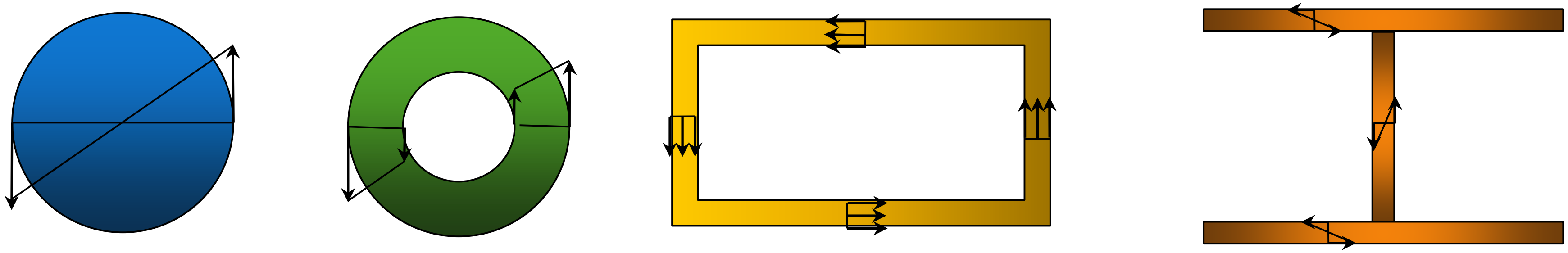
# Solicitación por Torsión en Régimen Elástico

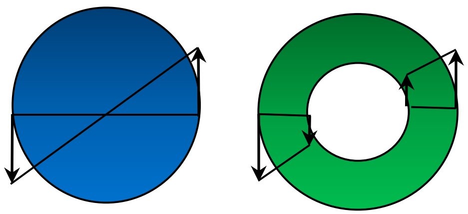


Constanza Ruffinelli – Tania Poletilo – Manuela Medina

# Repaso clase teórica

## Coulomb

Secciones circulares: macizas o huecas

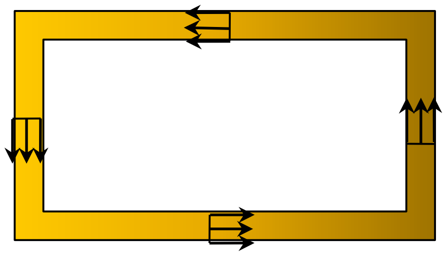


$$\tau = \frac{M_t}{J_p} \cdot r \qquad J_p^{Cir} = \frac{\pi}{32} \cdot D^4$$

$$\chi = \frac{M_t}{J_p \cdot G} \qquad J_p^{An} = \frac{\pi}{32} \cdot ({D_e}^4 - {D_i}^4)$$

## Bredt

Secciones cerradas de pequeño espesor



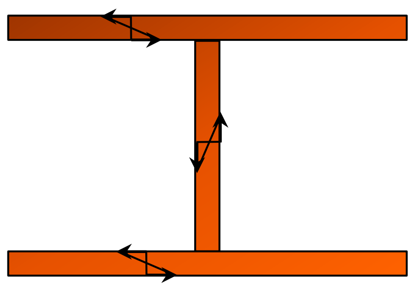
$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot \Omega \cdot e} \qquad J_t = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\int \frac{dl}{e}}$$

$$\chi = \frac{Mt}{J_t \cdot G}$$

Ω es el área encerrada por la línea media

## Saint Venant

Secciones abiertas de pequeño espesor



$$\tau = \frac{M_t}{J_t} \cdot e$$

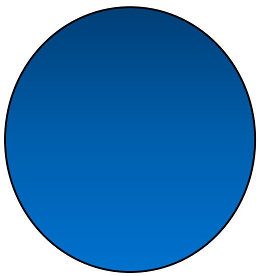
$$J_t = \sum \left( \frac{1}{3}\, a_i \cdot e_i^3 \right)$$

$$\chi = \frac{M_t}{J_t \cdot G}$$

**Ejercicio 1:** Para cada una de las secciones calcular $\tau$ y $\chi$. ¿Con cuál tendrá mayores tensiones y deformaciones? ¿Por que? (Tener en cuenta que todas las áreas son iguales)

