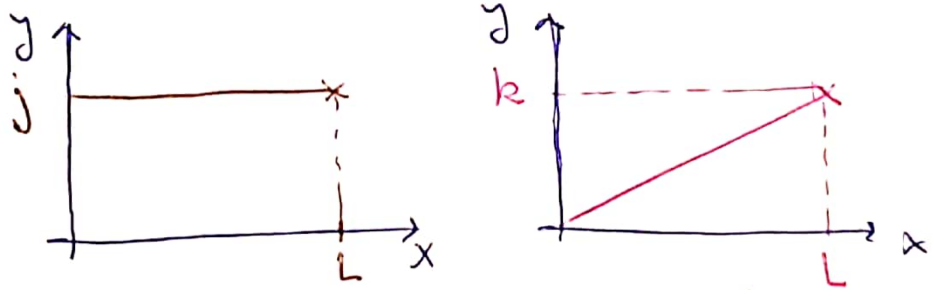


$$\int y_1(x)\cdot y_2(x)\,dx = \int j\cdot k\cdot dx =$$

$$= j\cdot k\cdot x\Big|_0^L = j\cdot k\, L$$

LO PROPORCIONADO POR LAS TABLAS.

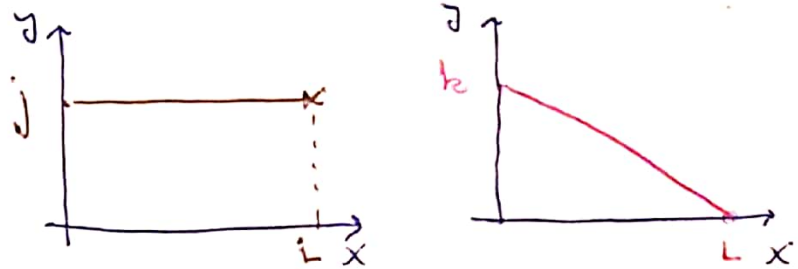
2)



$y_1(x) = j$ $\qquad$ $y_2(x) = \frac{k}{L}x.$

$$\int y_1\cdot y_2\cdot dx = \int j\cdot\frac{k}{L}x\,dx = j\frac{k}{L}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = j\frac{k}{\cancel{L}}\frac{L^{\cancel{2}}}{2} = \frac{1}{2}jk\,L$$

3)



$y_1(x) = j$

$y_2(x) = -\frac{k}{L}x + k$

$y_2(x) = k\left(1-\frac{x}{L}\right).$

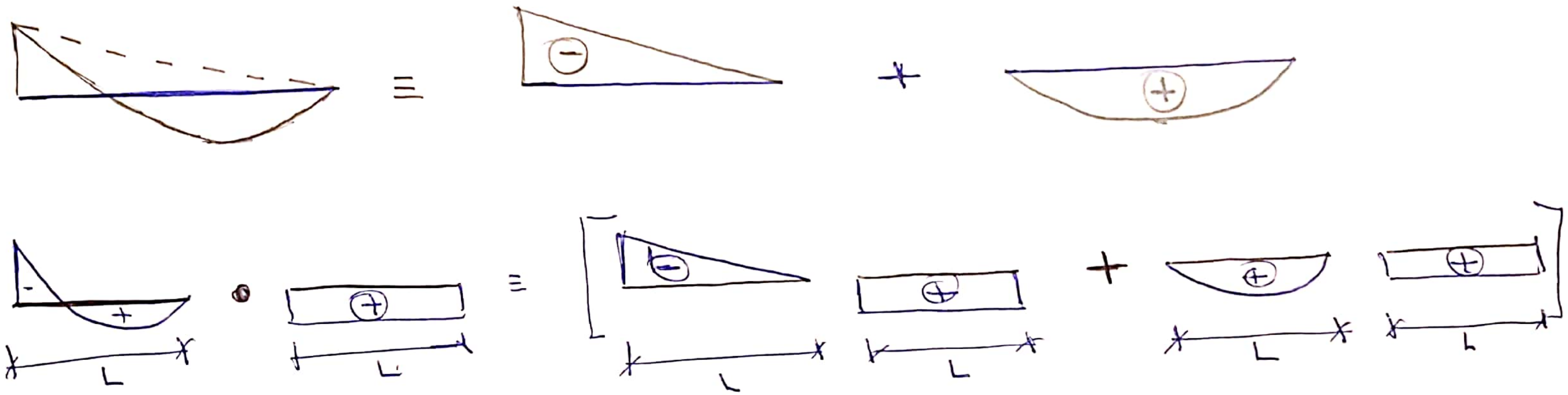
$$\int y_1\cdot y_2\,dx = \int j\cdot k\left(1-\frac{x}{L}\right)dx =$$

