.UBAfiuba
FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES - UBA
FACULTAD DE INGENIERÍA - FI
DEPARTAMENTO DE ESTABILIDAD - DE

ESTABILIDAD II - EII-84.03

CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS

01 - OBJETO:

1.- El cálculo de desplazamientos en elementos estructurales solicitados exclusivamente a "Flexión".

Hasta ahora:

- Solicitación Axil - SA:	$\delta(x) = \Delta L(x)$	Visto en el dictado de SA
- Solicitación por Flexión - SF:	**???**	**Se verá con esta clase**
- Solicitación por Torsión - ST:	$\phi(x)$	Visto en el dictado de ST
- Flexión Variable - FV:	dc	Visto en el dictado de FV

2.- Cálculo de desplazamientos en un sistema estructural cualquiera bajo una combinación de esfuerzos internos.

02 - NOMENCLATURA:

VARIABLE - ABREVIACIÓN NOMENCLATURA	DESCRIPCIÓN
pz(x) = qz(x) :	Función de fuerzas activas en la dirección "Z"
py(x) = qy(x) :	Función de fuerzas activas en la dirección "Y"
My(x) :	Función Momento Flector alrededor del Eje "Y"
Qz(x) :	Función Esfuerzo de Corte en la dirección "Z"
Mz(x) :	Función Momento Flector alrededor del Eje "Z"
Qy(x) :	Función Esfuerzo de Corte en la dirección "Y"
w(x) :	Función desplazamiento en la dirección "Z"
v(x) :	Función desplazamiento en la dirección "Y"
u(x) :	Función desplazamiento en la dirección "X"

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES - UBA
FACULTAD DE INGENIERÍA - FI
DEPARTAMENTO DE ESTABILIDAD - DE

ESTABILIDAD II - EII-84.03

VARIABLE - ABREVIACIÓN NOMENCLATURA	DESCRIPCIÓN
$\theta y(x)$:	Función giros alrededor del Eje "Y"
$\chi y(x)$:	Función curvatura de flexión alrededor del Eje "Y" (ángulo específico de flexión)
$\theta z(x)$:	Función giros alrededor del Eje "Z"
$\chi z(x)$:	Función curvatura de flexión alrededor del Eje "Z" (ángulo específico de flexión)
By :	Rigidez a Flexión de la Barra respecto del Eje "Y" = E.Iy = E.Jy
Bz :	Rigidez a Flexión de la Barra respecto del Eje "Z" = E.Iz = E.Jz
c(x) :	Centro de curvatura
$\rho(x)$:	Radio de curvatura
dx :	Diferencial de longitud "inicial" de la barra
ds :	Diferencia del arco de la "Elástica" de la barra
$d\theta y(x)$:	Variación de los ángulos entre 2 secciones alrededor del Eje "Y" separadas un diferencial de longitud
$d\theta z(x)$:	Variación de los ángulos entre 2 secciones alrededor del Eje "Z" separadas un diferencial de longitud

03 - HIPÓTESIS:

1) - RESPECTO DEL MATERIAL:	- Continuos - Homogéneos - Isótropos
2) - COMPORTAMIENTO MECÁNICO DEL MATERIAL:	- Hipótesis de Linealidad Mecánica" : Validez de la "Ley de Hooke"
3) - RESPECTO A LOS DESPLAZAMIENTOS DE LA ESTRUCTURA:	- Hipótesis de Linealidad Geométrica o de los Pequeños Desplazamientos - Hipótesis de Linealidad Estática - Hipótesis de Linealidad Cinemática
4) - RESPECTO A LAS DEFORMACIONES DE LA ESTRUCTURA:	- Hipótesis de Pequeñas Deformaciones
5) - CARGAS PSEUDOESTÁTICAS:	
6) - BARRAS DE EJE RECTO:	
7) - APLICACIÓN A FLEXIÓN SIMPLE:	
8) - BARRAS ESBELTAS:	$\frac{L}{d} >= 10$

04 - MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS Y DE DEFORMACIONES:

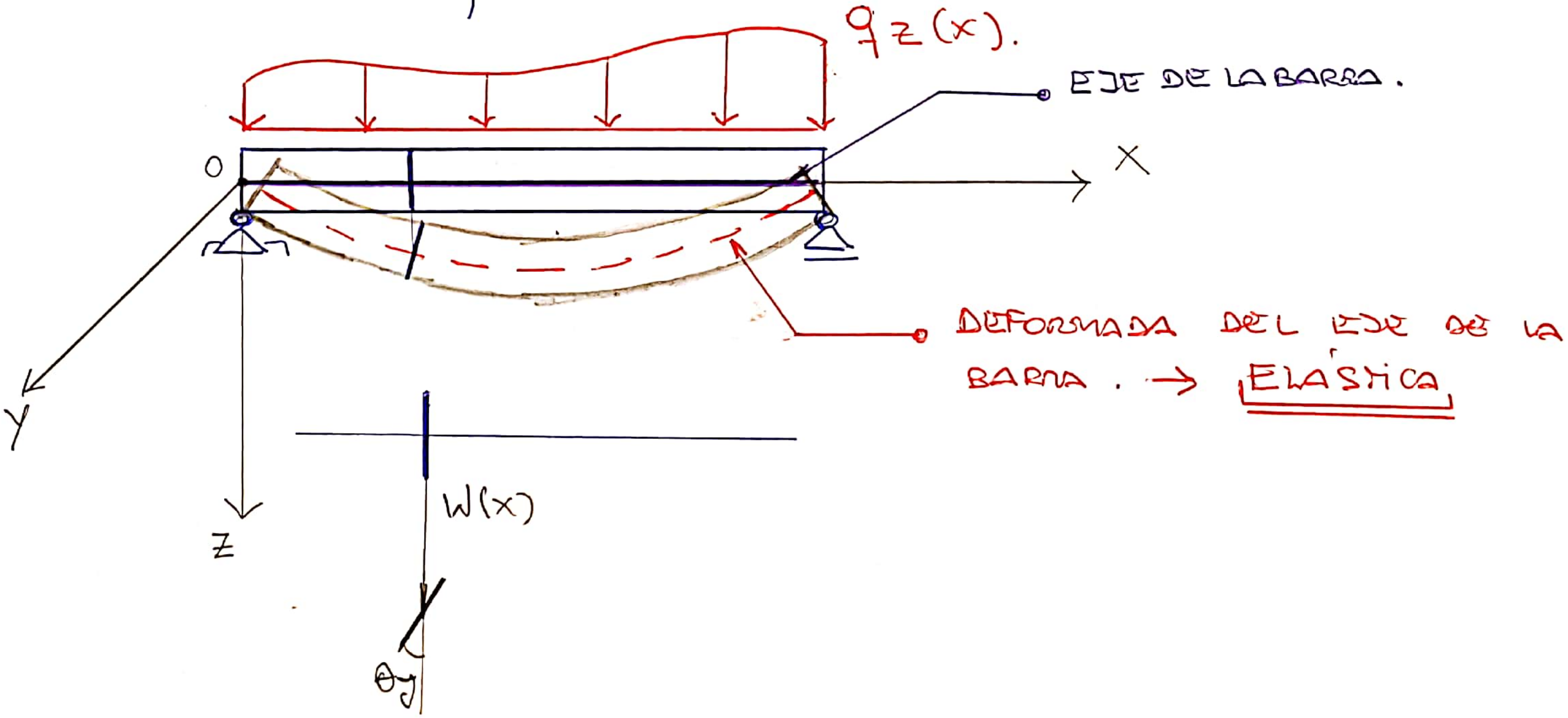
Métodos Diferenciales	**1.- Método de la Ecuación Diferencial de la Línea Elástica**	✓
	2.- Método de la Ecuación Universal de la Línea Elástica	☒
	3.- Método de los "Teoremas de Mohr"	☒

Métodos Energéticos	4.- Método Energético Basado en el "Teorema de Castigliano"	☒
	5.- Método Energético Basado en el "Teorema de los Trabajos Virtuales"	✓

06) - DEFINICIÓN:

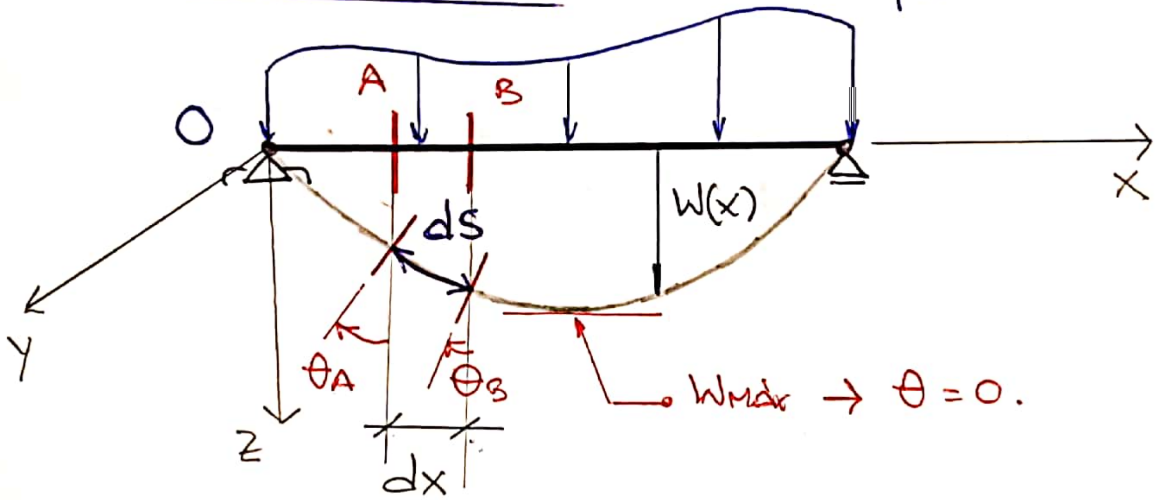
LÍNEA ELÁSTICA
CURVA ELÁSTICA.
ELÁSTICA

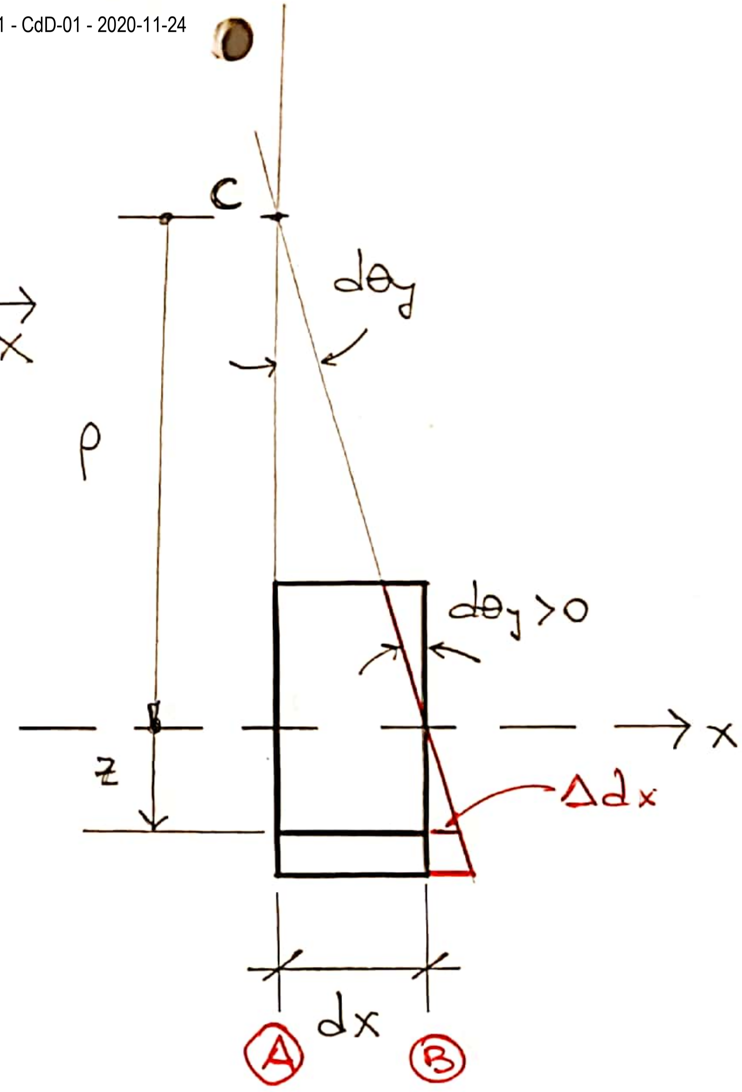
→ DEFORMADA DEL EJE DE LA BARRA O DE LA PIEZA ESTRUCTURAL.



07) - DEMOSTRACIONES

DEDUCCIONES:





$\theta_A < 0$

$\theta_B < 0$

$|\theta_A| > |\theta_B|$

$\Delta\theta_{BA} = \theta_B - \theta_A = d\theta > 0$

$$\rho \cdot d\theta_y = dx \quad (1a).$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} \quad (1b).$$

$$z \cdot d\theta_y = \Delta dx\big]_z \quad (2a).$$

$$d\theta_y = \frac{\Delta dx\big]_z}{z} \quad (2b).$$

DIVIDO A (2b) POR 'dx':

$$\frac{d\theta_y}{dx} = \frac{\Delta dx\big]_z}{dx}\frac{1}{z} = \frac{\varepsilon_x}{z} \quad (3).$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{\varepsilon_x}{z}} \quad (4)$$

ES VÁLIDA P/ CUALQUIER TIPO DE MATERIAL, Y CUALQUIER COMPORTAMIENTO SEA ELÁSTICO O PLÁSTICO.

→ MATERIAL C/ COMPORTAMIENTO ELÁSTICO

→ "LEY DE HOOKE".

$$\sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) \rightarrow \varepsilon_x(x) = \frac{\sigma_x(x)}{E} \quad (5).$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{\sigma_x(x)}{E \cdot z} \quad (6)$$

→ FLEXIÓN SIMPLE:

$$\sigma_x = \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{M_y(x)}{E\,I_y} \cdot \frac{\cancel{z}}{\cancel{z}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} = \theta'_y(x) = \frac{M_y(x)}{E\,I_y} = \frac{M_y(x)}{B_y}}$$

(8)

4/14

COMENTARIOS:

1) → MAT. HOMOGÉNEO $E = cte = E(x)$.

2) → LA INERCIA ES CTE $I_y = I_y(x) = cte$.