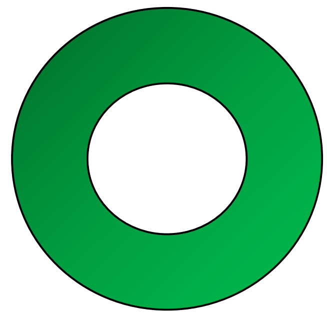
$$M_t = 1\,kN\,m \qquad G = 80\,GPa \qquad A \cong 33{,}18\,cm^2$$

1.



$D_M = 6{,}5\,cm^2$

2.



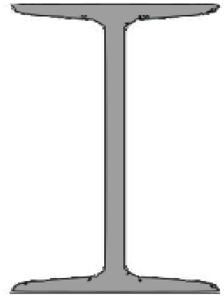
$D_e = 18{,}5\,cm^2$

$e = 6\,mm$

$D_i = D_e - 2 \cdot e = 17{,}3\,cm^2$

3. Tubo (200x100x6)mm

4. IPN 200



$e_{ala} = 11{,}3\,mm \qquad l_{ala} = 90\,mm$

$e_{alma} = 7{,}5\,mm \qquad h = 200\,mm$

1. Circular maciza (Coulomb):

$$\tau = \frac{1\ kN\ m}{175\ cm^4} \cdot \frac{6{,}5\ cm}{2} = 18{,}54\ MPa$$

$$\chi = \frac{1\ kN\ m}{175\ cm^4 \cdot 80\ GPa} = 7{,}14 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{cm}$$

2. Anular (Coulomb):

$$\tau = \frac{1\ kN\ m}{2706\ cm^4} \cdot \frac{18{,}5\ cm}{2} = 3{,}42\ MPa$$

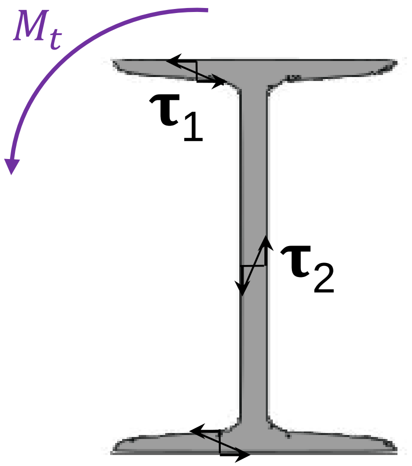
$$\chi = \frac{1\ kN\ m}{2706\ cm^4 \cdot 80\ GPa} = 4{,}62 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{cm}$$

3. Tubo (Bredt):

$$\tau = \frac{1\ kN\ m}{2 \cdot 182{,}36 cm^2 \cdot 0{,}6 cm} = 4{,}58\ MPa$$

$$\chi = \frac{1\ kN\ m}{1385{,}63\ cm^4 \cdot 80\ GPa} = 1{,}325 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{cm}$$

# 4. IPN 200 (Saint Venant)




$$J_t = \frac{1}{3} \cdot \sum (a_i \cdot e_i^3)$$

**¡Importante!**

- Se deben sumar los términos de cada uno de los rectángulos (existe más de una forma de hacer esto)
- El valor que va elevado al cubo es el lado más chico del rectángulo

$$J_t = \frac{1}{3} \cdot [2 \cdot (90\ mm \cdot (11{,}3\ mm)^3) + (200 - 2 \cdot 11{,}3) mm \cdot (7{,}5\ mm)^3] = 11{,}15\ cm^4$$