$$= jk\cdot x\Big|_0^L - jk\,\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{L}\Big|_0^L =$$

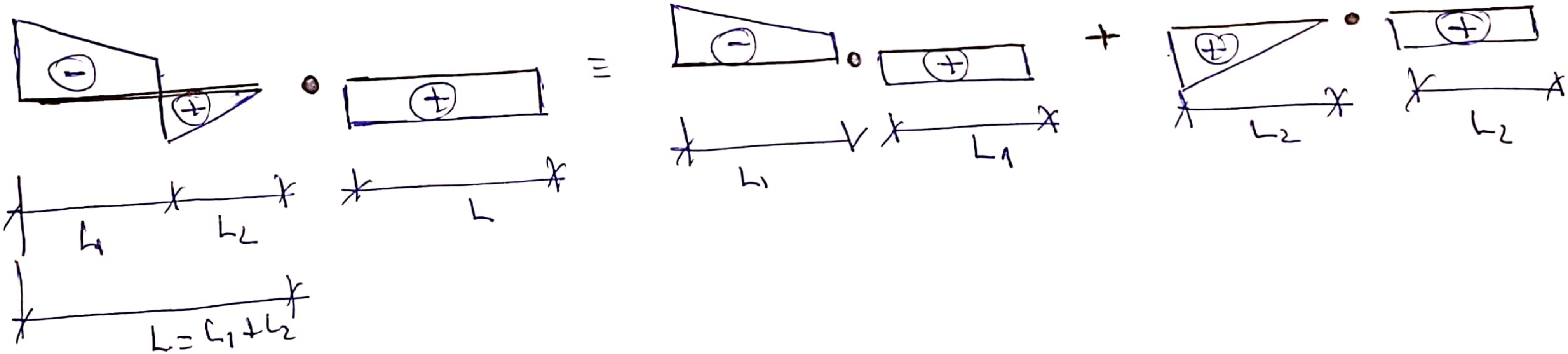
$$= jkL - \frac{1}{2}jkL = \boxed{\frac{1}{2}jk\,L}$$

ACLARACIONES:

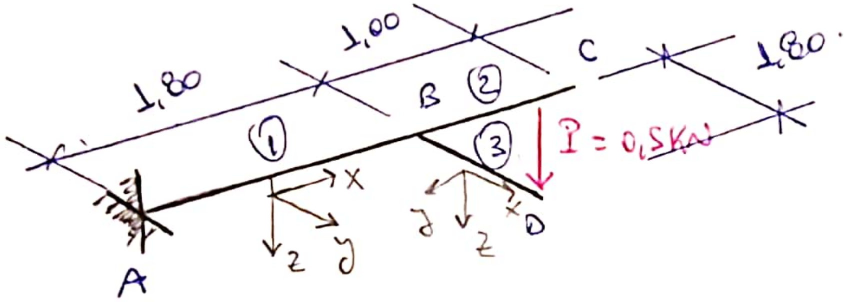
I)



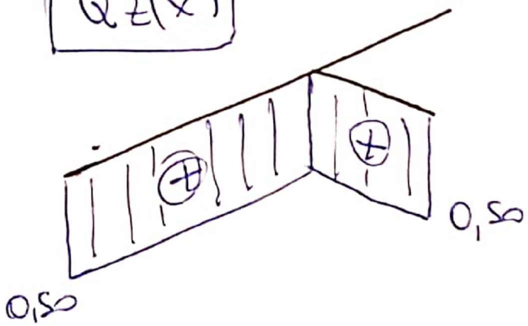
II)