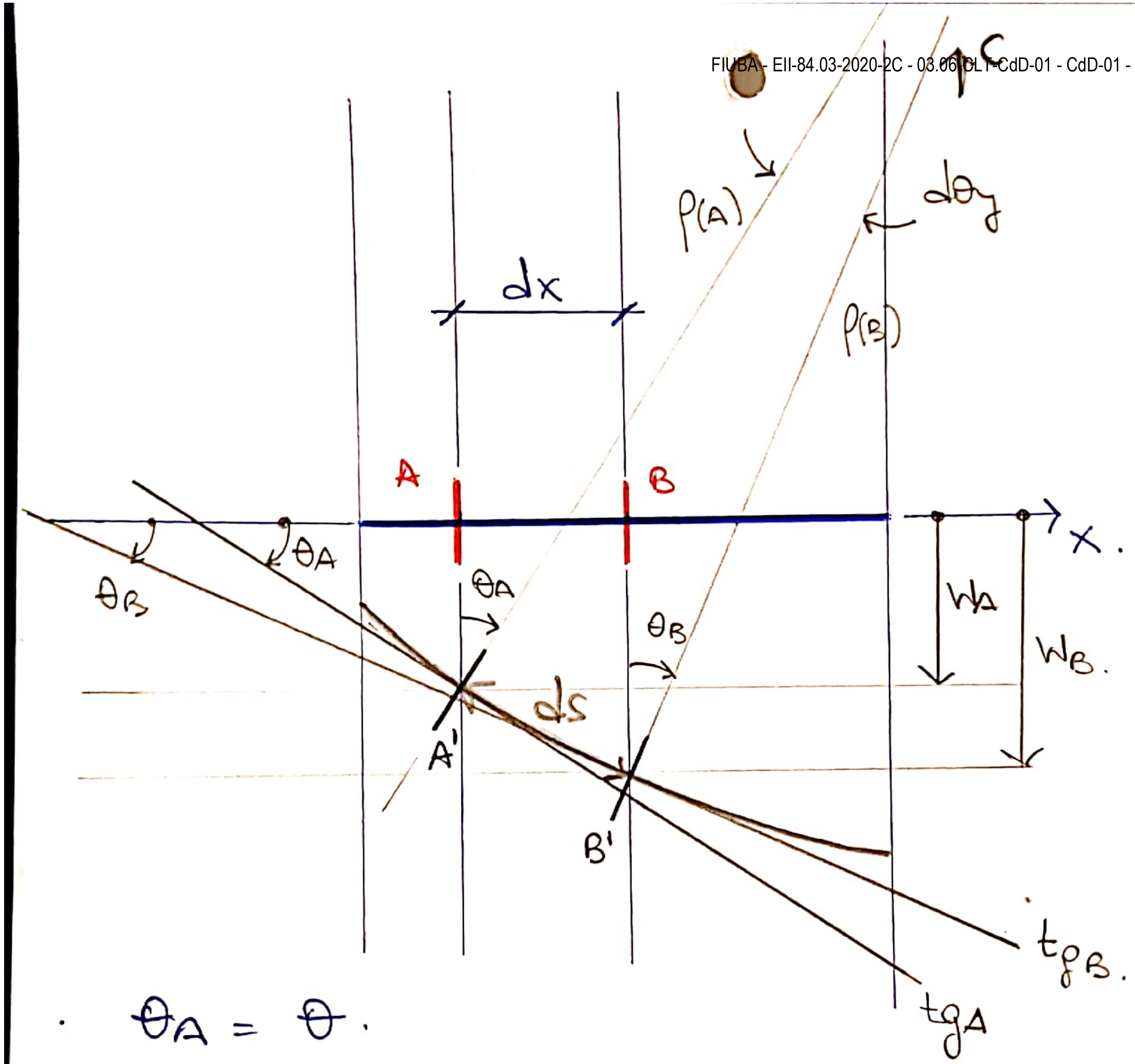
3) → LA RIGIDEZ A FLEXIÓN ES CTE $B_y = E\,I_y = cte$.

4) → $\rho(x) = \dfrac{E\,I_y}{M_y(x)} = \dfrac{B_y}{M_y(x)}$ SI $B_y \uparrow$ → $\rho \uparrow$ → LA BARRA ES MENOS DEFORMABLE

5) → $M_y(x) = cte$ → $\rho(x) = cte$ → LA ELÁSTICA →

→ QUÉ CURVA ES? → ES UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA.

5/14



$$ds = \rho \cdot d\theta_y \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{ds} \quad (9)$$

- HIP PEQ DESPLAZAMIENTOS

(+)

HIP PEQ DEFORMACIONES.

$$ds \cong dx.$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta_y}{dx} \quad (10).$$

- $\tan \theta_y = \dfrac{dw}{dx}.$ (11).

- HIP. PEQ DESPLAZAM.

$$\tan \theta_y \cong \theta_y.$$

$$\theta_y(x) = \frac{dw(x)}{dx} = w'(x) \quad (12).$$

- $\theta_A = \theta.$

$$\theta_B = \theta + d\theta. \qquad w_B = w_A + dw$$

$$\theta_B - \theta_A = d\theta.$$

- DERIVO LA (12).

$$\theta'_y(x) = \frac{d\theta_y(x)}{dx} = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = w''(x). \quad (13)$$

- COMBINO LA (13) CON LA (8):

$$\theta'_y(x) = \frac{d\theta_y(x)}{dx} = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = w''(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{M_y(x)}{B_y} \quad (14).$$