**¡No era necesario calcularlo porque está en tabla**! $\Rightarrow$ $J_t = 11{,}2\ cm^4$

$$\tau_1 = \frac{M_t}{J_t} \cdot e_1 \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{1\ kN\ m}{11{,}2\ cm^4} \cdot 11{,}3\ mm = 100{,}9\ MPa$$

$$\tau_2 = \frac{M_t}{J_t} \cdot e_2 \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{1\ kN\ m}{11{,}2\ cm^4} . 7{,}5\ mm = 66{,}96\ MPa$$

$$\chi = \frac{M_t}{J_t \cdot G} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1\ kN\ m}{11{,}2\ cm^4 \cdot 80\ GPa} = 1{,}1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{cm}$$

# Dado que las áreas de todos los perfiles son iguales:

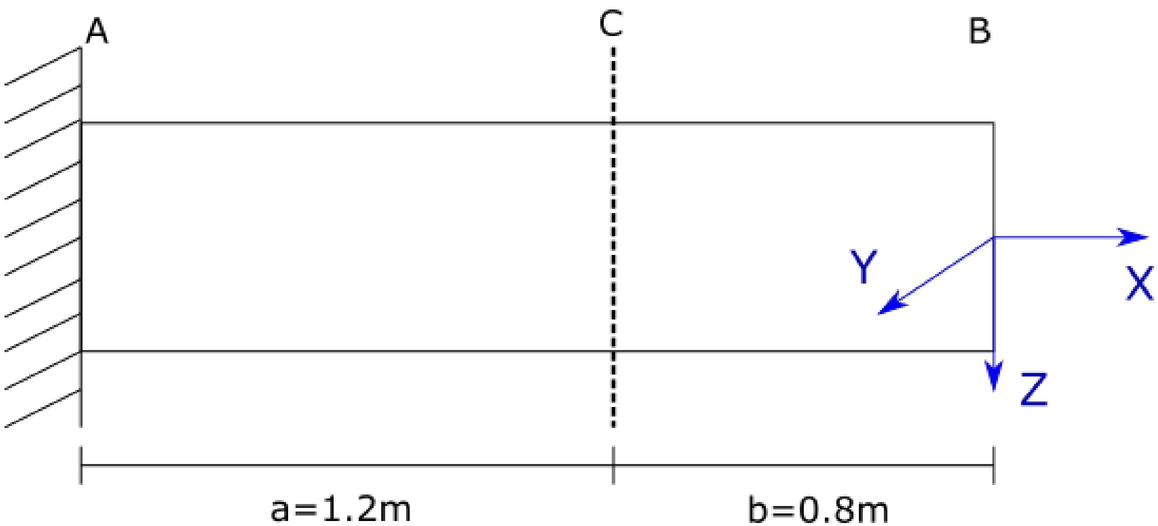
¿Que conclusiones podemos sacar?

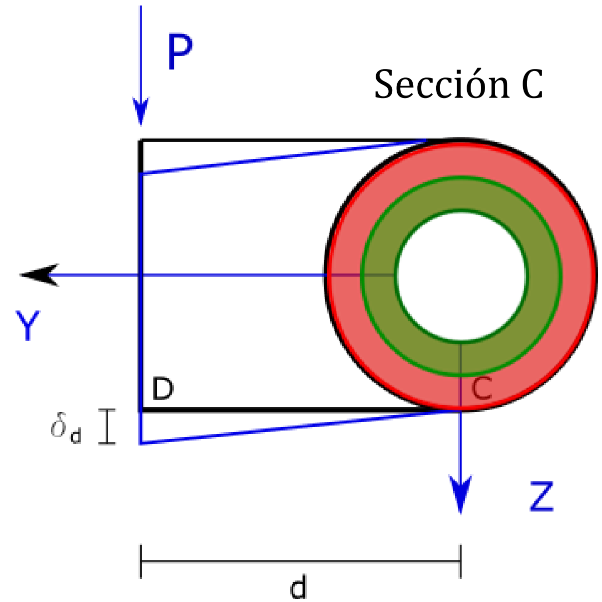
Conclusiones:

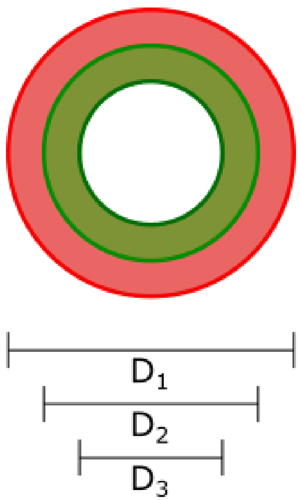
- El más conveniente es el anular, ya que el momento de inercia polar que le corresponde es mucho más grande, por lo que la curvatura y las tensiones resultantes son menores.

- El menos favorable será la sección abierta, ya que el momento de inercia a la torsión es muy chico, y por lo tanto la curvatura y tensiones resultantes serán muy grande. Es decir los perfiles abiertos no son eficientes para torsión

**Ejercicio 1:** Calcular la carga P que genera un desplazamiento $\delta_d$ en el punto D. Realizar diagramas de $\tau$, $M_t$ , $\chi$ y $\theta$




Datos:

$D_1 = 7{,}5\ cm$

$D_2 = 6{,}5\ cm$

$D_3 = 4{,}9\ cm$

$G_{al} = 28000\ MPa$

$G_{br} = 36000\ MPa$

$d = 0{,}2\ m$

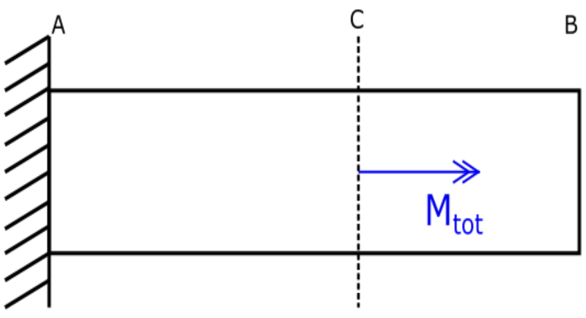
$\delta_d = 2\ cm$

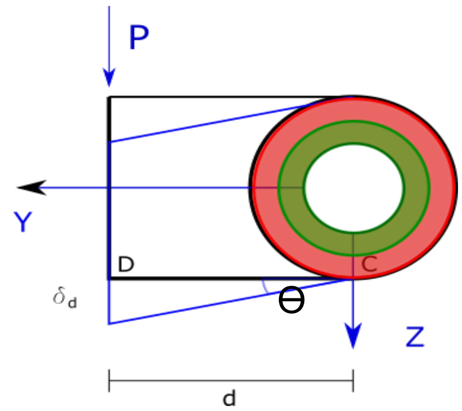
# A) Solicitaciones

La fuerza $P$ genera un $M_t$ en la barra

$$M_{tot} = P \cdot d = P \cdot 0{,}2\ m$$

$$P = \frac{M_{tot}}{0{,}2\ m}$$




# B) Desplazamientos

Conociendo el desplazamiento del punto D puedo determinar el giro θ en la sección C de la barra

$$\tan(\theta_c) = \theta_c = \frac{\delta_d}{d} = \frac{2\ cm}{0{,}2\ m} = 0.1\ rad$$

Como trabajamos con hipótesis de linealidad cinemática, consideramos $\theta = \mathrm{tg}(\theta)$

Necesitamos saber cómo se reparte el momento torsor en cada uno de los materiales. Para esto necesitamos plantear una ecuación de compatibilidad de las deformaciones.