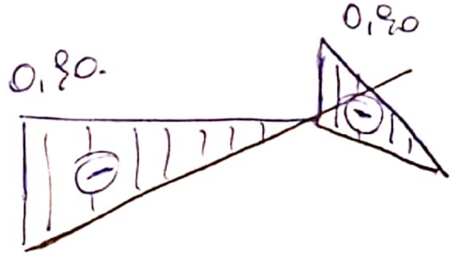
DV



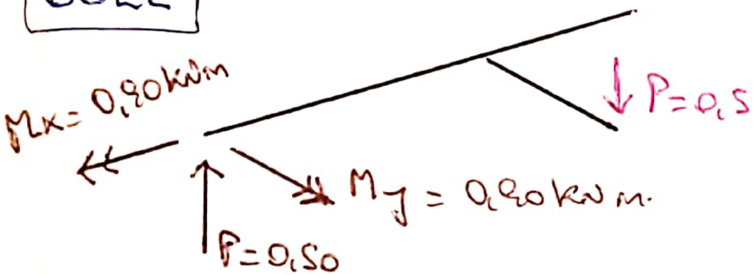
Qz(x)



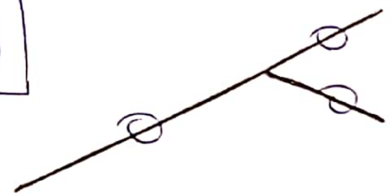
My(x)

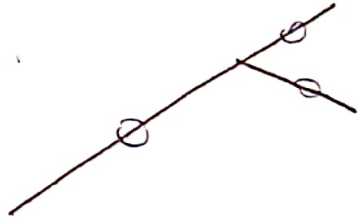


DCLE

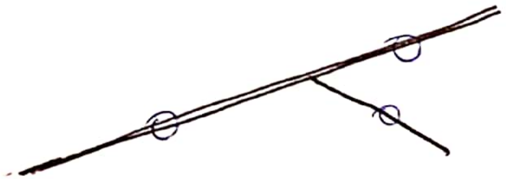


Qy(x)

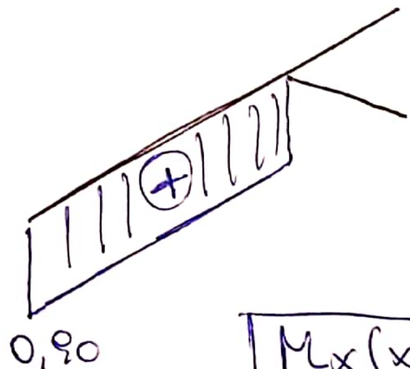




N(x)



Mz(x)



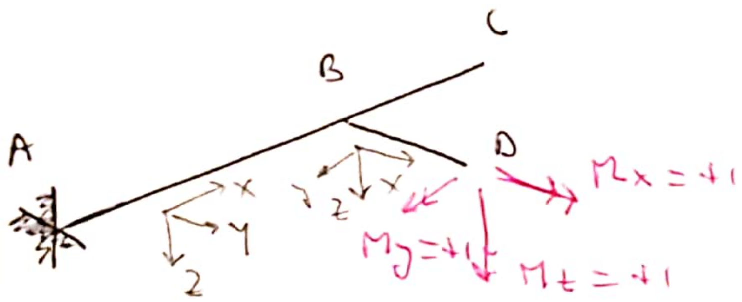
Mx(x)

