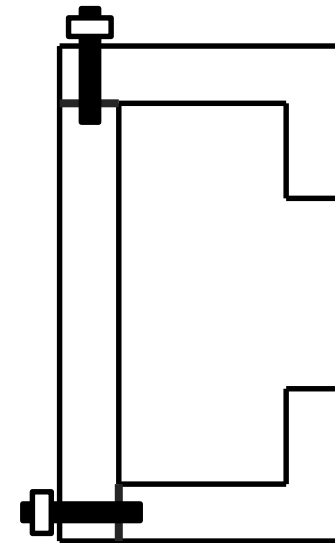
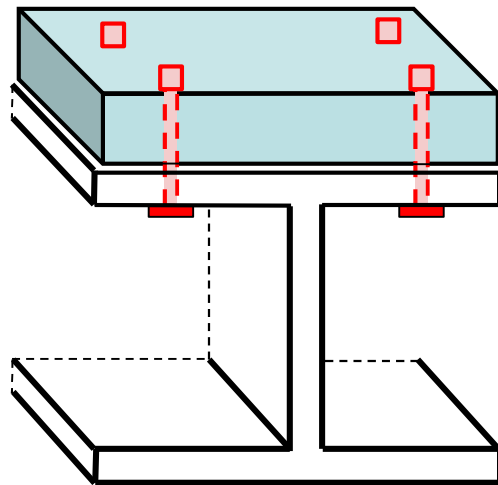




Solicitación por Corte (Flexión Variable)



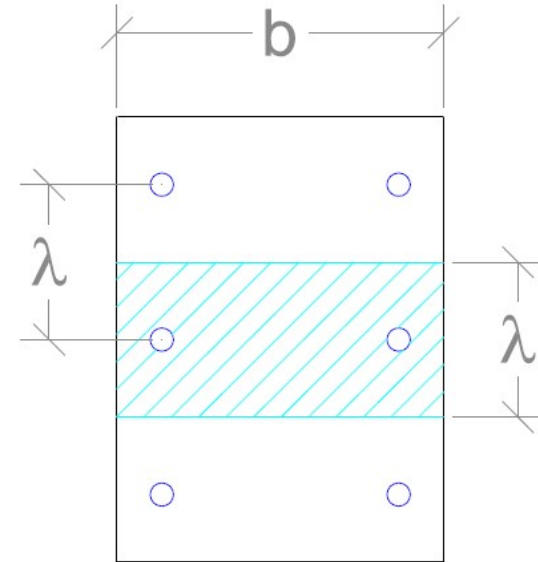
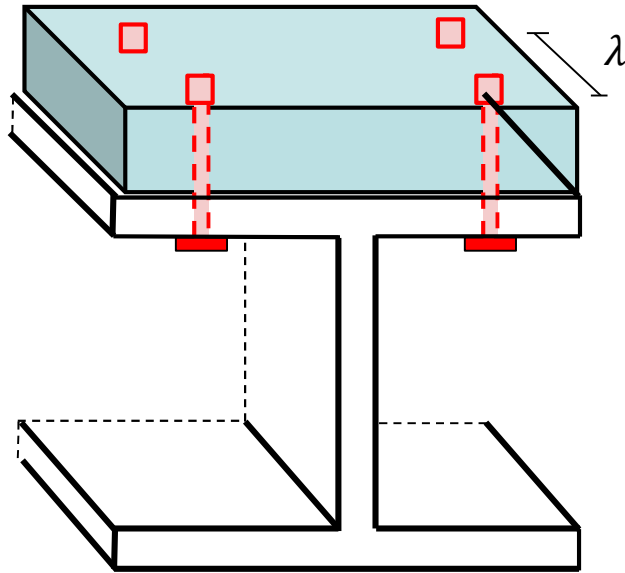
Constanza Ruffinelli – Tania Poletilo – Manuela Medina – Bautista Chesta

Universidad de Buenos Aires

Estabilidad II

flopez@fi.uba.ar / aterlisky@fi.uba.ar

Uniones y bulones



F_s : Fuerza que solicita a la unión [*Fuerza*]

S : de la sección que resbala [*Longitud*³]

J : de toda la sección [*Longitud*⁴]

λ : Separación entre bulones [*Longitud*]

$$F_s = \frac{Q \cdot S}{J} \cdot \lambda \quad F_s = q \cdot \lambda$$

$$q = \frac{Q \cdot S}{J} = \int \tau db$$

q : Flujo de corte [$\frac{\text{Fuerza}}{\text{Longitud}}$]

Uniones y bulones



$$F_S = \frac{Q \cdot S}{J} \cdot \lambda$$

$$F_R = \tau_{adm} \cdot A_b \cdot \eta = \tau_{adm} \cdot \frac{\pi \cdot D_b^2}{4} \cdot \eta$$

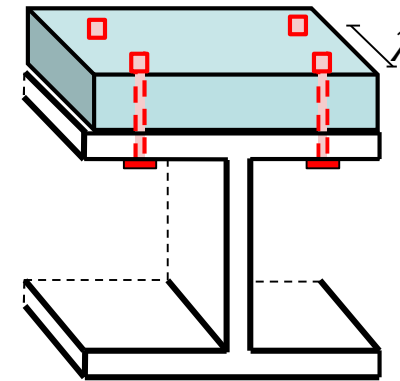
F_R : Fuerza que resiste la unión [Fuerza]

τ_{adm} : τ_{adm} del bulón [Fuerza/Longitud²]

A_b : Área del bulón [Longitud²]

η : Planos de corte [–]

D_b : Diámetro Bulón [Longitud]



$$F_S \leq F_R$$

$$\frac{Q \cdot S}{J} \cdot \lambda \leq \tau_{adm} \cdot \frac{\pi \cdot D_b^2}{4} \cdot \eta$$

$$\frac{4 \cdot Q \cdot S}{\pi \cdot \eta \cdot J \cdot \tau_{adm}} \cdot \lambda \leq D_b^2$$

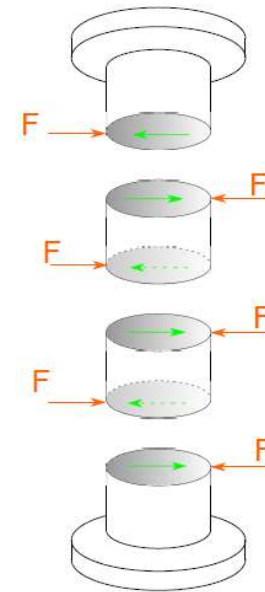
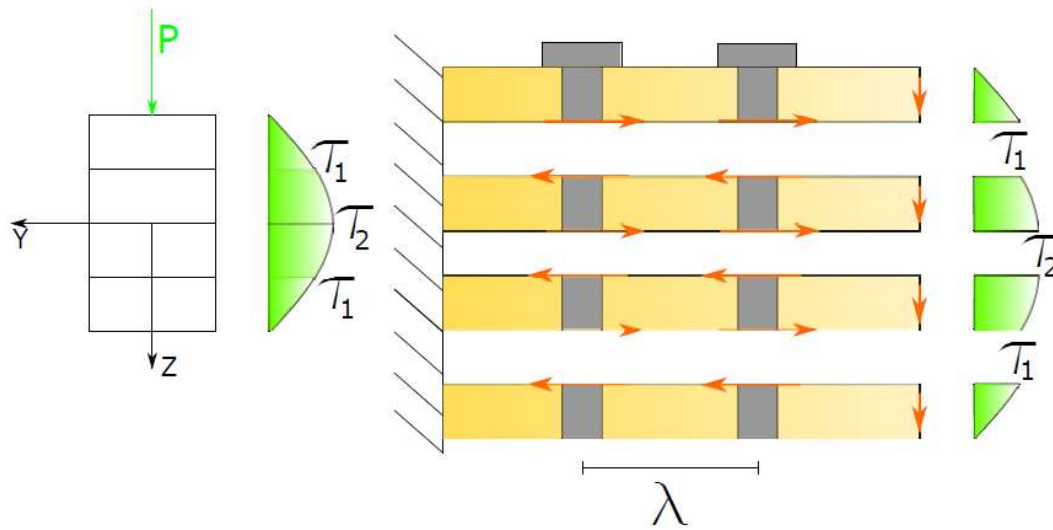
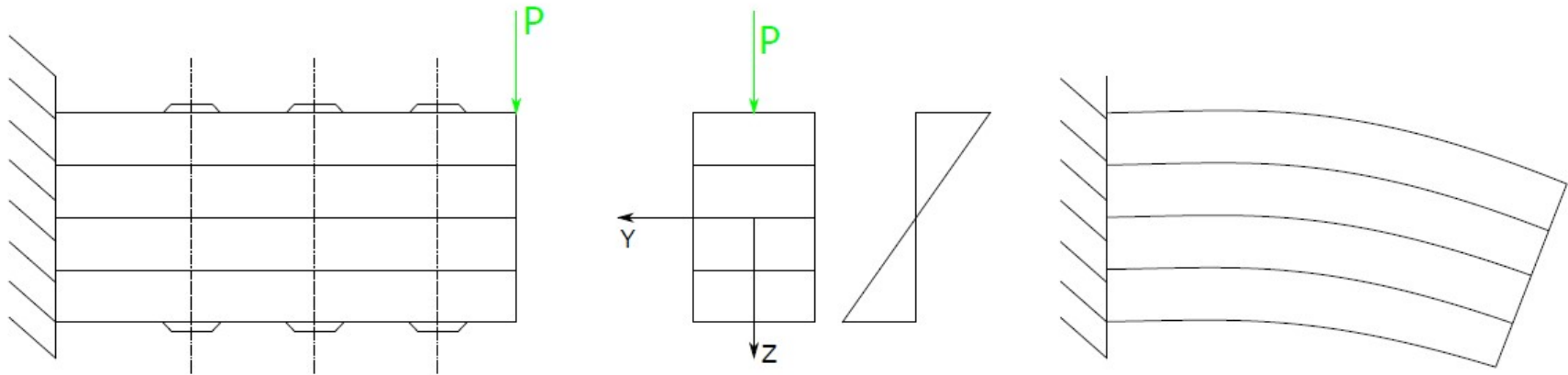
Por lo general λ se define como una cantidad de diámetros de bulón.

Por ejemplo: $\lambda \approx 15D_b$

$$\frac{4 \cdot Q \cdot S}{\pi \cdot \eta \cdot J \cdot \tau_{adm}} \cdot 15 \leq D_b$$



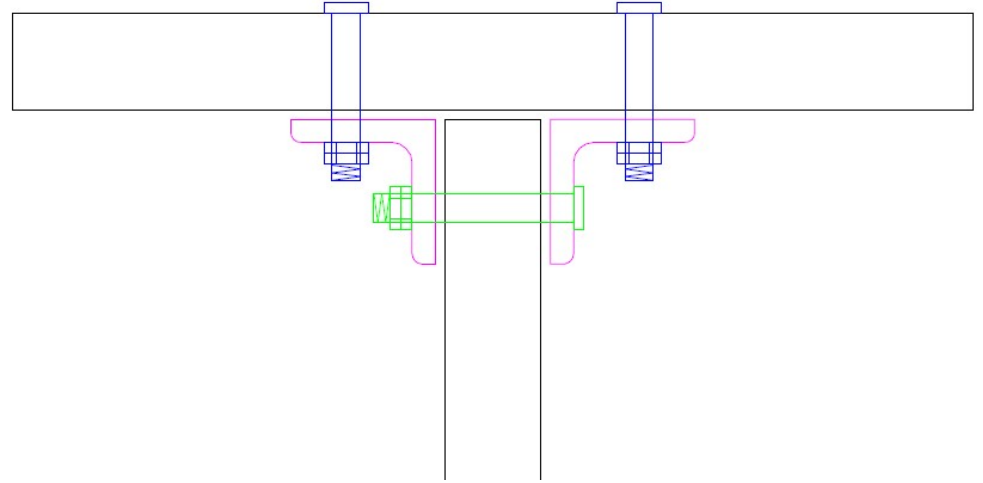
Uniones y bulones





Uniones y bulones - Planos de corte

$$\frac{Q \cdot S}{J} \cdot \lambda \leq \tau_{adm} \cdot A_b \cdot \eta$$



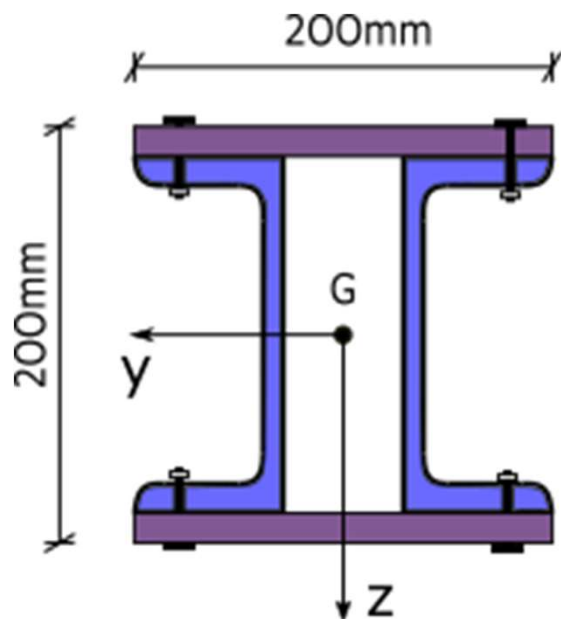
¿Cómo calculamos los bulones azules? ¿Cómo calculo el S y cuanto vale η ?

¿Cómo calculamos el bulón verde? ¿Cómo calculo el S y cuanto vale η ?



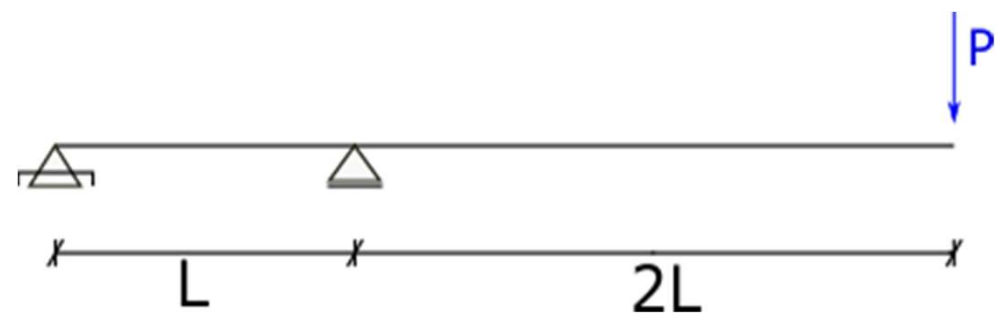
Ejercicio 1:

1. Determinar el diámetro de los bulones (ϕ) para una separación de bulones de $\lambda = 10 \phi$
2. Realizar esquemáticamente el diagrama de tensiones y flujo de tensiones tangenciales (sin valores)
3. Calcular la máxima tensión tangencial y aclarar a qué punto corresponde



Platabandas espesor: 10mm

UPN 180



$$\tau_{adm} = 100 \text{ MPa}$$

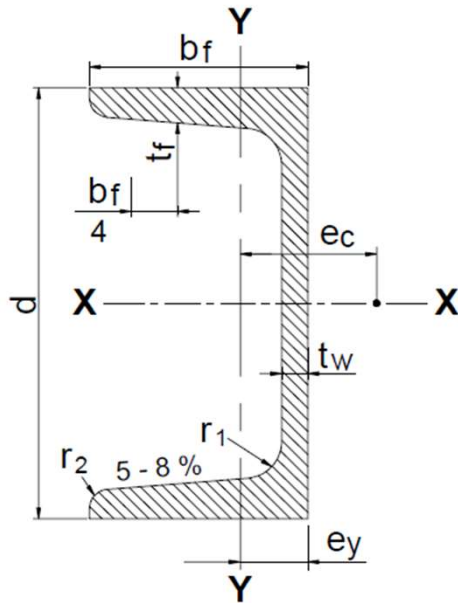
$$P = 10 \text{ kN}$$

$$L = 5 \text{ m}$$

ϕ [mm]	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0	3.4	4.1	4.5
Calibre	12	13	14	15	16	17	18	19	20



UPN 180



$$d = 180 \text{ mm}$$

$$b_f = 70 \text{ mm}$$

$$t_f = 11 \text{ mm}$$

$$t_w = 8 \text{ mm}$$

$$e_y = 1,92 \text{ mm}$$

$$e_c = 3,75 \text{ mm}$$

$$A = 28 \text{ cm}^2$$

$$J_x = 1350 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 114 \text{ cm}^4$$

$$J_t = 8,91 \text{ cm}^4$$

$$S_{Mx} = 89,6 \text{ cm}^3$$

$$S_{My} = 24,04 \text{ cm}^3$$

S_M : Momento estático de media sección

Aclaración: En la tabla CIRSOC aparece como "Q"

¿Que resuelvo primero? ¿Por qué?