Como los materiales se deforman solidariamente, la curvatura debe ser igual.

$$\chi^{al} = \chi^{br} \quad \Longrightarrow \quad \theta_c^{al} = \theta_c^{br} = \theta_c$$

Como estamos trabajando con una sección compuesta por dos anillos utilizaremos la Teoría de Coulomb

$$\frac{Mt_{al}}{G_{al} \cdot J_{al}} = \frac{Mt_{br}}{G_{br} \cdot J_{br}}$$

$$Mt_{al} = Mt_{br} \cdot \frac{G_{al} \cdot J_{al}}{G_{br} \cdot J_{br}}$$

Cálculo de Jp

$$J_{al} = \frac{\pi}{32}(D_1^4 - D_2^4) = 135{,}38\ cm^4$$

$$J_{br} = \frac{\pi}{32}(D_2^4 - D_3^4) = 118{,}65\ cm^4$$

## Ecuación de equilibrio

$$M_{tot} = Mt_{al} + Mt_{br}$$

$$M_{tot} = Mt_{br} \cdot \frac{G_{al} \cdot J_{al}}{G_{br} \cdot J_{br}} + Mt_{br} = Mt_{br} \cdot \left(1 + \frac{G_{al} \cdot J_{al}}{G_{br} \cdot J_{br}}\right)$$

$$Mt_{br} = 0{,}53\, M_{tot} \quad \Rightarrow \quad Mt_{al} = 0{,}47\, M_{tot}$$

## Calculo $Mt_{br}$

$$\theta_c^{br} = \frac{Mt_{br} \cdot a}{G_{br} \cdot J_{br}} \quad \Rightarrow \quad Mt_{br} = \frac{\theta_c^{br} \cdot G_{br} \cdot J_{br}}{a}$$

con

$$\theta_c^{br} = \theta_c = 0.1\, rad$$

$$Mt_{br} = 355{,}96\, kN\, cm \quad \Rightarrow \quad M_{tot} = 671{,}85\, kN\, cm$$

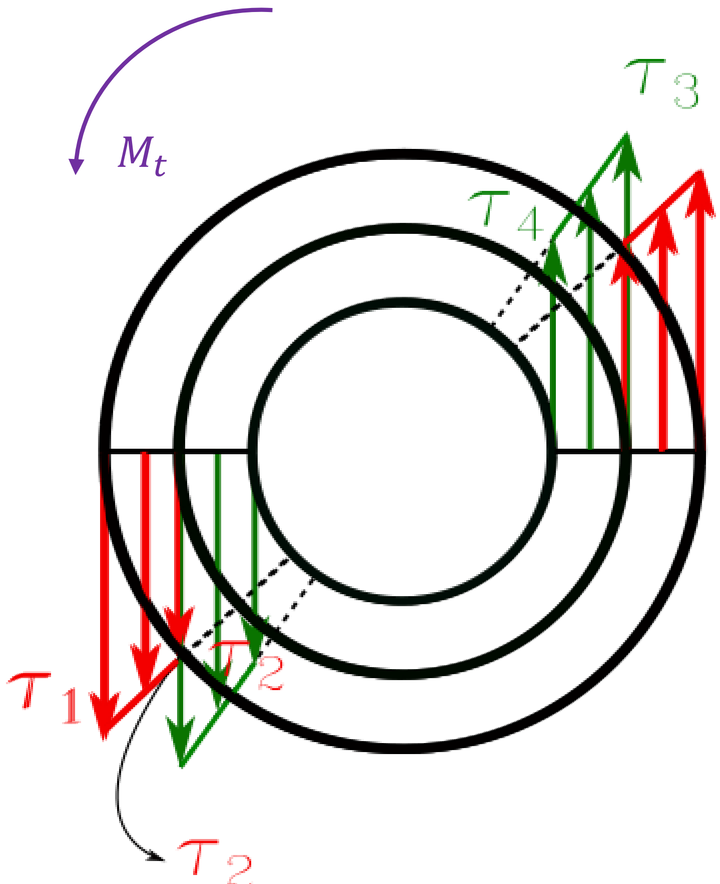
$$Mt_{al} = 315{,}89\, kN\, cm$$

## Despejamos finalmente P

$$P = \frac{M_{tot}}{0{,}2\, m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 33{,}59\, kN}$$