- RETOMANDO LA (12) PARA VER SI LOS SIGNOS ESTÁN BIEN:

$$\theta_y = - \frac{dw(x)}{dx}$$

$$\theta'_y = - \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

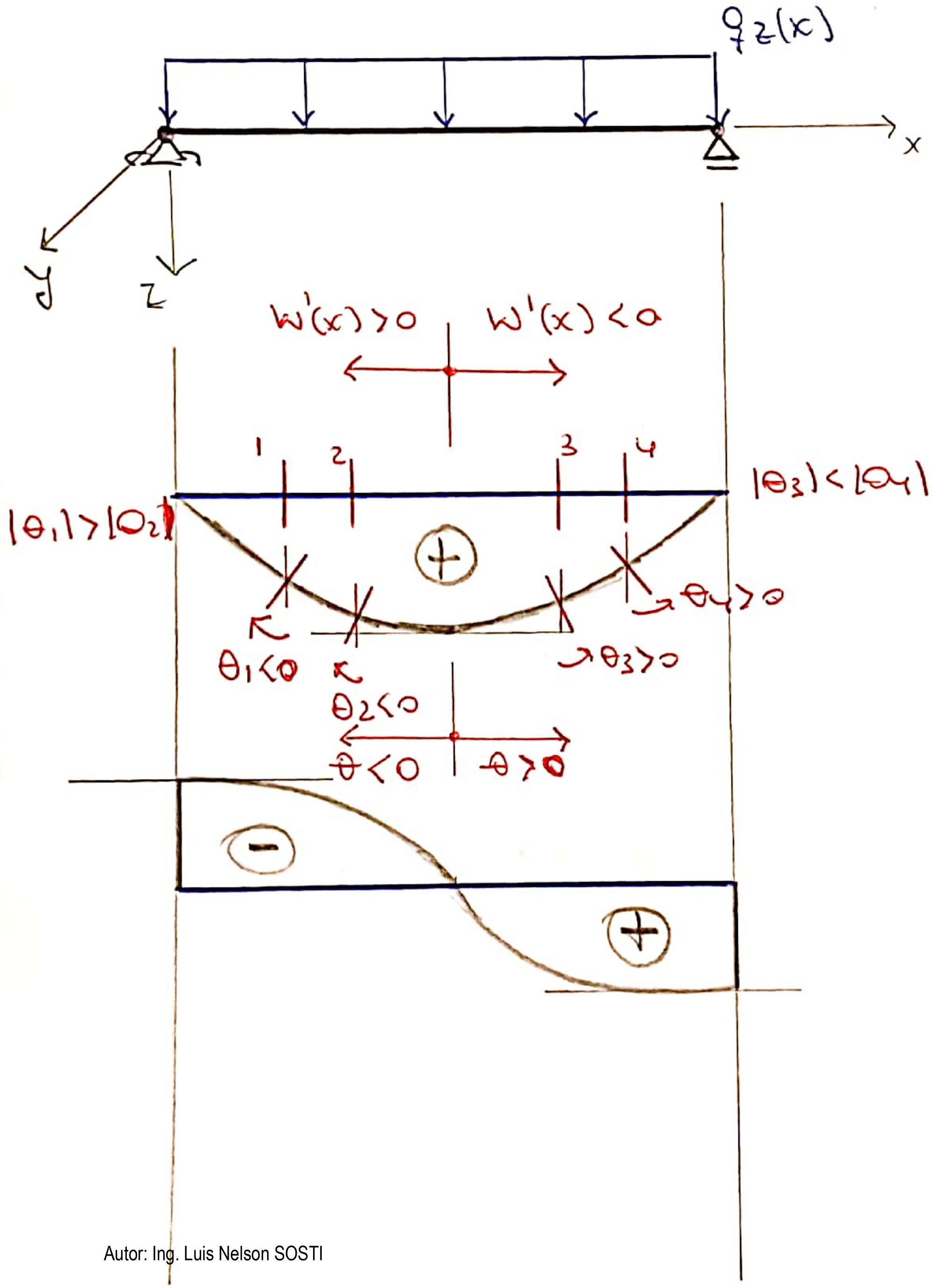
$dx > 0.$
$dw > 0.$
$\theta < 0$

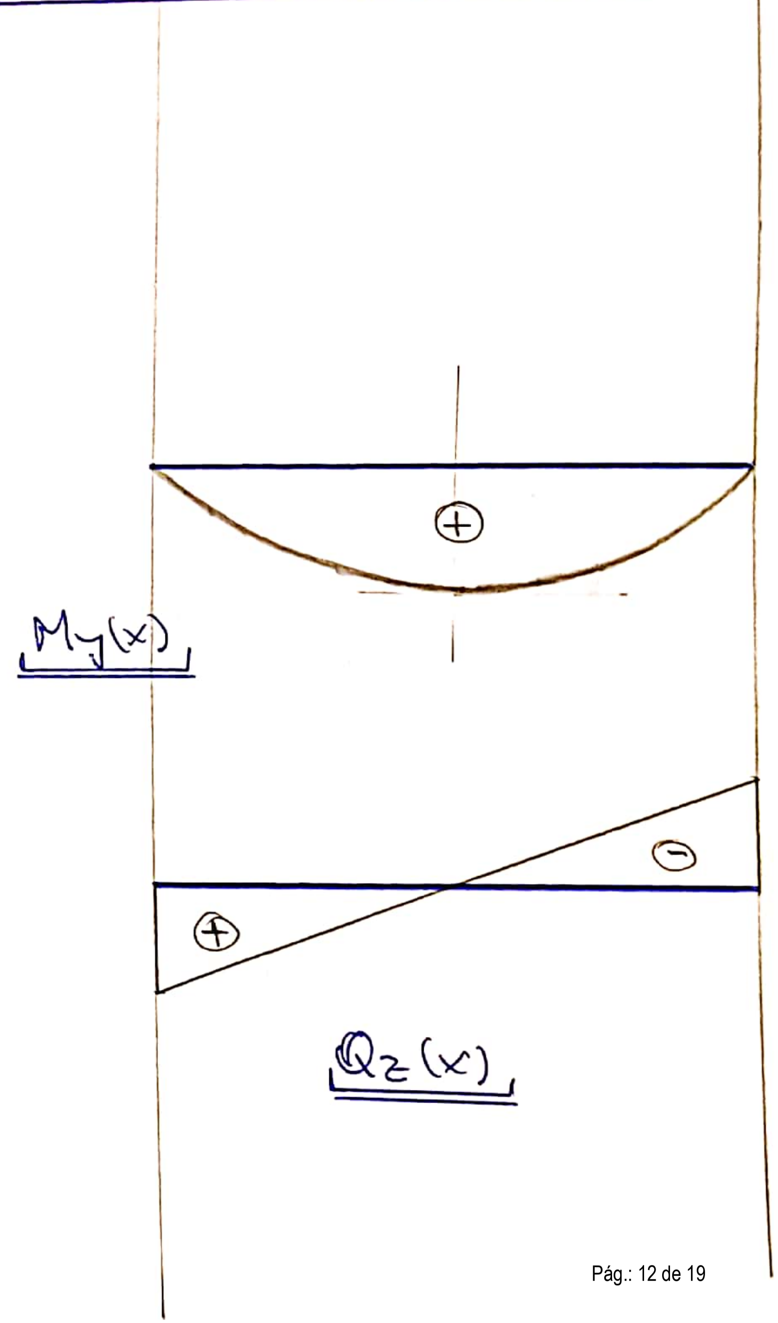
$$\boxed{w''(x) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\theta'_y(x) = -\frac{M_y(x)}{B_y}.} = -\frac{1}{\rho} \quad (15).$$

$$w'''(x) = -\theta''_y(x) = -\frac{M'_y(x)}{B_y} = -\frac{Q_z(x)}{B_y}.$$

$$w^{IV}(x) = -\theta'''_y(x) = -\frac{M''_y(x)}{B_y} = -\frac{Q'_z(x)}{B_y} = \frac{q_z(x)}{B_y}$$

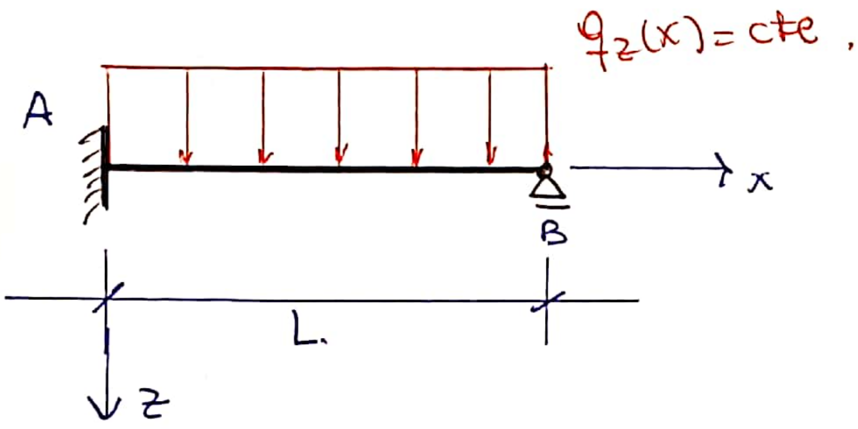
08 - ANÁLISIS CONCEPTUAL BÁSICO:





09). -

EJERCICIO:



IPN 200.

$\sigma_{ADM} = 15\ kN/cm^2$.

$E = 21.000\ kN/cm^2$.

$L = 4{,}00\ m$.

1) RELACIONES BÁSICAS:

$W(x)$

$W'(x) = -\theta^{o}_{y}(x)$

$W''(x) = -\theta'_{y}(x) = -\dfrac{M_y(x)}{B_y}$.

$W'''(x) = -\theta''_{y}(x) = -\dfrac{M'_y(x)}{B_y} = -\dfrac{Q_z(x)}{B_y}$

$W^{IV}(x) = -\theta'''_{y}(x) = -\dfrac{M''_y(x)}{B_y} = -\dfrac{Q'_z(x)}{B_y}$. $=$

$= +\dfrac{q_z(x)}{B_y}$

9/14

2) CONDICIONES DE BORDE

VARIABLE	TIPO 'CB'	$x = 0$	$x = L$
DESPLAZAMIENTO	CBC	$W(0) = 0$	$W(L) = 0.$
GIROS	CBC	$W'(0) = 0$	
MOMENTOS	CBE		$W''(L) = 0.$
CORTE	CBE		