Opción 1: Características geométricas de la sección

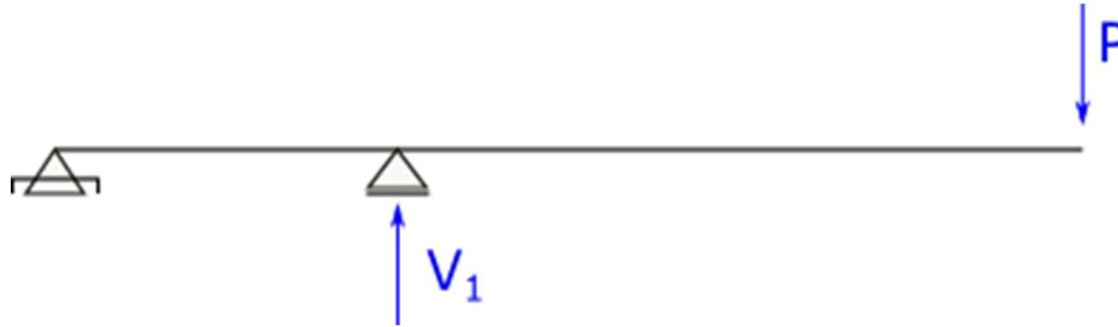
Opción 2: Resolución de la estructura



Resuelvo estructura



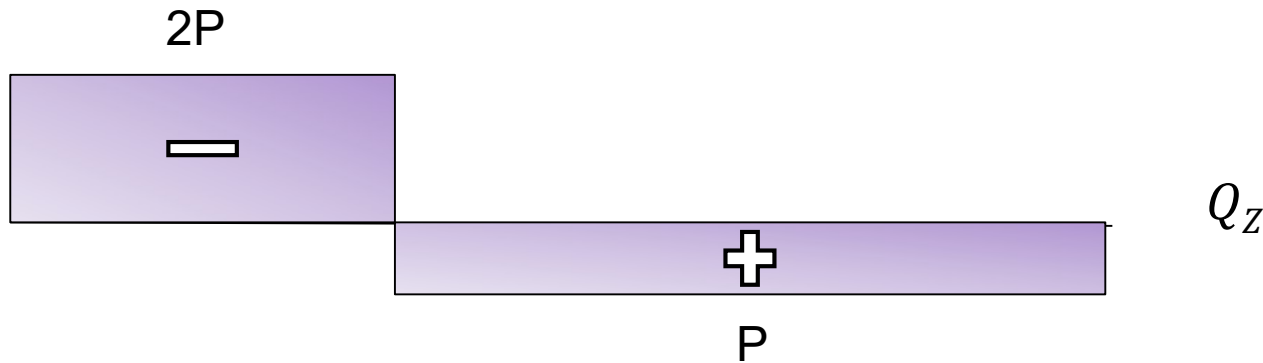
Veó que características necesito calcular



Calculo momentos desde el apoyo fijo

$$V_1 \cdot L - 3L \cdot P = 0$$

$$V_1 = 3P$$



Sección más solicitada



$$Q_z = -2P$$



Fórmula de Jouravski-Colignon

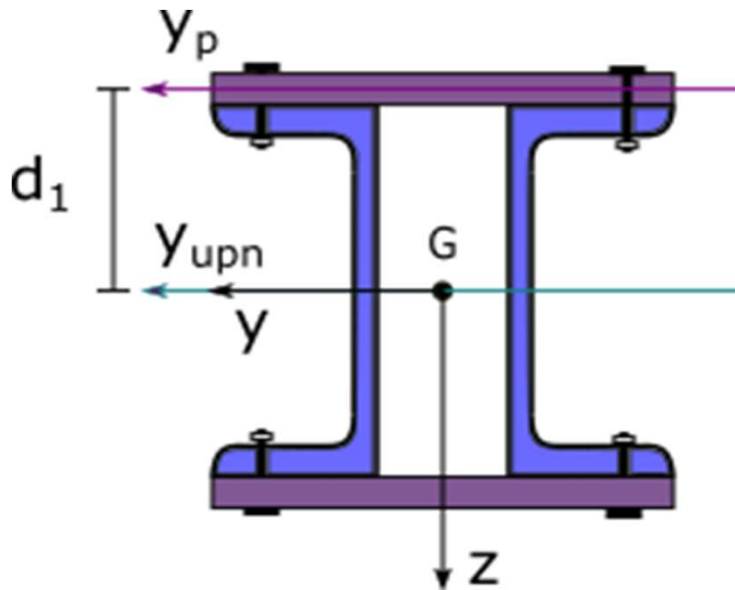
$$\tau = \frac{Q \cdot S}{J_{EN} \cdot b}$$

Como el Q es en "z",
el eje neutro es el "y"



$$\tau = \frac{Q_z \cdot S^*}{J_y \cdot b}$$

Por lo tanto, de las características de la sección compuesta sólo debo calcular el J_y



Como el eje principal "y" del UPN y de la sección compuesta es el mismo no hay que utilizar para éste el teorema de Steiner **NO** confundir con la distancia en "z"

$$J_y = 2 \cdot (J_{y,p} + A_p \cdot d_1^2) + 2 \cdot J_{y,UPN}$$

$$J_{y,p} = \frac{e^3 \cdot l}{12} \quad A_p = e \cdot l \quad d_1 = \frac{d}{2} + \frac{e}{2}$$

$$J_y = 2 \cdot \left[\frac{(10\text{mm})^3 \cdot 200\text{mm}}{12} + 10\text{mm} \cdot 200\text{mm} \cdot \left(\frac{180\text{mm}}{2} + \frac{10\text{mm}}{2} \right)^2 \right] + 2 \cdot 1350\text{cm}^4 \quad \Rightarrow \quad J_y = 6313,33\text{cm}^4$$

Dimensionamiento de los bulones



Los bulones deben evitar el resbalamiento entre la platabanda y los perfiles. La fuerza solicitante producida por el corte debe ser menor a la fuerza que resisten los bulones

$$F_R > F_S$$

$$\tau_{adm} \cdot A_b \cdot \eta > \frac{Q \cdot S}{J} \cdot \lambda$$

¡Observación!

Trabajaremos en módulo

Valores ya determinados:

$$Q_z = 2P = 20 \text{ kN}$$

$$\lambda = 10 \phi$$

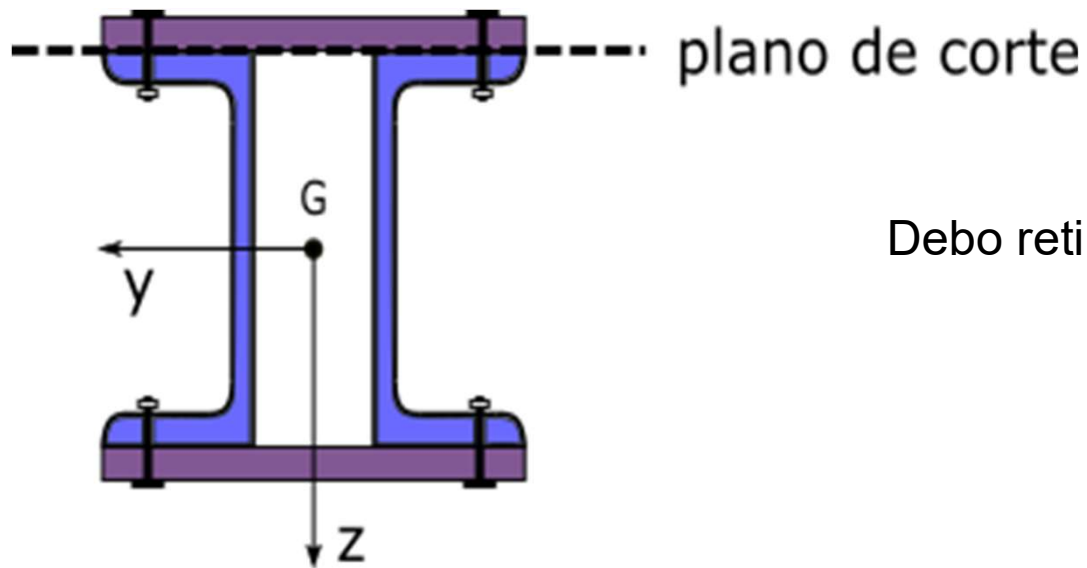
$$J_y = 6313,33 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{adm} = 100 \text{ MPa} = 10 \text{ kN/cm}^2$$

$$A_b = \frac{\pi \cdot \phi^2}{4}$$

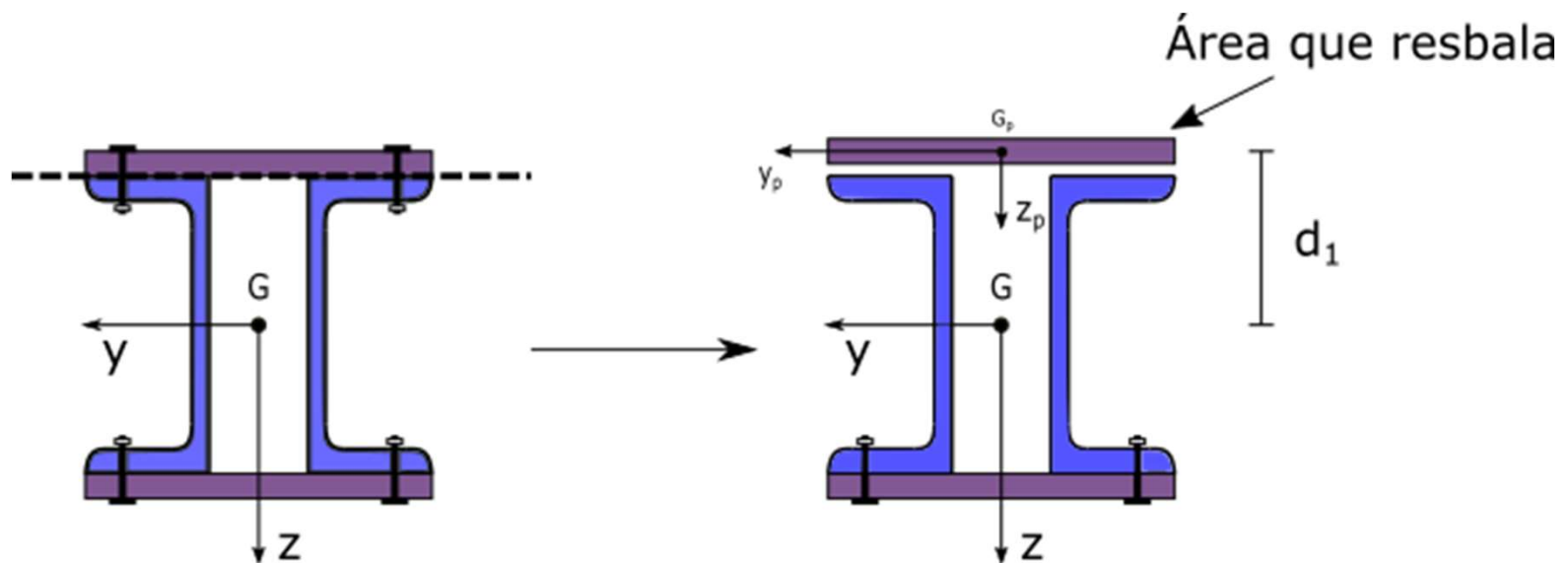


Falta determinar S y η

 η 

Debo retirar dos bulones:

$$\eta = 2$$

 S 

$$S = A_p \cdot d_1 = 10\text{mm} \cdot 200\text{mm} \cdot \left(\frac{180\text{mm}}{2} + \frac{10\text{mm}}{2} \right) = 190\text{cm}^3$$



$$\tau_{adm} \cdot A_b \cdot \eta > \frac{Q \cdot S}{J} \cdot \lambda$$

$$A_b > \frac{Q \cdot S}{J \cdot \tau_{adm} \cdot \eta} \cdot 10 \cdot \phi$$

$$\frac{\frac{\pi \cdot \phi^2}{4}}{\phi} > \frac{Q \cdot S}{J \cdot \tau_{adm} \cdot \eta} \cdot 10$$

Para el caso límite



$$\phi_{lim} = \frac{Q \cdot S}{J \cdot \tau_{adm} \cdot \eta} \cdot \frac{10 \cdot 4}{\pi} = \frac{20 \text{ kN} \cdot 190 \text{ cm}^3 \cdot 40}{6313,33 \text{ cm}^4 \cdot 10 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 2 \cdot \pi}$$

$$\phi_{lim} = 3,832 \text{ mm}$$

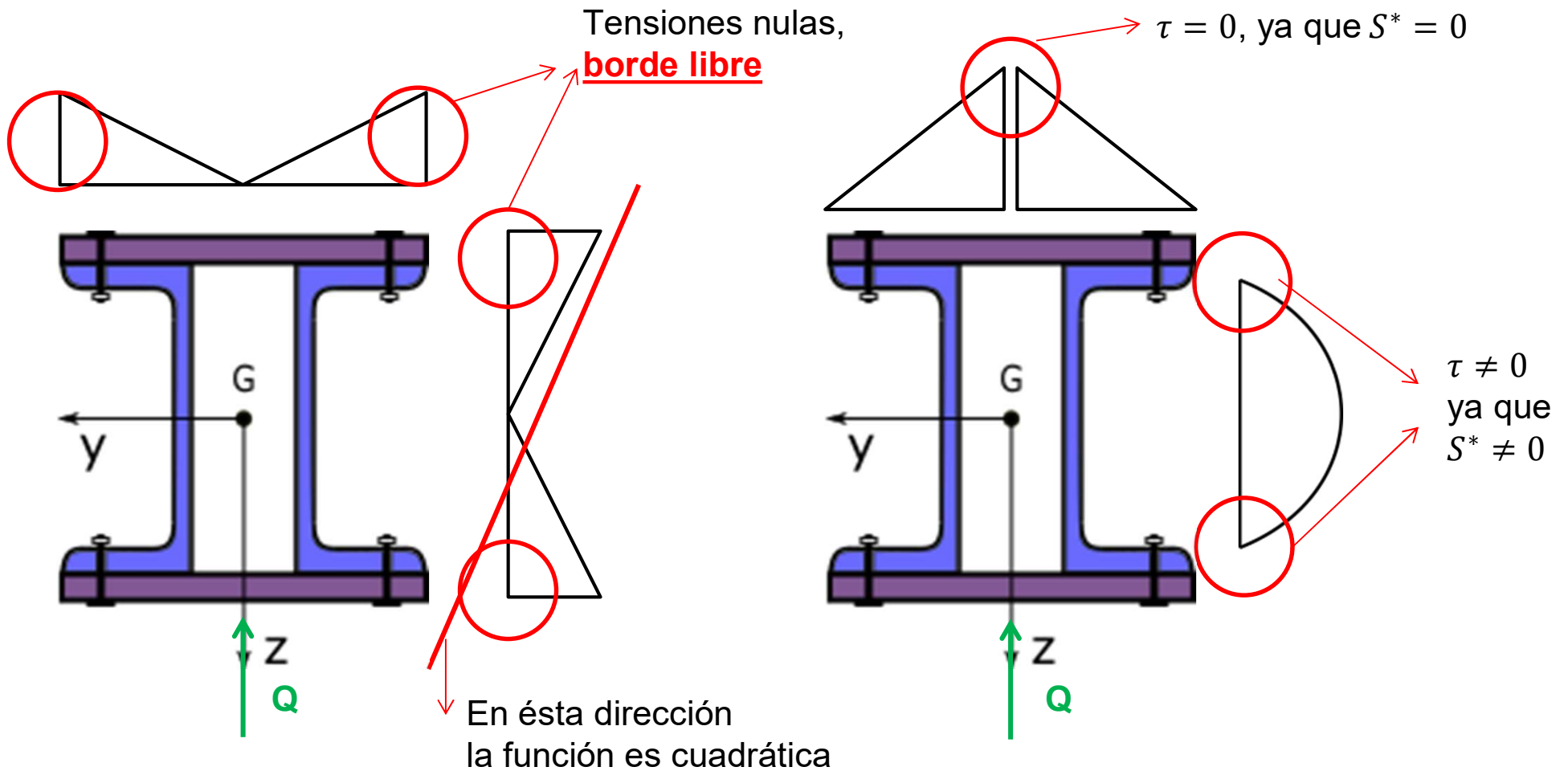
Diámetros
comerciales

$$\phi = 3,4 \text{ mm}$$

¿Cual elijo?