# Diagrama de Tensiones Tangenciales

$$\tau = \frac{M_t}{J_P} \cdot r$$




$$Mt_{al} = 315{,}89\ kN\ cm \qquad J_{al} = 135{,}38\ cm^4$$

$$\tau_1 = \frac{Mt_{al}}{J_{al}} \cdot \frac{D_1}{2} = 8{,}74\,\frac{kN}{cm^2}$$

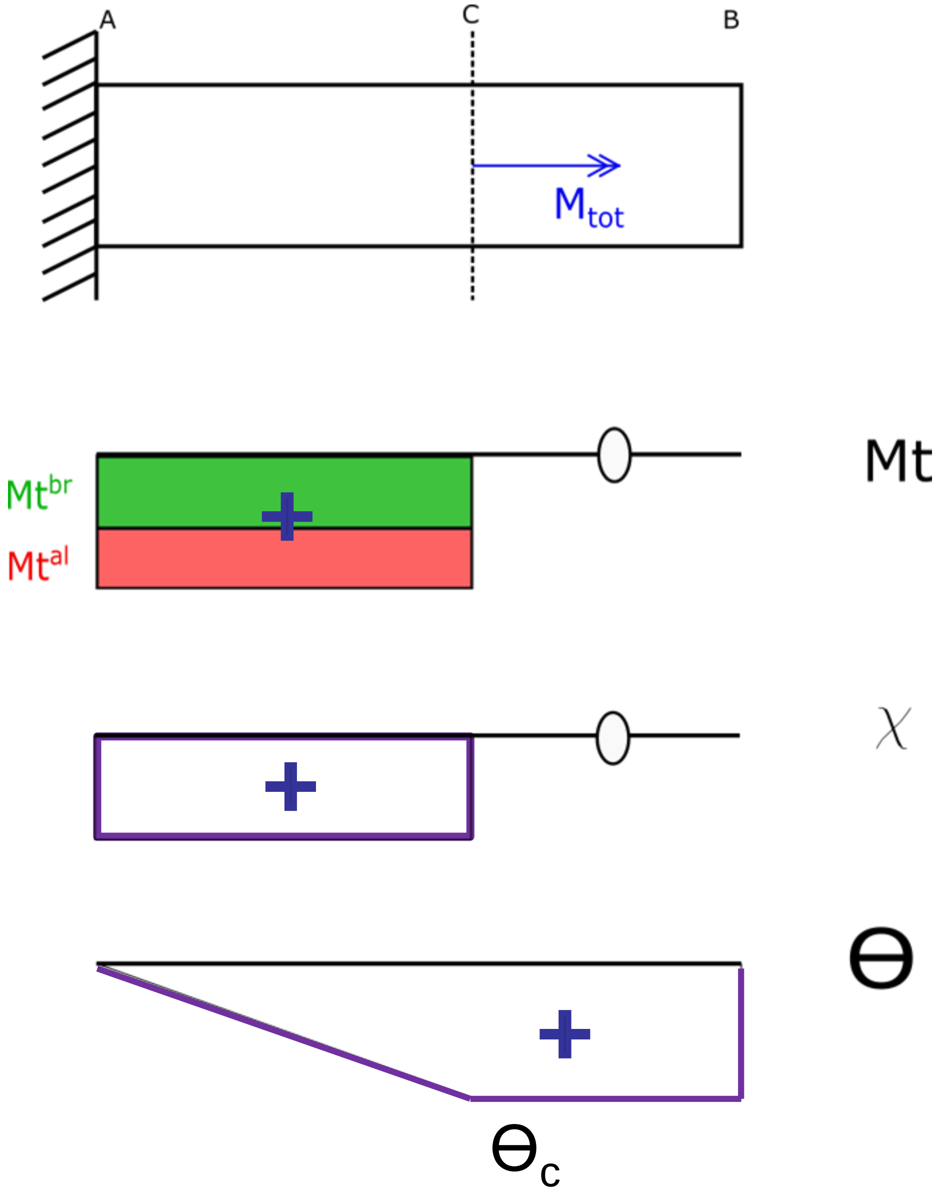
$$\tau_2 = \frac{Mt_{al}}{J_{al}} \cdot \frac{D_2}{2} = 7{,}58\,\frac{kN}{cm^2}$$