3) EXPRESIONES BÁSICAS:

$$W^{IV}(x) = \frac{q_z(x)}{B_y}.$$

$$W'''(x) = \frac{q_z(x)}{B_y} \cdot x + C_1$$

$$W''(x) = \frac{q_z(x)}{2B_y} \cdot x^2 + C_1 x + C_2$$

$$W'(x) = \frac{q_z(x)\, x^3}{6B_y} + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$W(x) = \frac{q_z(x)}{24B_y} x^4 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4.$$

10/14

4) DETERMINACIÓN DE CONSTANTES:

(I) $x=0 \rightarrow W(0)=0 = C_4 \rightarrow$

$$\boxed{C_4 = 0}$$

(II) $x=0 \rightarrow W'(0)=0 = C_3 \rightarrow$

$$\boxed{C_3 = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_1 &= -\frac{5}{8}\frac{q}{B_y}L \\ C_2 &= +\frac{1}{8}\frac{q}{B_y}L^2 \end{aligned}}$$

5) ARMADO DE LAS FUNCIONES:

$$W(x) = \frac{q}{24B_y}x^4 - \frac{5}{48}\frac{q}{B_y}Lx^3 + \frac{1}{16}\frac{q}{B_y}L^2x^2$$

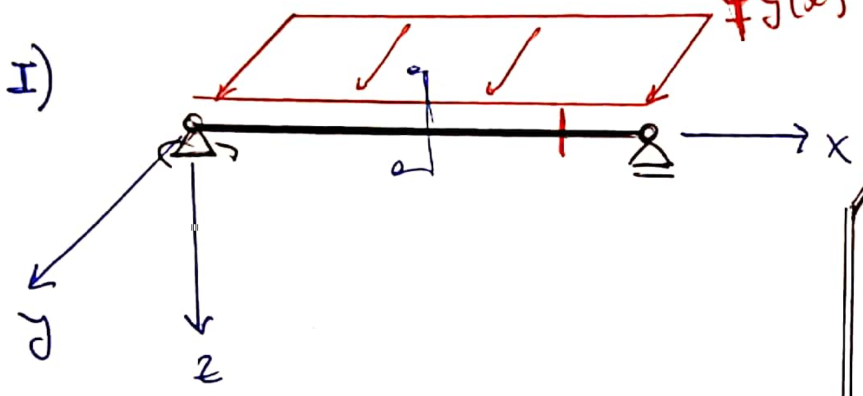
$$W'' = \frac{q}{2\cancel{B_y}}x^2 - \frac{5}{8}\frac{q}{\cancel{B_y}}Lx + \frac{1}{8}\frac{q}{\cancel{B_y}}L^2 = -\frac{M_y(x)}{\cancel{B_y}}$$

$$M_y(x) = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{5}{8}qLx - \frac{1}{8}qL^2$$

6) TRAZADO DE LAS FUNCIONES:

COMENTARIOS:

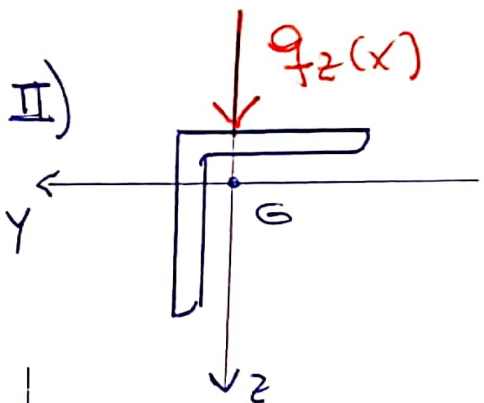
I)



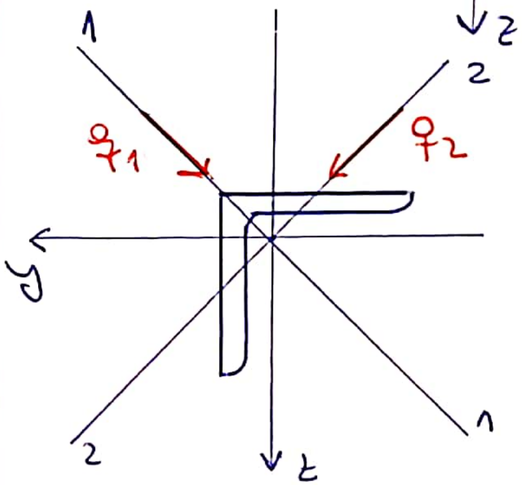
$$q_y(x) = -\frac{dQ_y(x)}{dx}.$$

$$Q_y(x) = -\frac{dM_z(x)}{dx}.$$

II)



FLEXIÓN
SIMPLE
OBLICUA.



2 ELÁSTICAS

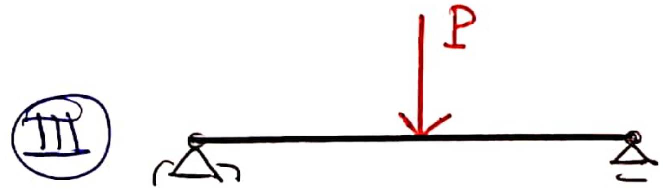
2 FUNC GIROS

2 " M.