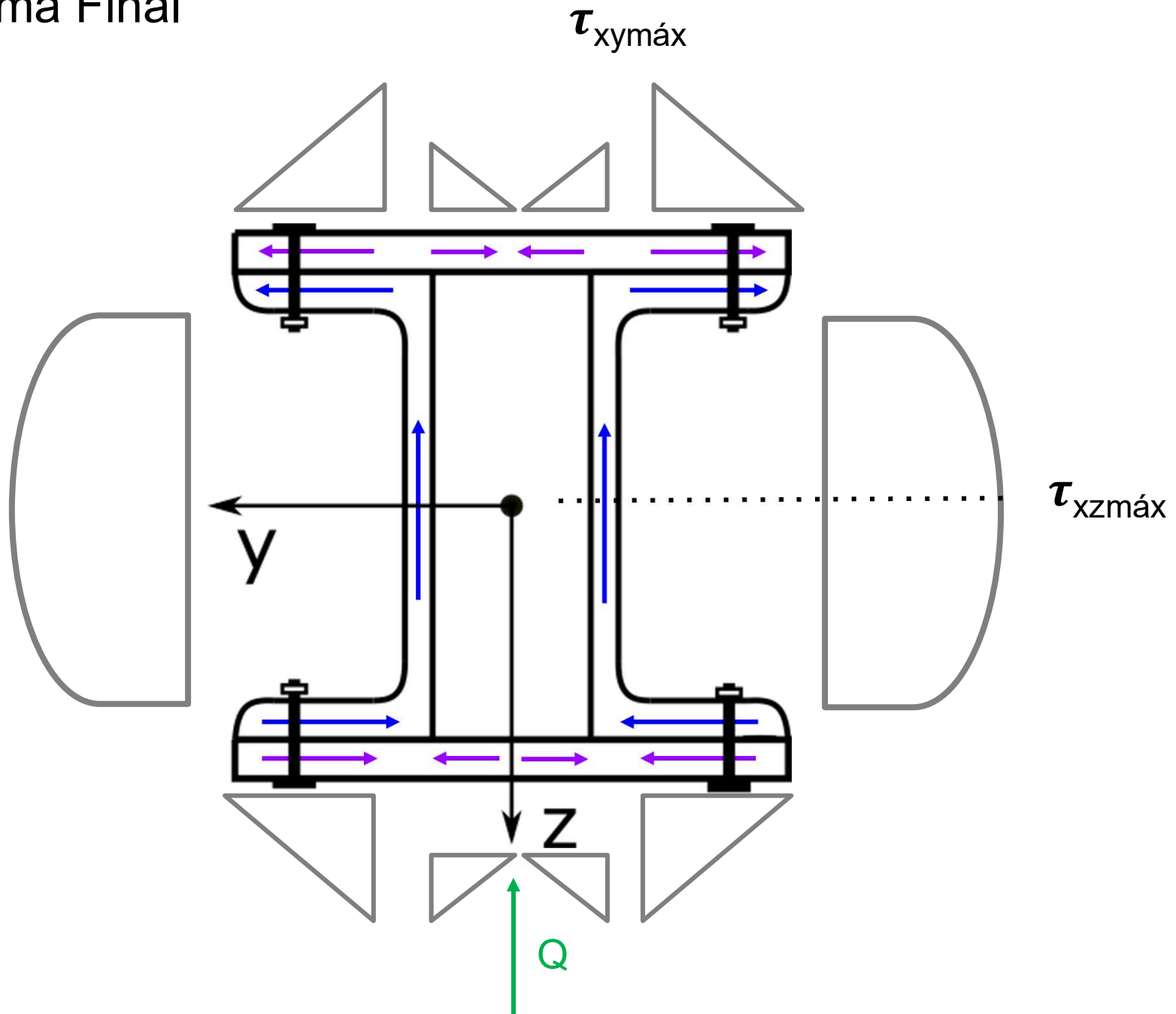
$$\phi = 4,1 \text{ mm}$$

Propuesta de diagramas de Tensiones



¿Se generan tensiones por torsión? ¿Por qué?

Diagrama Final



Cálculo máxima tensión tangencial



Calculo los valores máximos $\tau_{xymáx}$ y $\tau_{xzmáx}$, y veo cuál es mayor

$$S_{xy} = (t_f + e) \cdot (b_f - t_w) \cdot \left(\frac{d}{2} + e - \frac{t_f + e}{2} \right) = 116,53 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q \cdot S_{xy}}{J_y \cdot (t_f + e)} = 0,176 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

¡Observación!

En general, la tensión máxima se encuentra en concordancia con el eje neutro, ya que en éste punto se maximiza el momento estático.

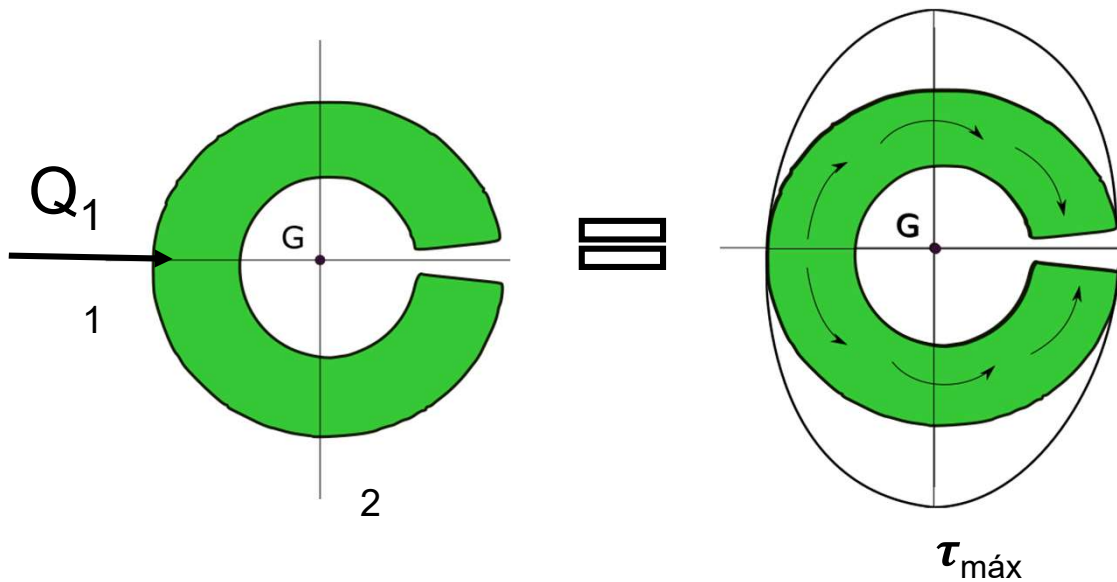
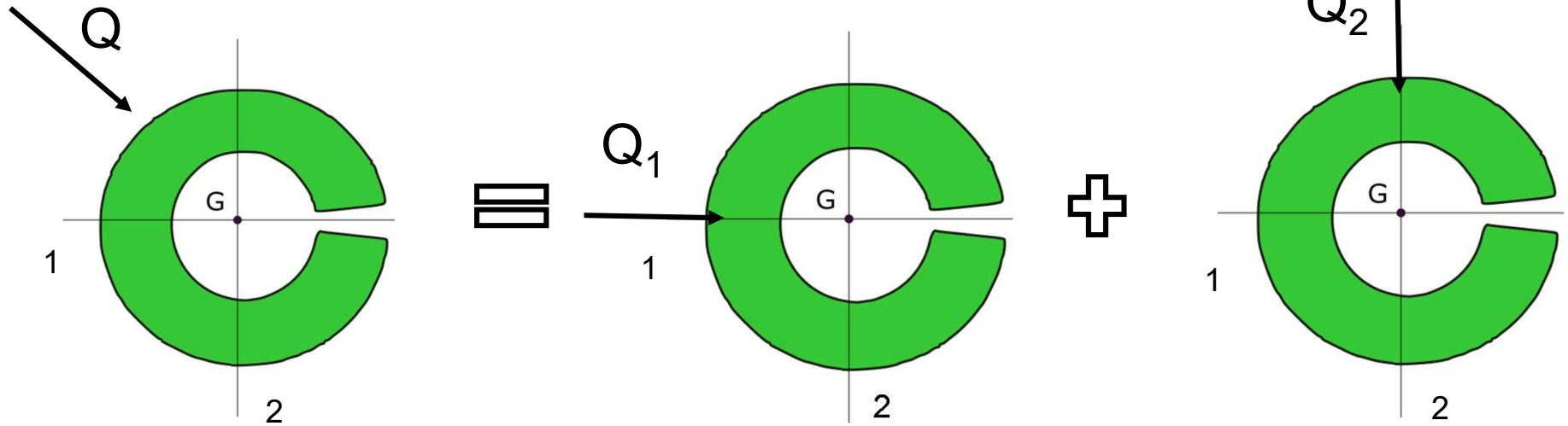
Igualmente se recomienda verificar ambos

$$S_{xz} = e \cdot l \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{e}{2} \right) + 2 \cdot S_{M,y} = 369,2 \text{ cm}^3$$

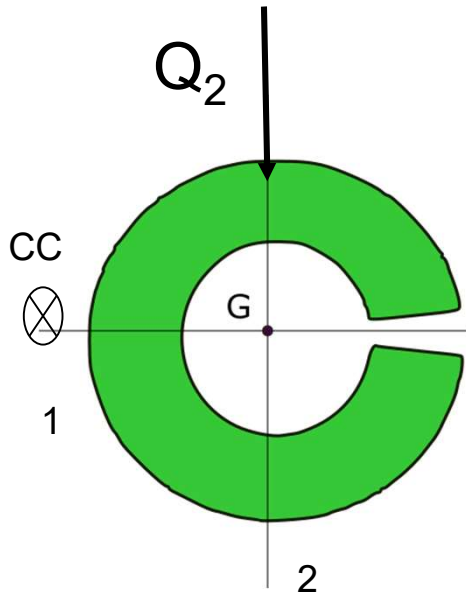
$$\tau_{xz} = \frac{Q \cdot S_{xz}}{J_y \cdot 2 \cdot t_w} = 0,731 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_{máx} = 0,731 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

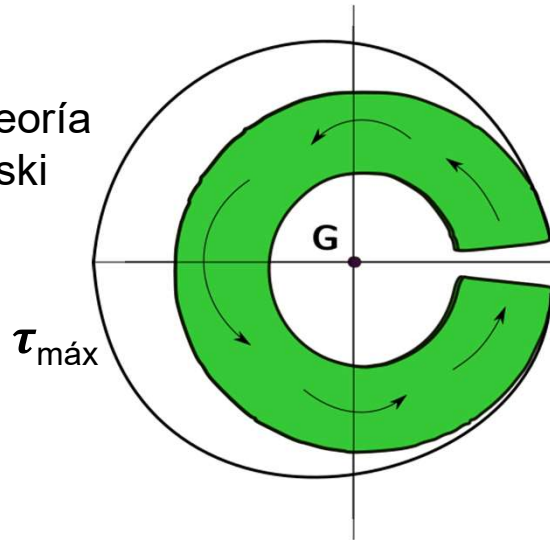
Centro de corte



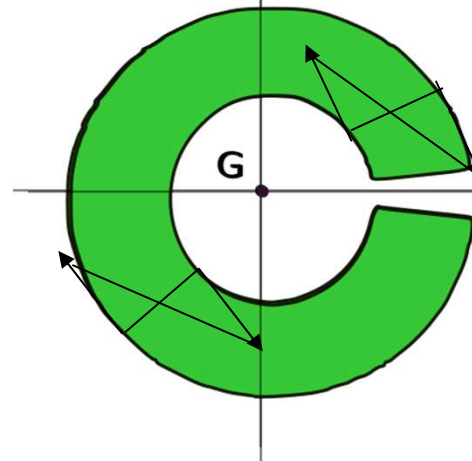
Como el corte está en dirección de un eje de simetría pasa por el centro de corte y por lo tanto no se generan tensiones adicionales



Si aplico la teoría de Jouravski



M_t



Le sumamos: $M_t = \int \tau \cdot r \, dA$

$M_t = Q \cdot d_{cc}$ y la dirección se determina para que, respecto del baricentro, el momento torsor sea 0.

Aquí se ve que si integramos las tensiones tangenciales, la ecuación de equivalencia del momento torsor no se cumple. Entonces debemos añadir una torsión.