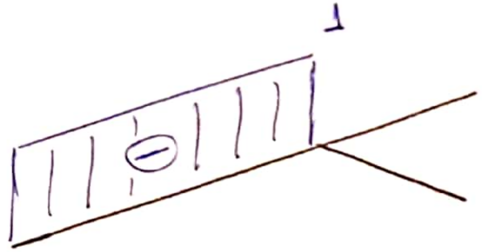
SE θ_y^D θ^D 20/21

θ_x^D

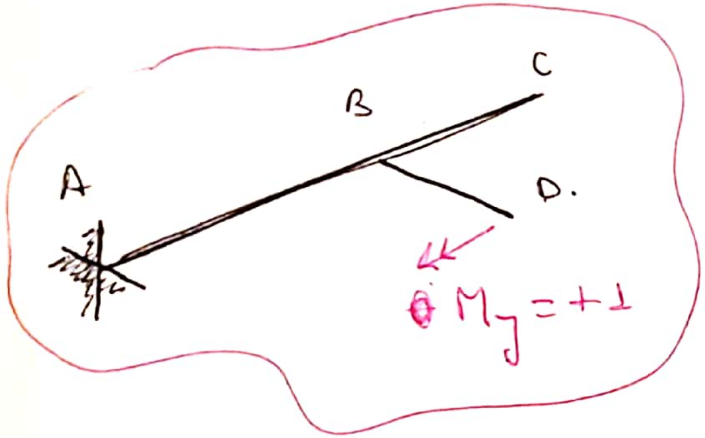
θ_y^D

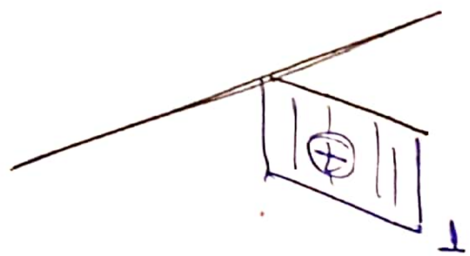
θ_z^D



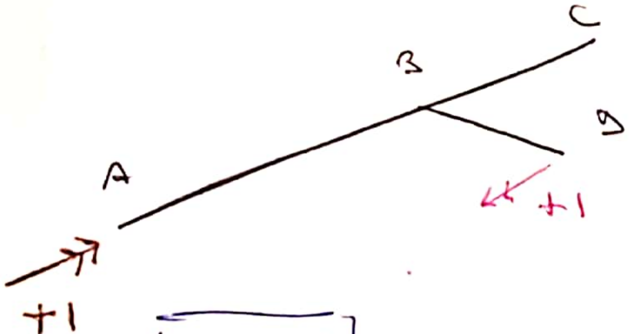


$\boxed{M_x(x)}$





$\boxed{M_y(x)}$



$\boxed{\text{DELE}}$

$N(x) = 0$

$Q_y(x) = 0$

$Q_z(x) = 0$

$M_z(x) = 0$

$E = 21.000\ KN/cm^2.$

$G = 8000\ KN/cm^2.$

$\cancel{A}\ D = 7\ cm.$

$A = \frac{\pi D^2}{4} = 38,48\ cm^2.$

$I_y = I_z = \frac{\pi . D^4}{64} = 117,86\ cm^4$

$I_p = \frac{\pi D^4}{32} = 235,72\ cm^4$

$W = (+1)^{SE} . \theta_y^D$ DV ?

$N \left\langle \begin{array}{l} SE \rightarrow 0 \\ DV \rightarrow 0. \end{array} \right.$

Q_y y Q_z → se desprecian.

$M_z \left\langle \begin{array}{l} SE \rightarrow 0 \\ DV \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$$\underbrace{(+1) . \theta_y^D}_{W} = \underbrace{\int_{b1} \frac{(+90) . (-1)}{8000 . 235,72} dx}_{M_x^{b1}} + \cancel{\underbrace{\int_{b2} \frac{0 . 0}{G . I_p} dx}_{M_x^{b2}}} +$$

$$+ \cancel{\underbrace{\int_{b3} \frac{0 . 0}{G . I_p} . dx}_{M_x^{b2}}} + \cancel{\underbrace{\int_{b1} \frac{1}{2} \frac{(-90) . (0)}{21000 . 117,86} dx}_{M_y^{b1}}} + \cancel{\underbrace{\int_{b2} \frac{0\ 0}{E I_y} . dx}_{M_y^{b2}}} +$$

$$+ \int_{b3} \frac{1}{2} \frac{(-90)(+1)}{21000 . 117,86} . dx. =$$

$$= \frac{90\ KNcm . (-1)\ 180\ cm}{8000\ \frac{KN}{cm^2} . 235,72\ cm^4} + \frac{1}{2} \frac{(-90) . (+1)\ 180}{21000 . 117,86} =$$

$$= \underbrace{-8,59 . 10^{-3}} - 3,27 . 10^{-3} = \boxed{-0,01186\ rad}$$

$$\boxed{\theta_y^D = -0,01186\ rad}$$