2 " Q.

w_1 $\quad w_2 \quad w_{TOT} = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$

III)



10)- CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS POR MEDIO DE TTV:

$W = U$ PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA. $\int_{bi} M_x \cdot d\phi$

$\delta W = \delta U$

$$\delta U = \sum_{bi=1}^{n} \left[\int_{bi} N \cdot dn + \int_{bi} Q_z \cdot dc_z + \int_{bi} Q_y \, dc_y + \int_{bi} M_x \cdot d\phi + \int_{bi} M_y \, d\theta_y + \int_{bi} M_z \cdot d\theta_z \right]$$

K K

→ SI LOS SISTEMAS SON ELÁSTICOS Y PROPORCIONALES.

$$dn = \frac{N(x)}{EA} dx. \qquad dc_y = \frac{K_y Q_y(x)}{G \cdot A} dx \qquad d\theta_z = \frac{M_z(x)}{E I_z} dx.$$

$$dc_z = \frac{K_z Q_z(x)}{GA} dx \qquad d\theta_y = \frac{M_y(x)}{E I_y} \cdot dx$$

$$d\phi = \frac{M_T(x)}{G I_P}\, dx$$ → T. de Coulomb → Secc. circulares macizas o huecas.

$$d\phi = \frac{M_T(x)}{4 G \Omega^2} \int \frac{ds}{e(s)}\, dx = \frac{M_T(x)}{G \underbrace{\dfrac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{e(s)}}}_{I_T}}\, dx$$

Secciones tubulares simplemente conexas de e pequeño.

T. de Bredt.

$$d\phi = \frac{M_T(x)}{G I_P}\, dx \qquad I_P = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} l_i\, t_i^3$$

Secciones abiertas

T. de Saint. Venant.

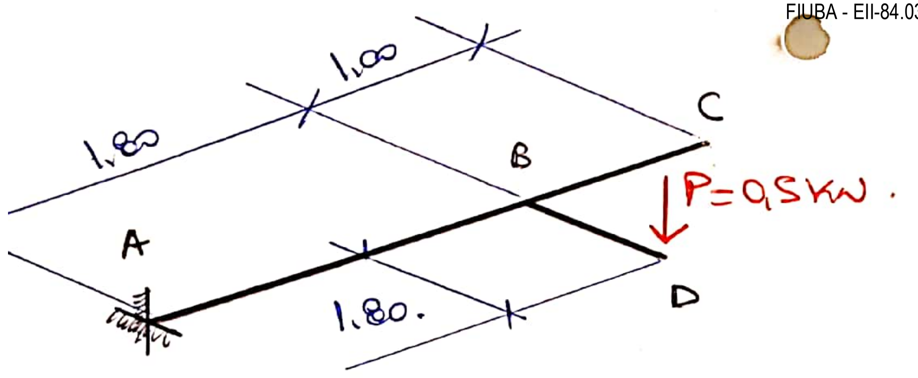
$$\delta U = \sum_{bi=1}^{n} \left[\int_{bi} \frac{N^{SE} . N^{DV}}{EA}\, dx + \cancel{\int_{bi} \frac{Q_y^{SE} Q_y^{DV} k_y}{GA}\, dx} + \cancel{\int_{bi} \frac{Q_z^{SE} Q_z^{DV} k_z\, dx}{GA}} + \right.$$

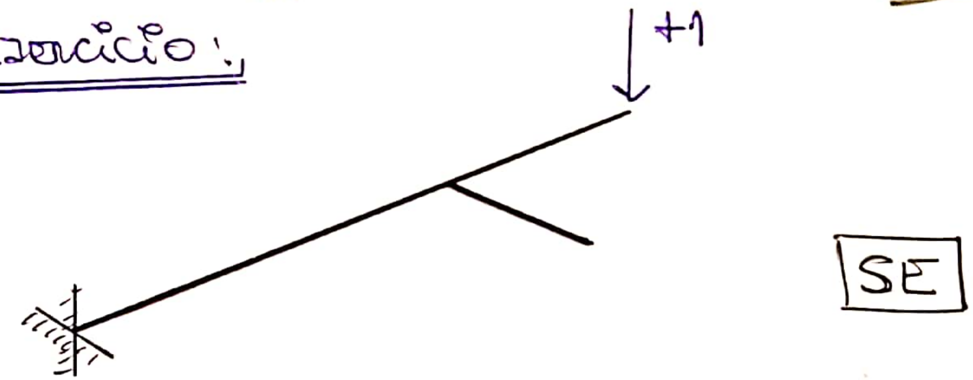
$$\left. + \int_{bi} \frac{M_T^{SE} M_T^{DV}}{G I_T}\, dx + \int_{bi} \frac{M_y^{SE} M_y^{DV}}{E I_y}\, dx + \int_{bi} \frac{M_z^{SE} M_z^{DV}}{E I_z}\, dx . \right]$$

BARRAS ESBELTAS → LAS DEFORMACIONES SON DESPRECIABLES.

14/14

11) - EJERCICIO:





ESTRUCTURA NODAL EN LA CUAL PUEDO CALCULAR ALGÚN DESPLAZAMIENTO.

DV