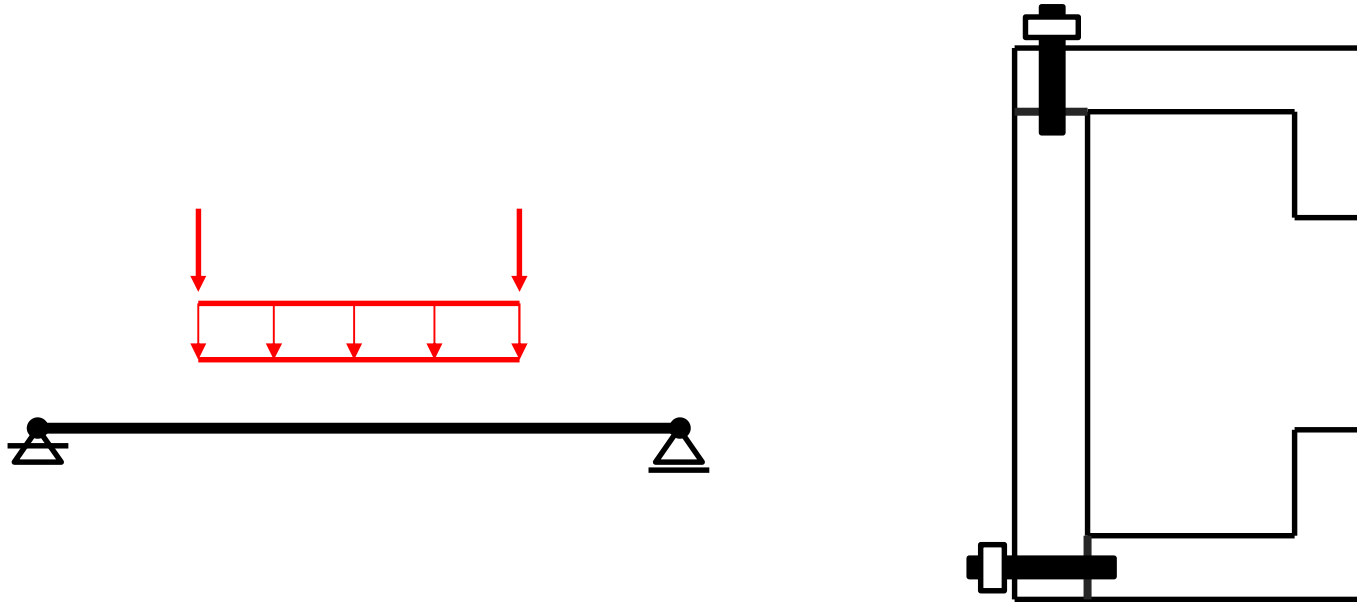
Para calcular la distancia al centro de corte:

$$d_{cc} = \frac{\int \tau \cdot r \, dA}{Q_2}$$

Propiedad geométrica de la sección



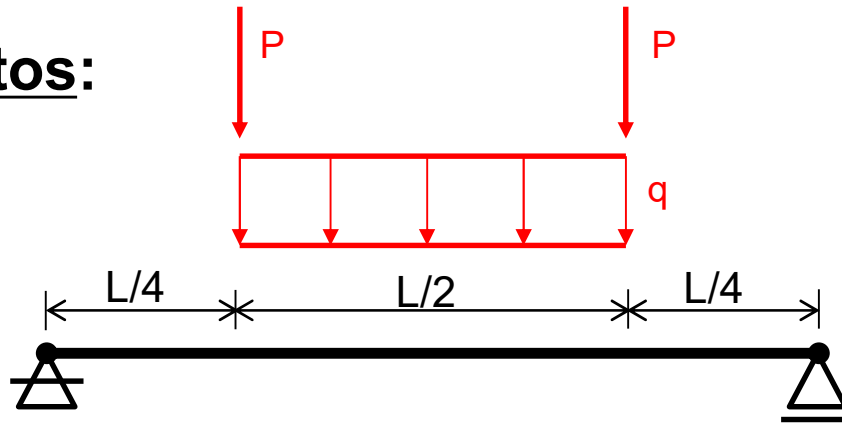
Ejercicio 2: Para la estructura de la figura, con carga pasante por G , se pide:



- 1) Trazar los **diagramas característicos**
- 2) Trazar **cualitativamente el flujo de tensiones** tangenciales de Jouravsky, indicando sentido y orden de variación. Justificar
- 3) Verificar por resistencia la **máxima tensión tangencial**
- 4) **Dimensionar el bulón** más solicitado. Justificar



Datos:



$$P = 2 \text{ kN} \quad q = 1,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$L = 6 \text{ m}$$

$$h = 200 \text{ mm} \quad b = 100 \text{ mm}$$

$$d = 30 \text{ mm} \quad t = 4,75 \text{ mm}$$

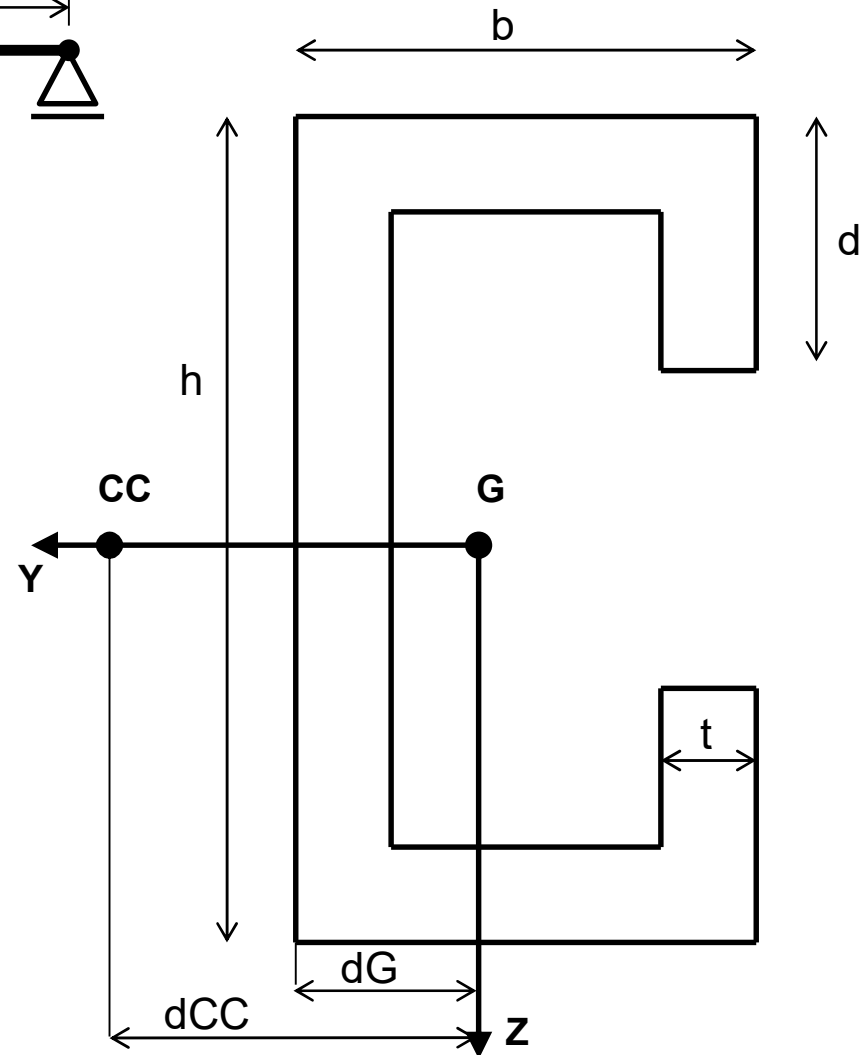
$$d_G = 3,47 \text{ cm} \quad d_{CC} = 8,28 \text{ cm}$$

$$J_y = 1290,87 \text{ cm}^4 \quad J_z = 278,99 \text{ cm}^4$$

$$J_t = 1,54 \text{ cm}^4$$

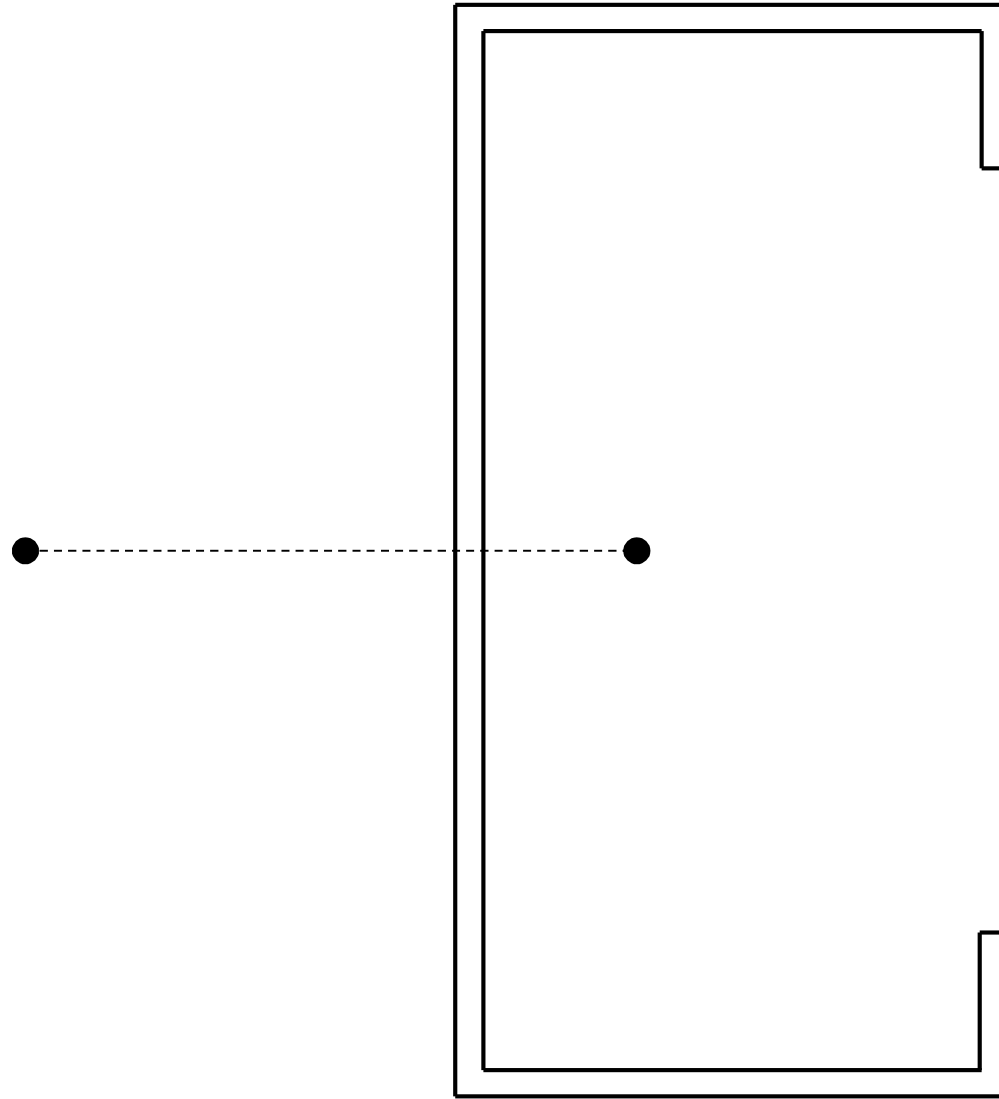
$$\sigma_{Adm} = 24 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \tau_{Adm} = 14 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_{AdmB} = 18 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \lambda = 20\Phi$$



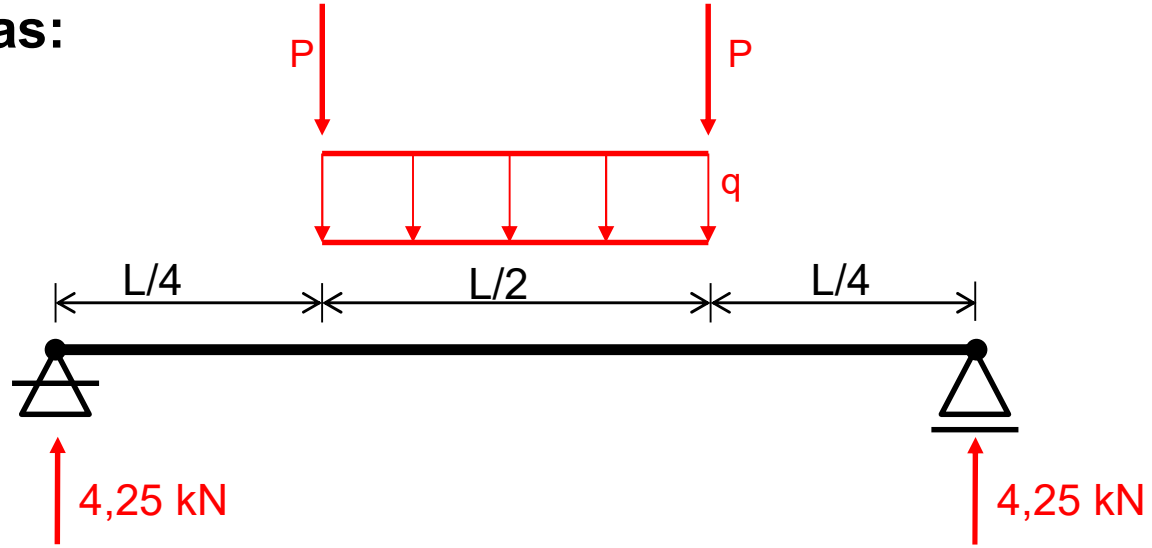


A escala:

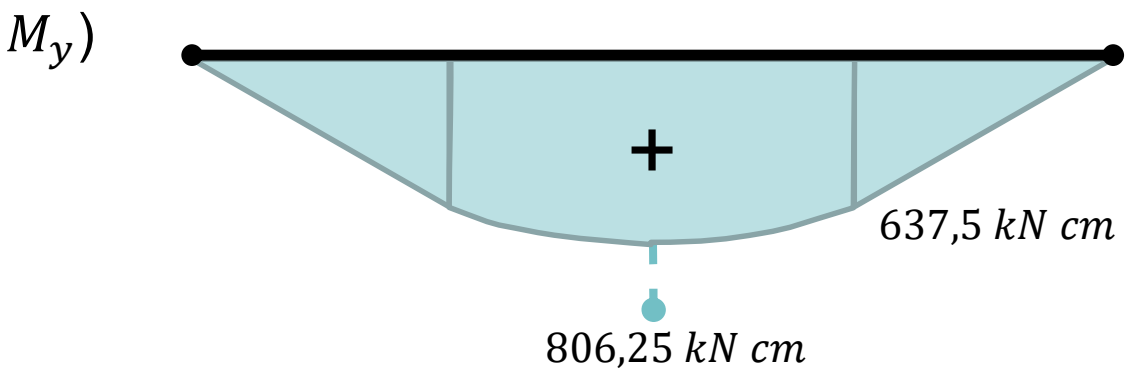
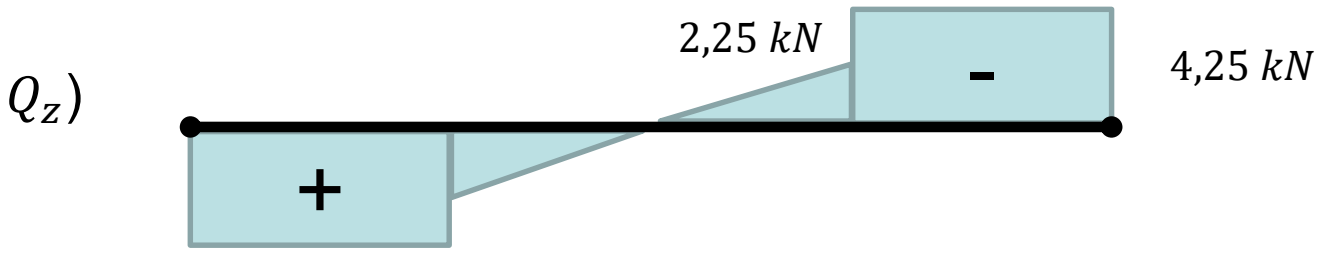




1) Diagramas:



$P = 2 \text{ kN}$
 $q = 1,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
 $L = 6 \text{ m}$

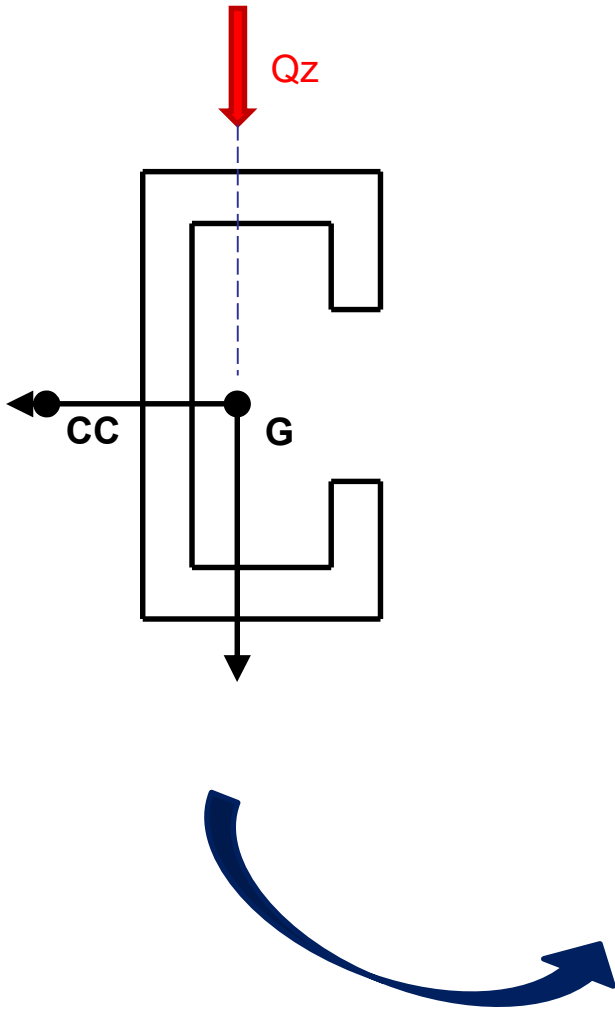


El resto de las solicitaciones, ¿son todas nulas?

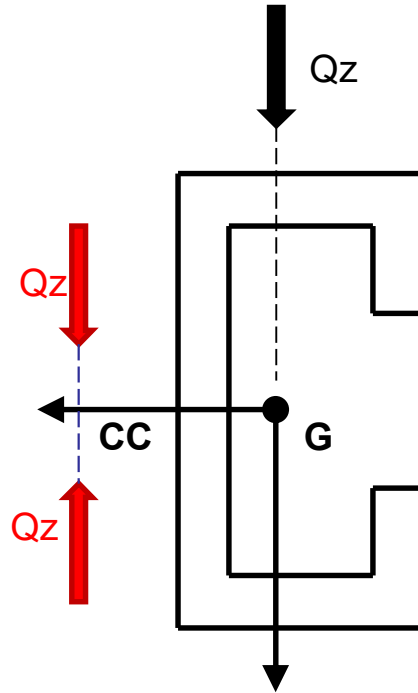




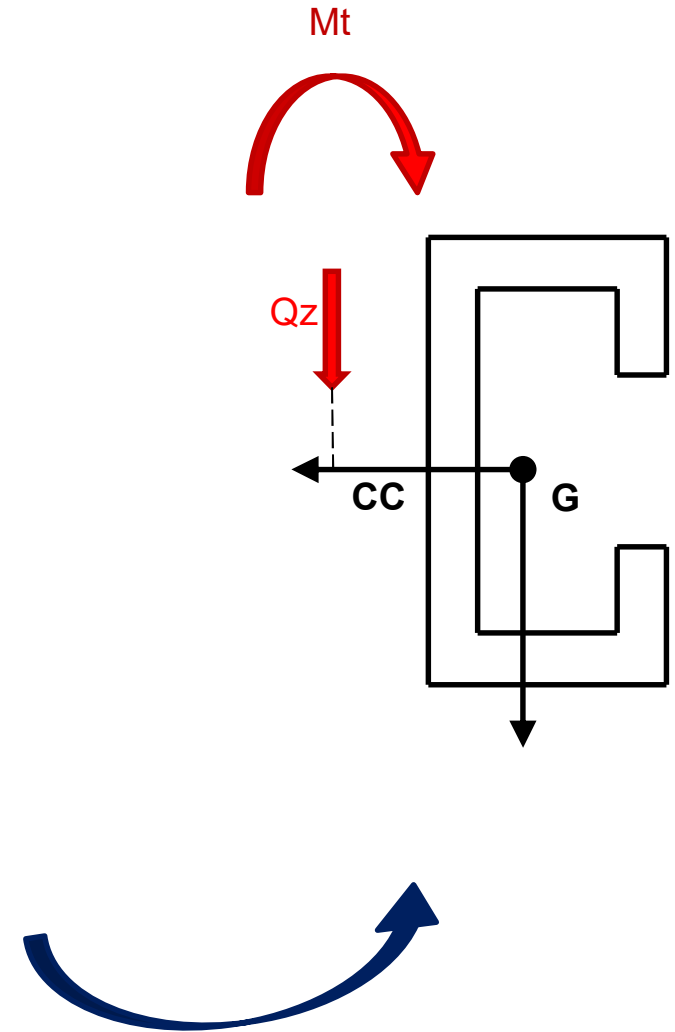
1 La carga está aplicada fuera del centro de corte



2 Trasladamos Q al CC



3 Nos resulta un Momento Torsor





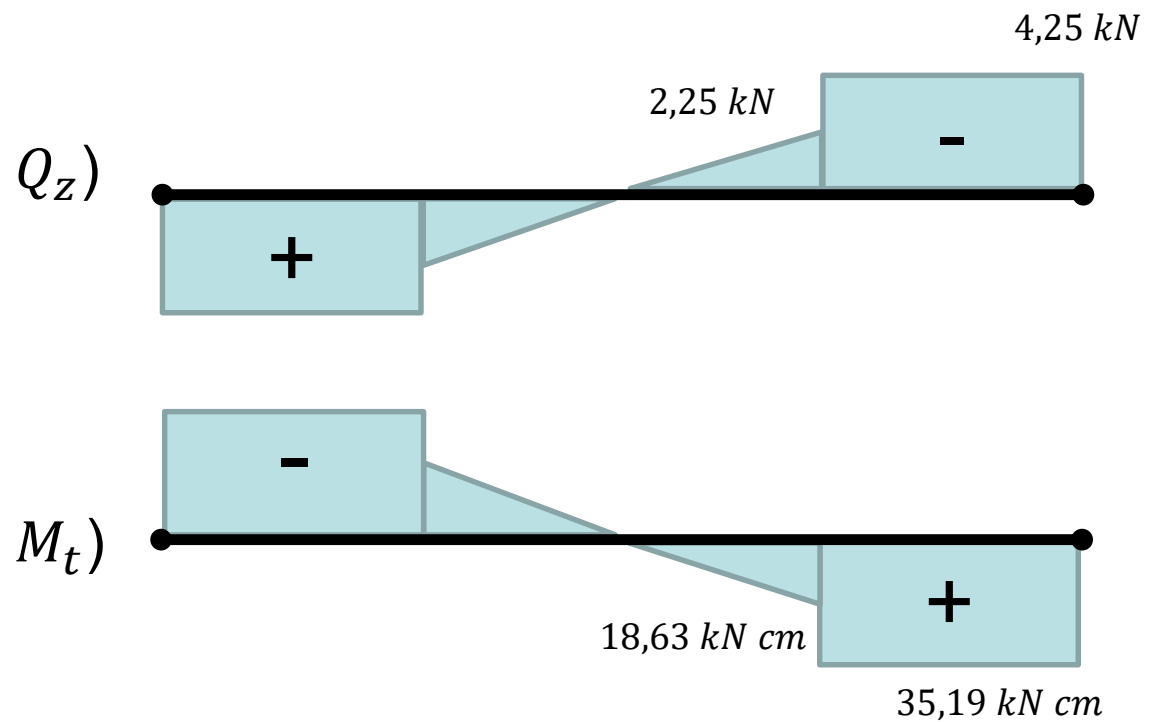
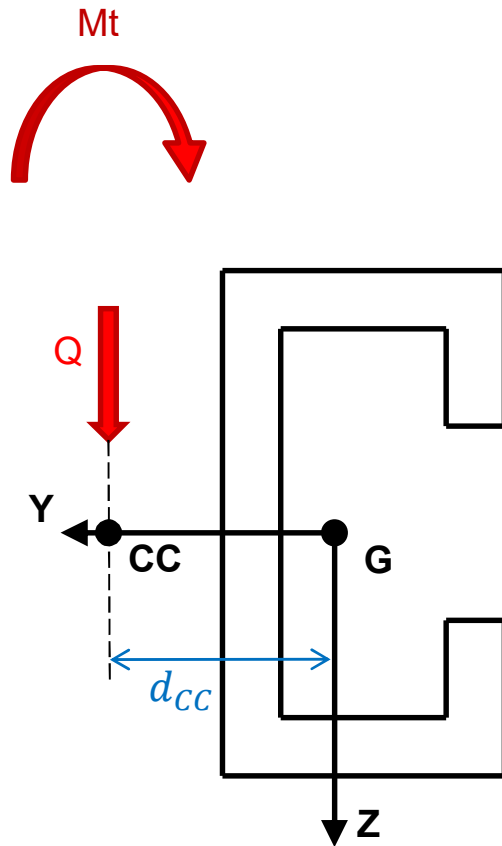
1) Diagramas:

Signo de M_t :

Vemos que cuando Q es positivo, el M_t generado es negativo, y viceversa.

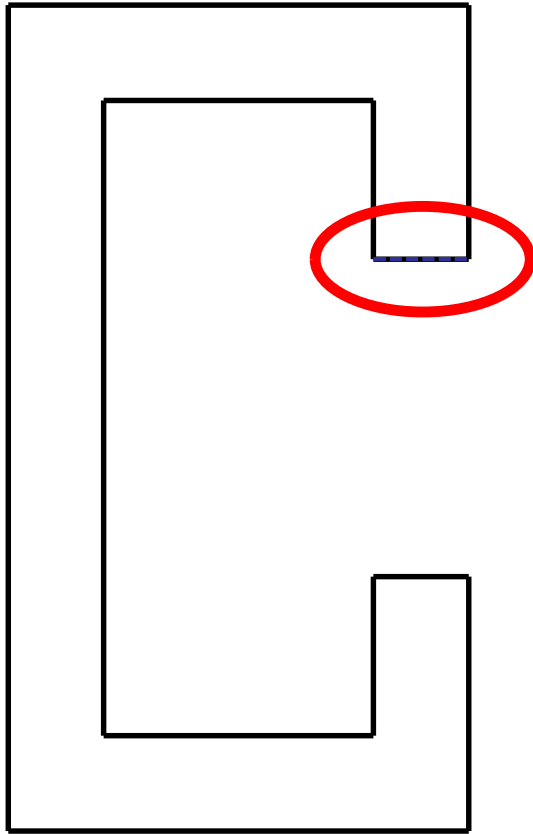
Valor de M_t :

$$M_t = Q \cdot d_{CC} \quad \text{con} \quad d_{CC} = 8,28 \text{ cm}$$



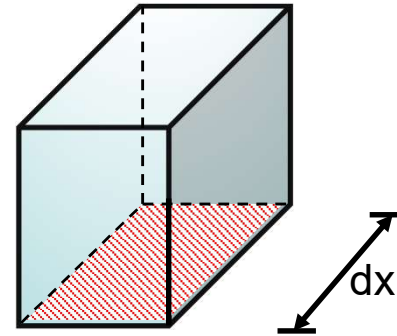


2) Flujo de Tensiones:



$$\tau_{Q_z} = \frac{Q_z \cdot S^*}{J_y \cdot b}$$

Comenzamos por una de las puntas:



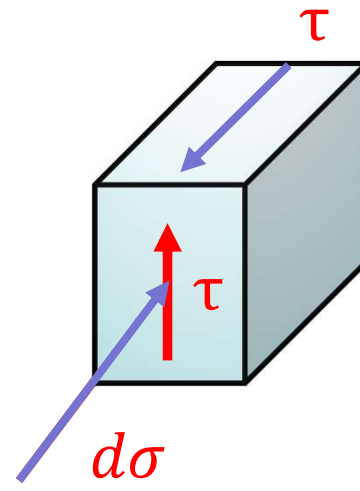
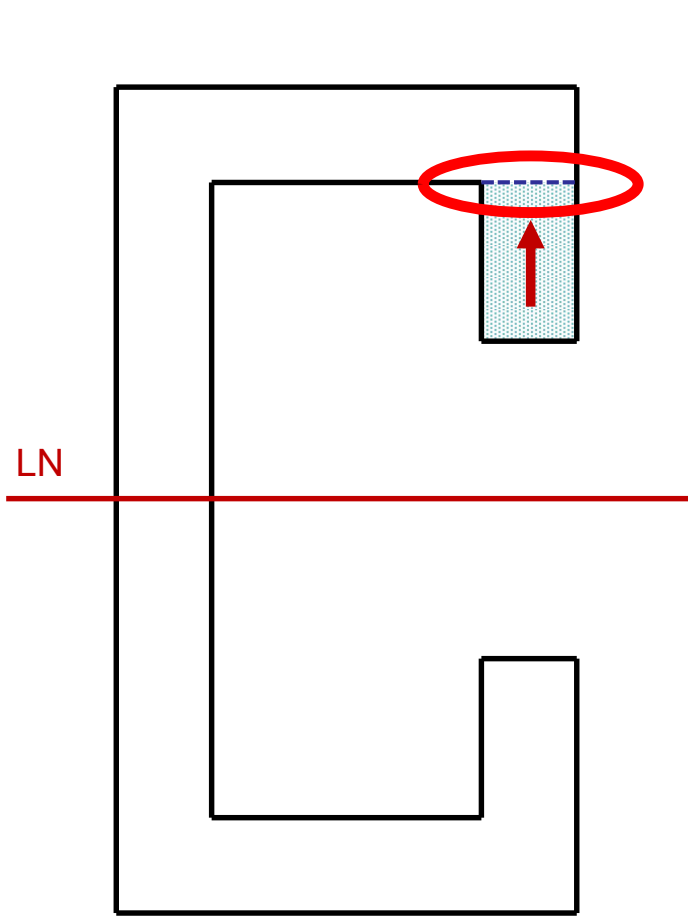
τ siempre vale 0 en las caras libres.

Por lo tanto, por el teorema de Cauchy, τ también valdrá cero en las puntas.

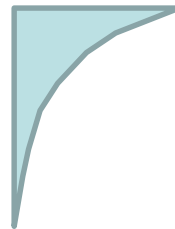


2) Flujo de Tensiones:

Solicitación por Corte – Flexión variable

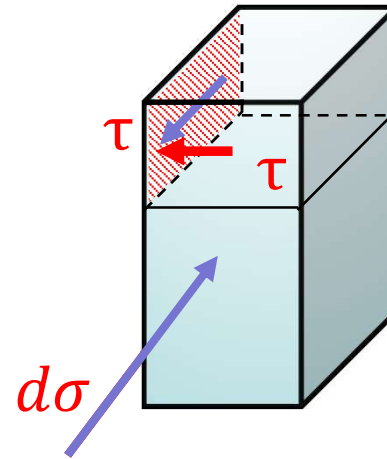
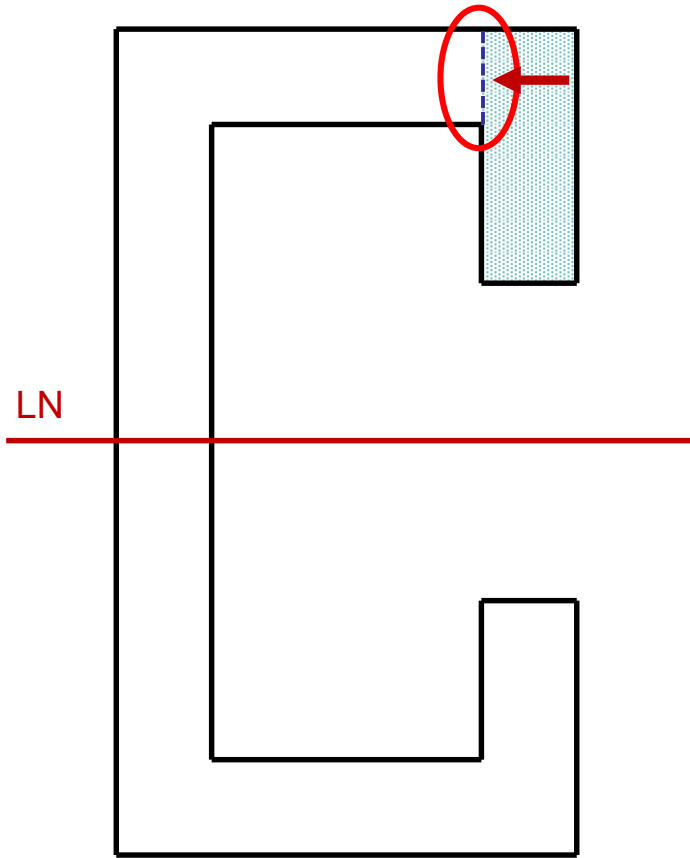


Orden de variación: **Parabólica con pendiente creciente**



Aumenta el área y aumenta la distancia hacia la Línea Neutra.

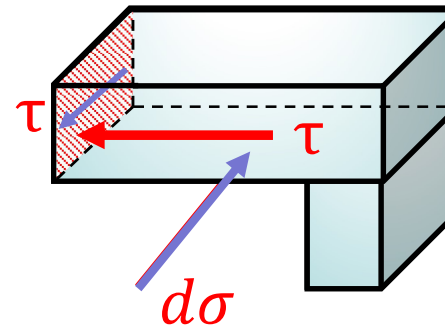
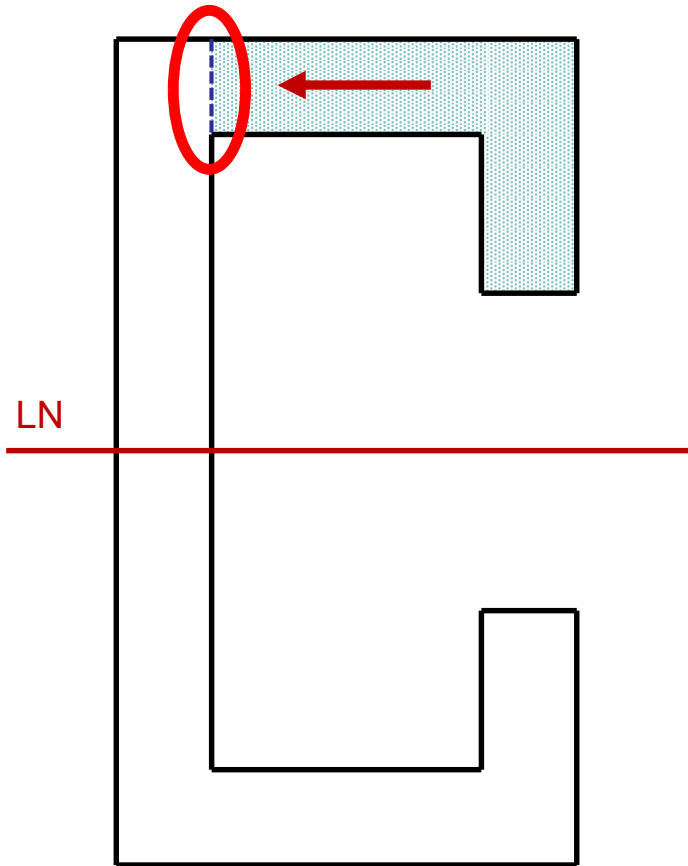
2) Flujo de Tensiones:



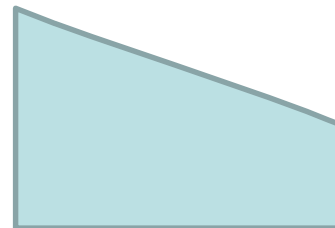


2) Flujo de Tensiones:

Solicitación por Corte – Flexión variable



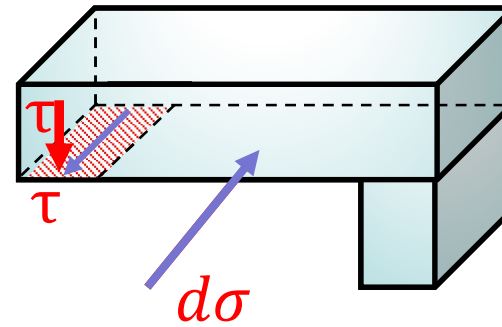
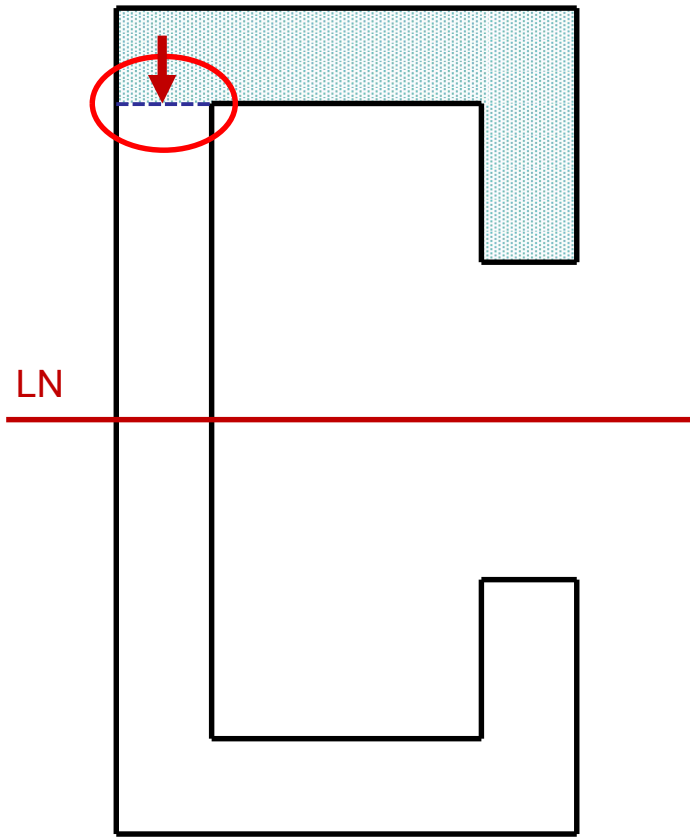
Orden de variación: **Lineal**



Aumenta el área y aumenta (muy de a poco) la distancia hacia la Línea Neutra.

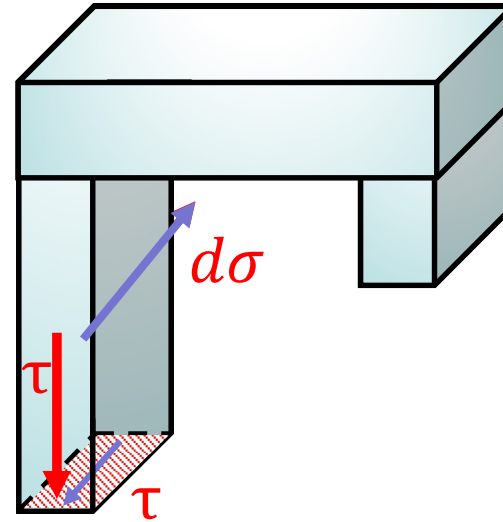
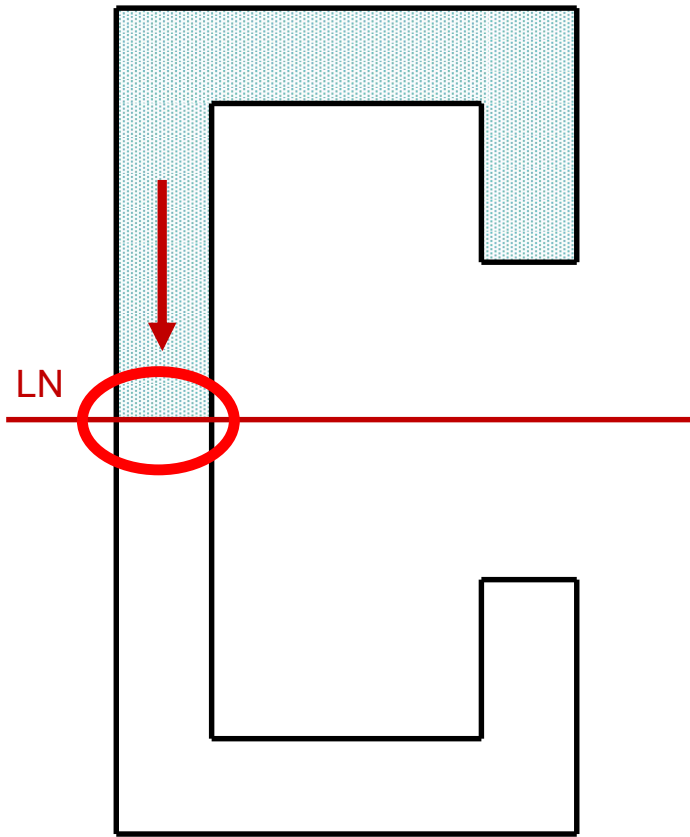
Pero si analizamos las áreas que resbalan por separado vemos que varía linealmente.

2) Flujo de Tensiones:





2) Flujo de Tensiones:



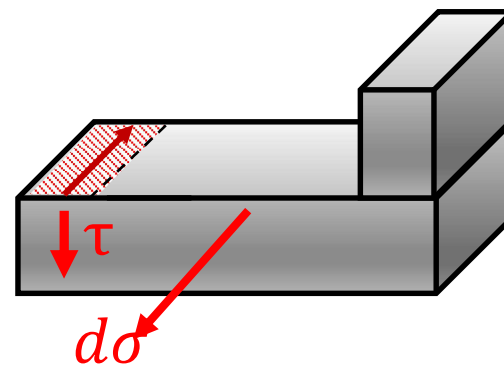
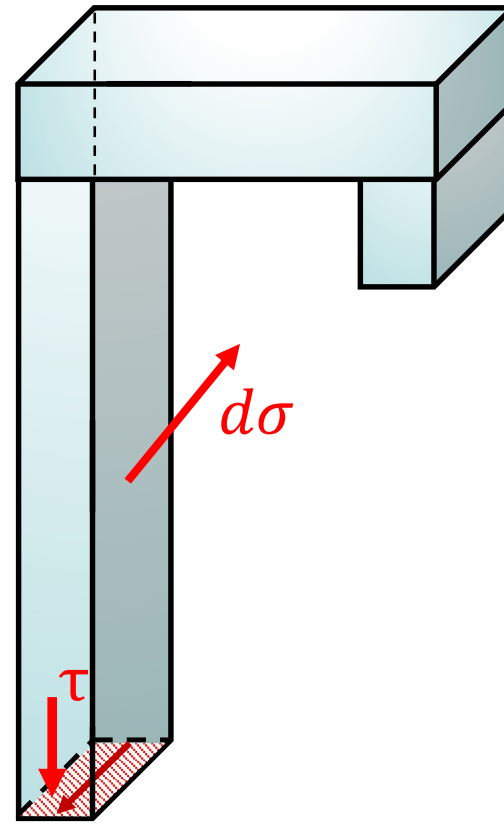
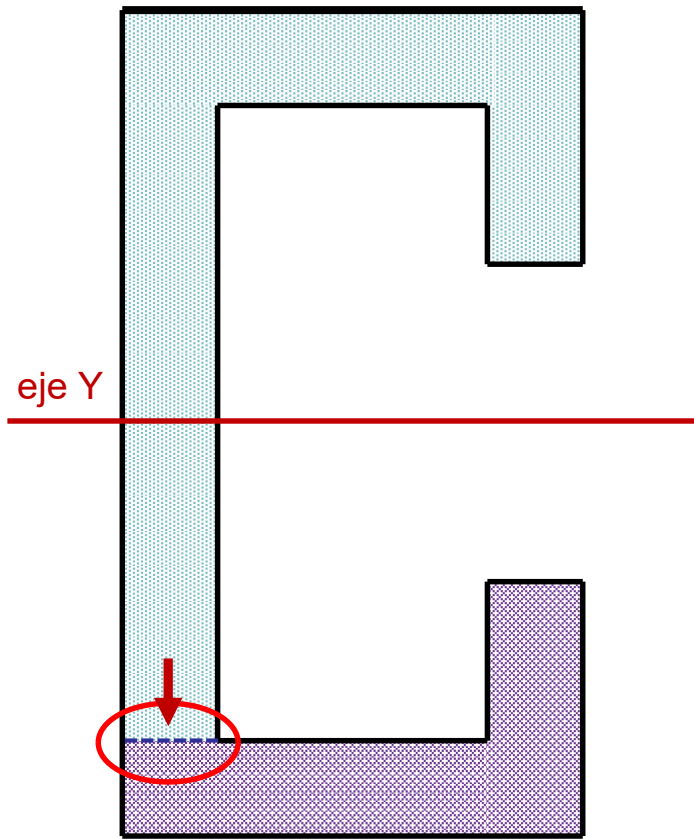
Orden de variación:

**Parabólica con
pendiente decreciente**



Aumenta el área y disminuye la
distancia hacia la Línea Neutra.

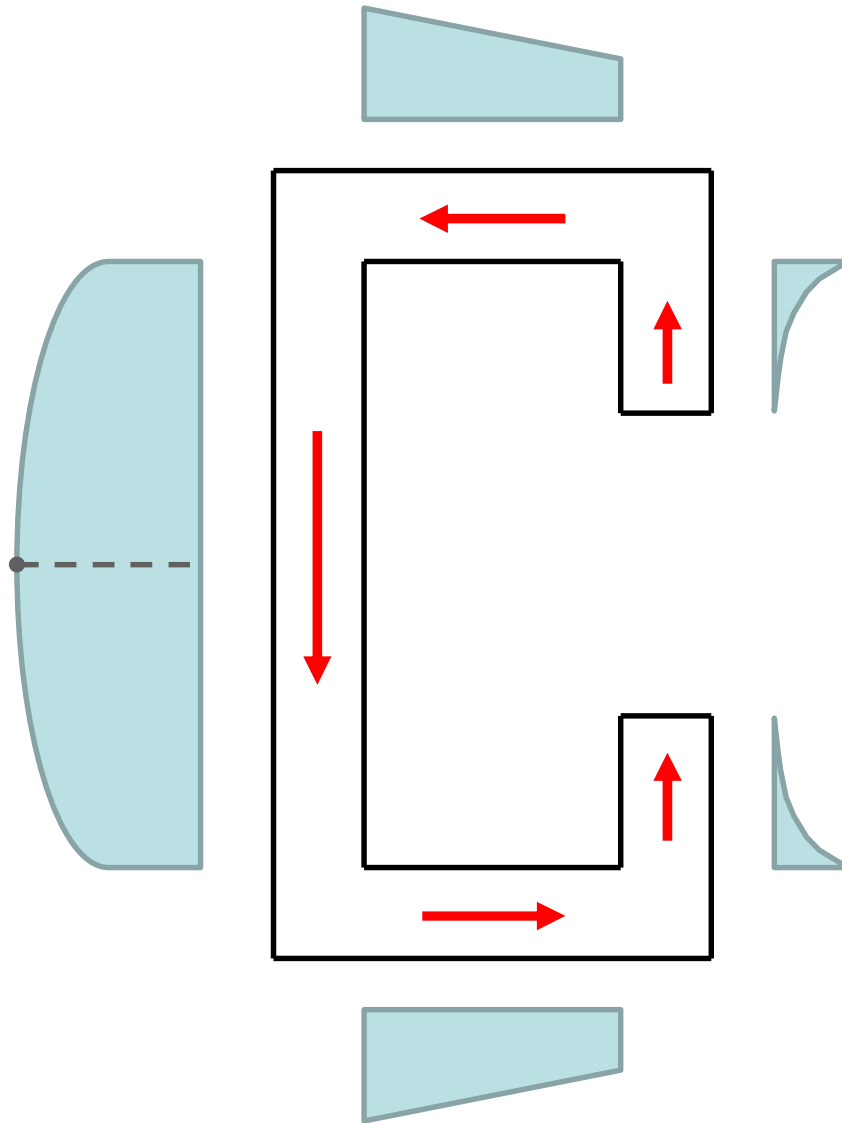
2) Flujo de Tensiones:





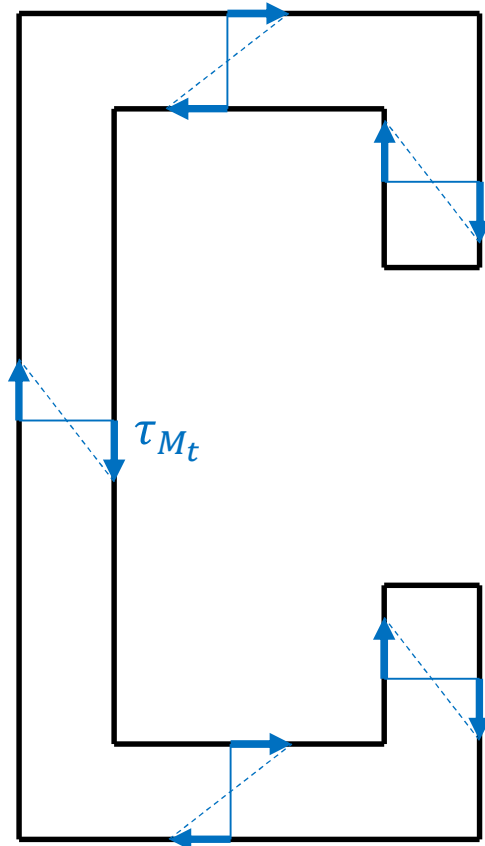
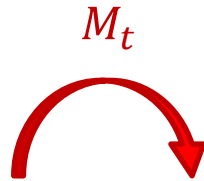
2) Flujo de Tensiones:

Solicitación por Corte – Flexión variable



$$\tau_{Q_z} = \frac{Q_z \cdot S^*}{J_y \cdot b}$$

3) Tensión por torsión:



Datos: $M_t = 35,19 \text{ kN cm}$

$$J_t = 1,54 \text{ cm}^4$$

$$e = 0,475 \text{ cm}$$

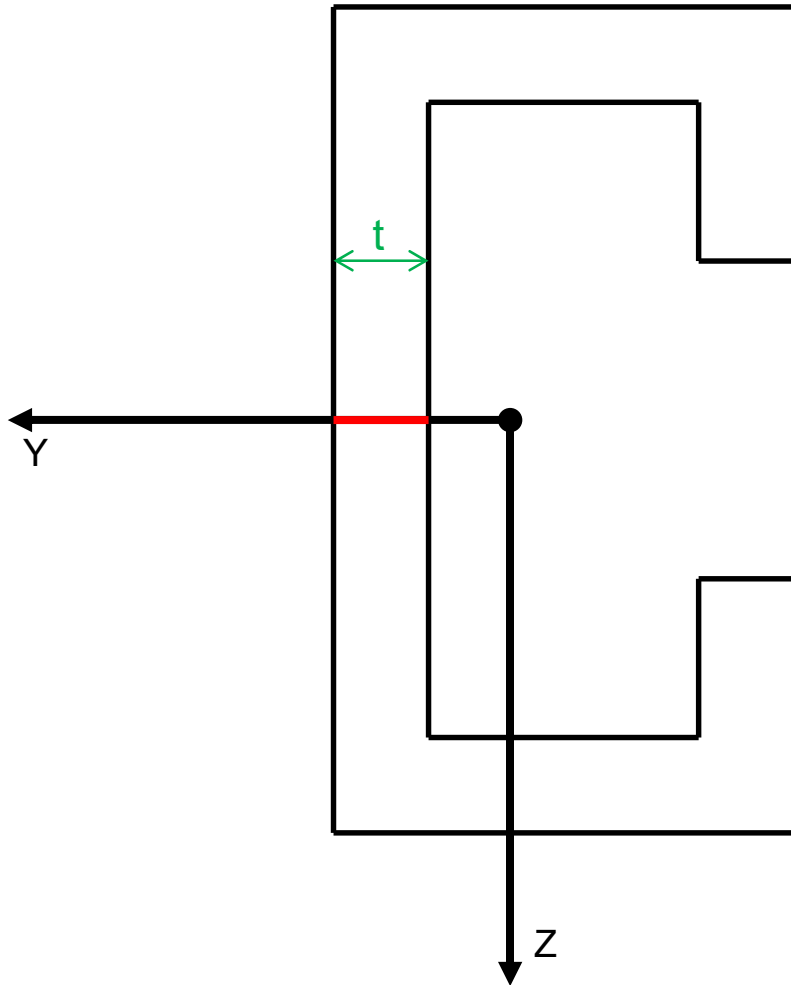
Por ser una sección abierta, calculo el τ_{M_t} con **Saint Venant**.

$$\tau_{M_t} = \frac{M_t}{J_t} \cdot e = \frac{35,19 \text{ kN cm}}{1,54 \text{ cm}^4} \cdot 0,475 \text{ cm}$$

$$\tau_{M_t} = 10,85 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



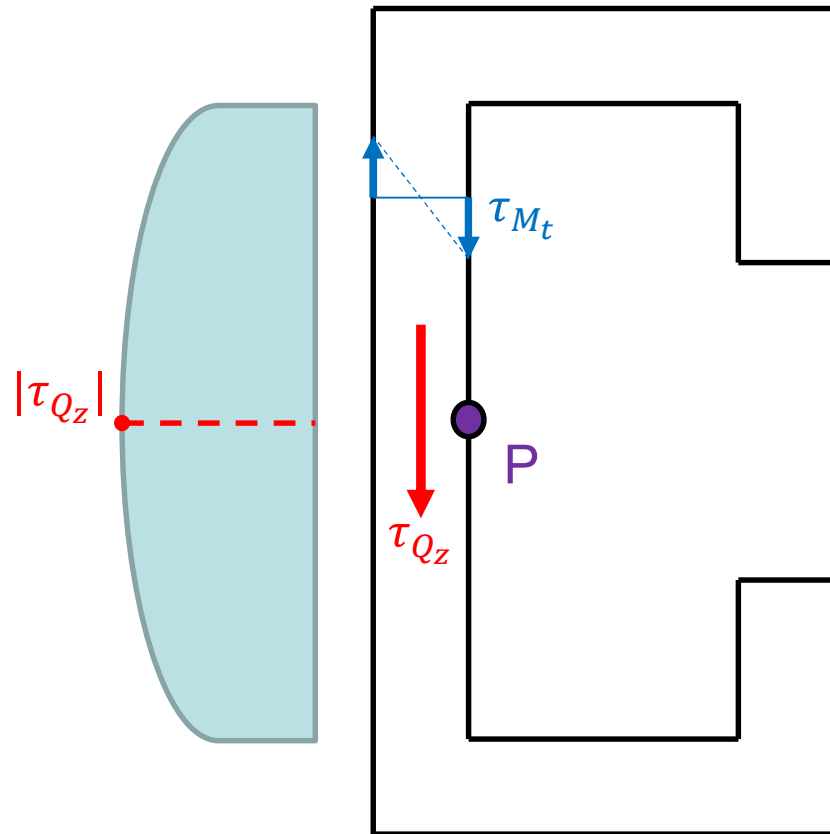
3) Máxima tensión tangencial:



- τ_{M_t} será la misma en todo el contorno de la sección por tener un **espesor constante**.
- $\tau_{Q_z MAX}$ por Jouravsky **se dará sobre el eje Y** porque en el mismo se maximiza el momento estático.



3) Máxima tensión tangencial:



La máxima tensión tangencial se da en el punto P.

Es el punto en el que se superponen las tensiones máximas del Corte y del M_t con el mismo sentido.

Por lo tanto: $\tau_P = \tau_{M_t} + \tau_{Q_z}$

3) Máxima tensión tangencial:



Datos:

$$Q_z = 4,25 \text{ kN}$$

$$J_y = 1290,87 \text{ cm}^4$$

$$b = 0,475 \text{ cm}$$

Calculo el τ_{Q_z} con
Jouravski-Colignon

$$\tau_{Q_z} = \frac{Q_z \cdot S^*}{J_y \cdot b}$$

$$S^* = S^a + S^b + S^c$$

$$S^a = 0,475 \cdot (3 - 0,475) \cdot \left(10 - 0,475 - \frac{3 - 0,475}{2}\right)$$

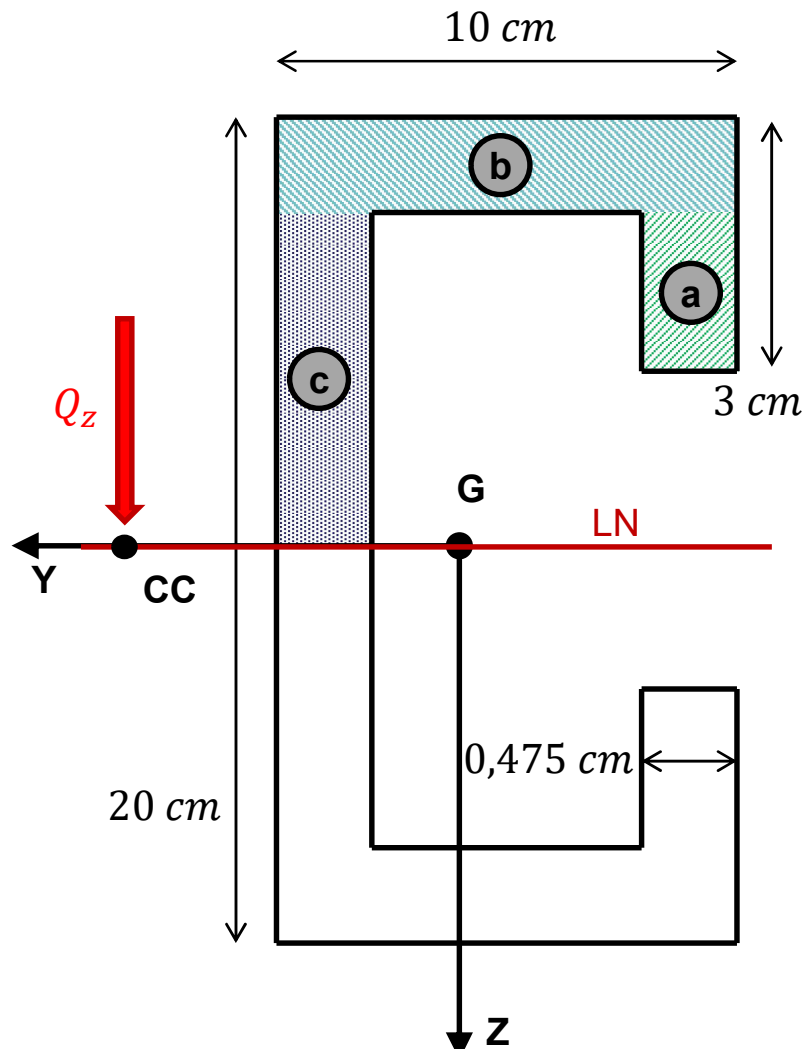
$$S^a = 9,91 \text{ cm}^3$$

$$S^b = 0,475 \cdot 10 \cdot \left(10 - \frac{0,475}{2}\right)$$

$$S^b = 46,37 \text{ cm}^3$$

$$S^c = (10 - 0,475) \cdot 0,475 \cdot \left(\frac{10 - 0,475}{2}\right)$$

$$S^c = 21,55 \text{ cm}^3$$



3) Máxima tensión tangencial:



Entonces: $S^* = S^a + S^b + S^c = 77,829 \text{ cm}^3$

$$\tau_{Q_z} = \frac{Q_z \cdot S^*}{J_y \cdot b} = 0,5395 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_P = 10,85 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} + 0,5395 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_P = 11,39 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

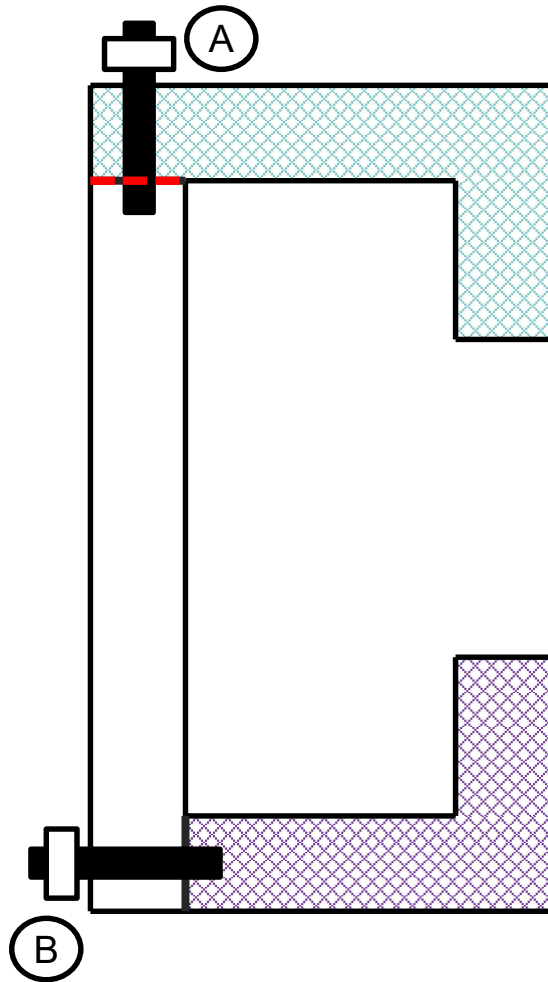
$$\tau_P < \tau_{Adm} \quad \tau_{Adm} = 14 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Verifica





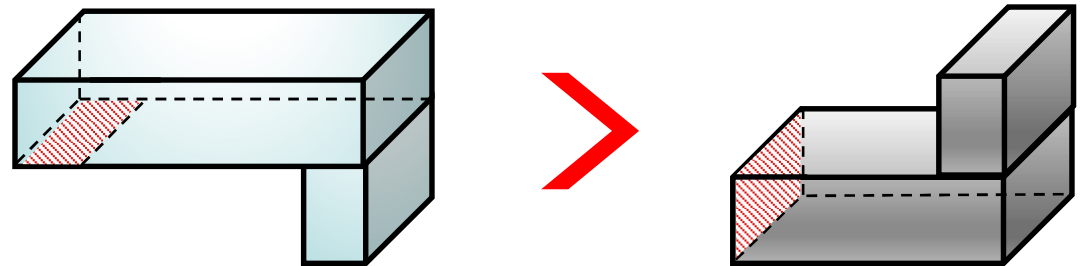
4) Dimensionar el bulón más solicitado:



Dimensionamos el bulón A o B?

El flujo de corte (momento estático) será mayor en A que en B.

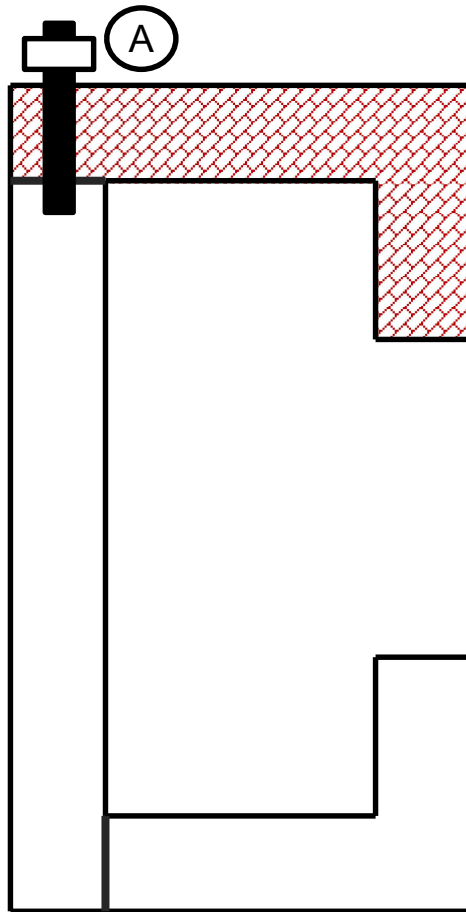
Nos damos cuenta porque el área que resbala cuando sacamos el bulón A es mayor que la que resbala con B.





4) Dimensionar el bulón más solicitado:

Para dimensionar bulones:



$$q \cdot \lambda \leq \tau_{AdmB} \cdot A_B \cdot \eta$$

q: flujo de corte
 λ : separación
 A_B : área bulón
 η : número bulones y/o planos de corte

$$\frac{Q_z \cdot S^{**}}{J_y} \cdot 20 \phi \leq \tau_{AdmB} \cdot \left(\frac{\pi \phi^2}{4} \right)$$

$$Q_z = 4,25 \text{ kN}$$

$$J_y = 1290,87 \text{ cm}^4$$

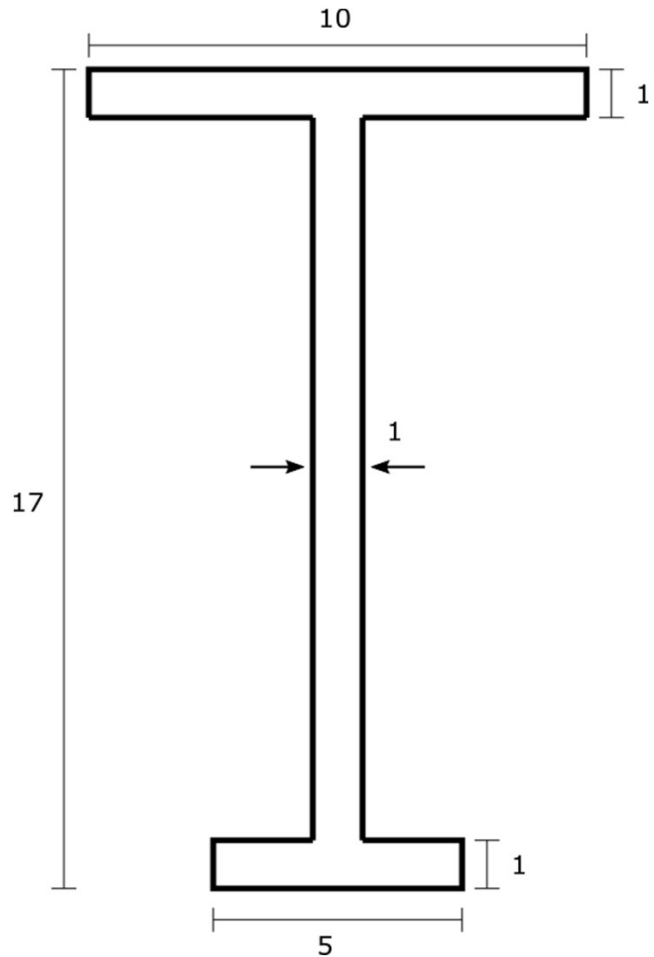
$$\tau_{AdmB} = 18 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$S^{**} = S^a + S^b = 56,28 \text{ cm}^3$$

$$\phi = \frac{Q \cdot S^{**} \cdot 20 \cdot 4}{J_y \cdot \tau_{AdmB} \cdot \pi} = \boxed{0,2621 \text{ cm}}$$



Ejercicio 3: Calcular la posición del centro de corte



¡Observación!

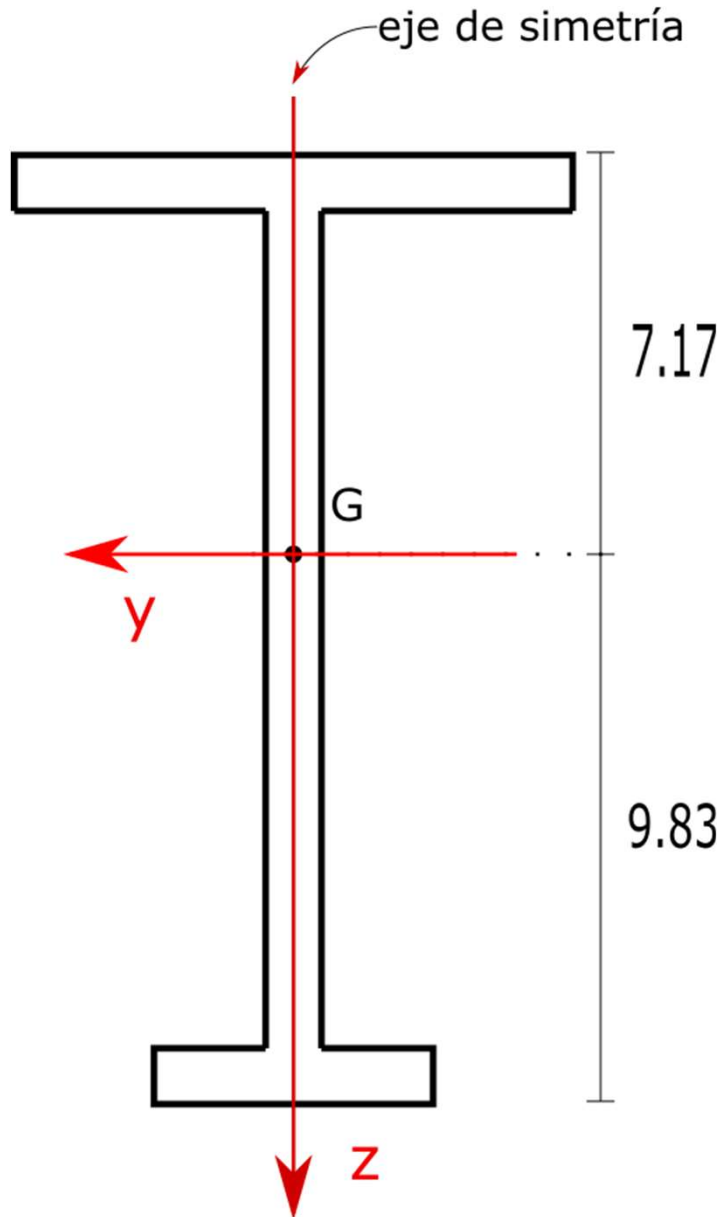
El centro de corte es una propiedad geométrica de la sección, por lo tanto, NO depende de la sollicitación.

Si la sección tiene un eje de simetría el centro de corte se hallará sobre este.

Unidades expresadas en cm



Determino el baricentro y los momentos de inercia respecto a los ejes principales



$$J_y = 1189,17 \text{ cm}^4$$

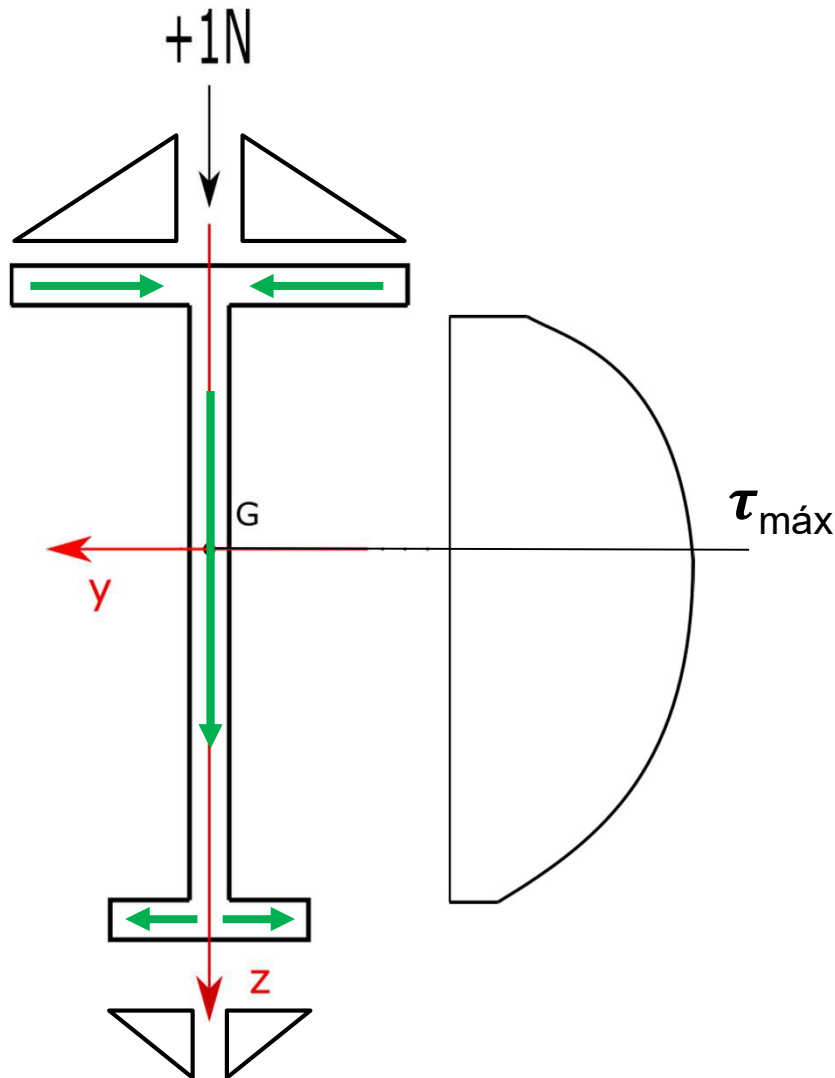
$$J_z = 95 \text{ cm}^4$$

¡Importante!

Recordar el término de Steiner al calcular los momentos de inercia



Distancia en "y" (d_{cc}^y)



Como las tensiones de las alas se anulan entre sí, no se forma ninguna cupla que genere momento, por lo tanto la distancia al centro de corte en la dirección "y" es cero. Esto ocurre porque el eje "z" es el eje de simetría de la sección

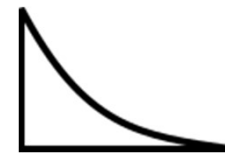
$$d_{cc}^y = 0$$

¡Observación!

Si aumenta el área y disminuye la distancia la parábola es:

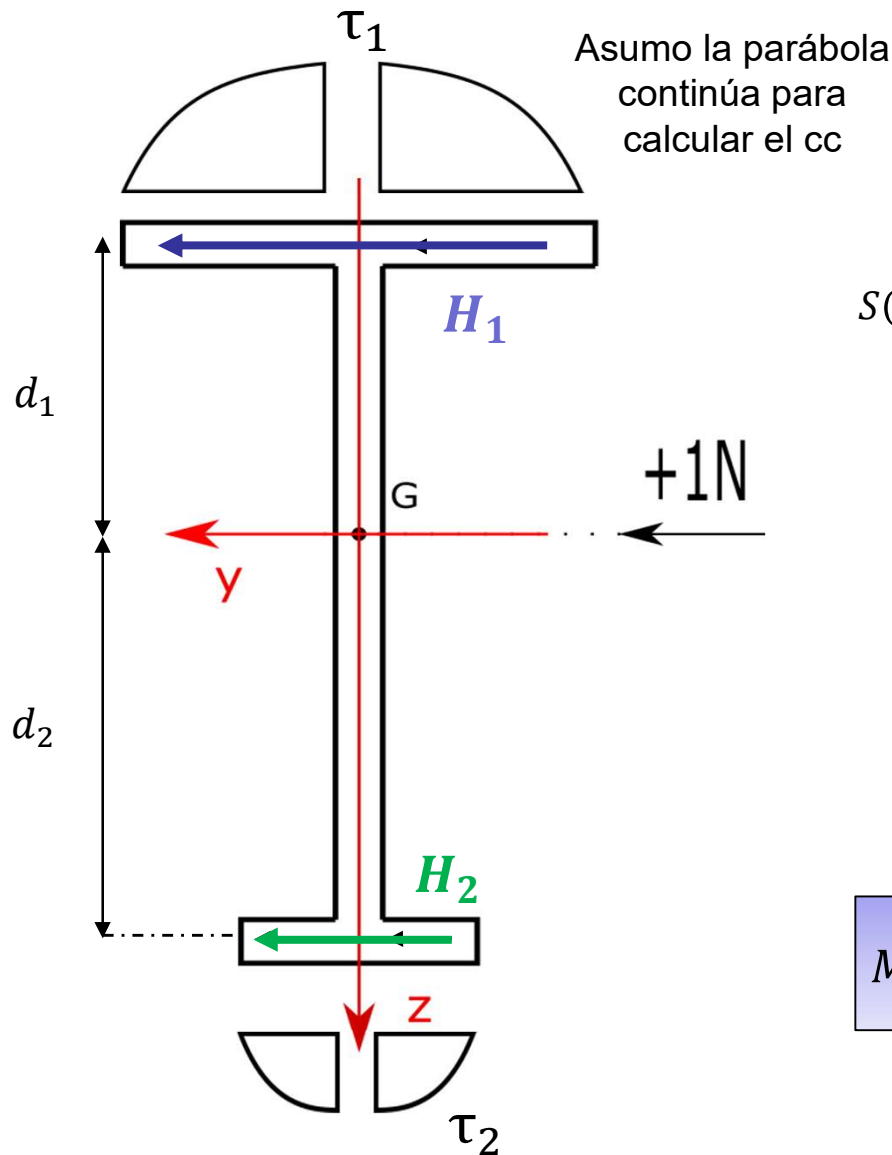


Si aumenta el área y la distancia la parábola es:





Distancia en "z" (d_{cc}^z)



$$H_1 = \int \tau_1 dA = \int \tau_1 dy \cdot 1 \text{ cm}$$

$$\tau_1(y) = \frac{Q \cdot S}{J \cdot b} = \frac{N \cdot S(y)}{95 \text{ cm}^4 \cdot 1 \text{ cm}}$$

$$S(y) = (5 \text{ cm} - y) \cdot 1 \text{ cm} \cdot \left(y + \frac{5 \text{ cm} - y}{2} \right) = \frac{25 \text{ cm}^2 - y^2}{2} \cdot 1 \text{ cm}$$

$$\tau_1(y) = \frac{N \cdot (25 \text{ cm}^2 - y^2)}{95 \text{ cm}^4 \cdot 2}$$

$$M_{T_{H_1}} = d_1 \cdot H_1$$

$$d_1 = (7,17 - 0,5) \text{ cm}$$

$$H_1 = 2 \int_0^5 \tau_1(y) dy \cdot 1 \text{ cm}$$

$$M_{T_{H_1}} = (7,17 \text{ cm} - 0,5 \text{ cm}) \cdot 2 \int_0^5 \tau_1(y) dy \cdot 1 \text{ cm}$$

$$H_1 = 0,877 \text{ N}$$



$$\tau_2(y) = \frac{Q \cdot S}{J \cdot b} = \frac{N \cdot (6,25 \text{ cm}^2 - y^2)}{95 \text{ cm}^4 \cdot 2}$$

$$M_{T_{H_2}} = (9,83 \text{ cm} - 0,5 \text{ cm}) \cdot 2 \int_0^{2,5} \tau_2(y) dy \cdot 1 \text{ cm}$$

$$H_2 = 0.11 \text{ N}$$

Necesito que $H_2 + H_1 = 1 \text{ N}$

(no es igual a 1 ya que hay zonas donde no puedo calcular τ)

$$Q \cdot d_{cc} = H_2 \cdot (9,83 \text{ cm} - 0,5 \text{ cm}) - H_1 \cdot (7,17 \text{ cm} - 0,5 \text{ cm}) = -4,8 \text{ N cm}$$

$$N \cdot d_{cc} = -4,8 \text{ N cm}$$

$$d_{cc} = -4,8 \text{ cm}$$



$$d_{cc}^z = -4,8 \text{ cm}$$

Ubico el Cc de manera que tomando momento respecto al centro de corte hacia el baricentro, equilibra el momento que generan las tensiones.

Traslado Q al Cc de manera que genere un Mt equivalente al Mt que generan las tensiones.