$$\mathrm{Mt}_{br} = 355{,}96\ kN\ cm \qquad J_{br} = 118{,}65\ cm^4$$

$$\tau_3 = \frac{\mathrm{Mt}_{br}}{J_{br}} \cdot \frac{D_2}{2} = 9{,}75\,\frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_4 = \frac{\mathrm{Mt}_{br}}{J_{br}} \cdot \frac{D_3}{2} = 7{,}35\,\frac{kN}{cm^2}$$

# Diagramas de $M_t$ , $\chi$ y $\theta$




$$M_{tot} = 671{,}85\ kN\ cm$$

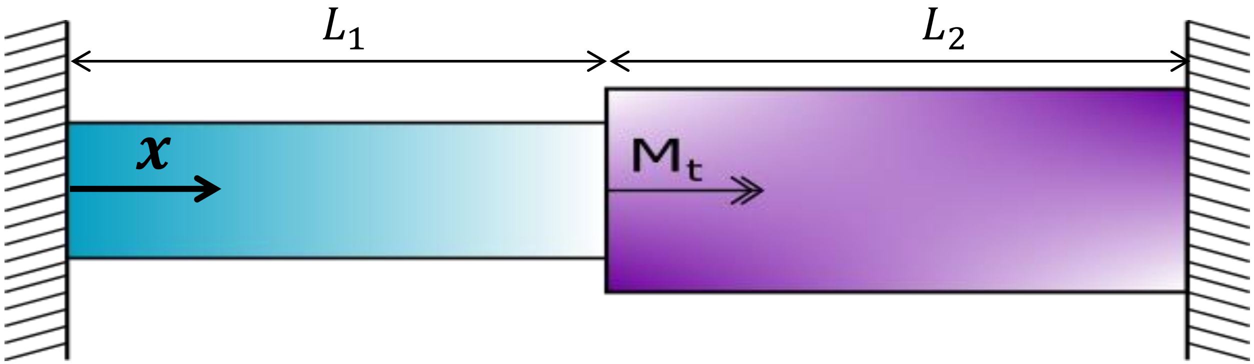
$$Mt^{br} = 355{,}96\ kN\ cm$$

$$Mt^{al} = 315{,}89\ kN\ cm$$

$$\chi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta_c}{a} = 8{,}33.10^{-4}\,\frac{1}{cm}$$

$$\theta_c = 0.1\ rad$$

# Ejercicio 2: Calcular las reacciones de vínculo

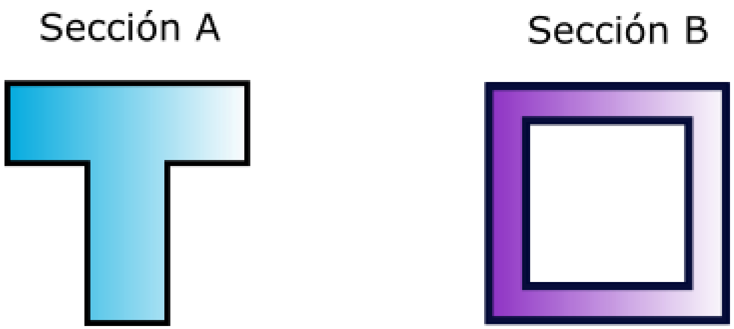



Datos:

$L_1 = 2\ m$

$L_2 = 3\ m$

$M_t = 10\ kN\ m$

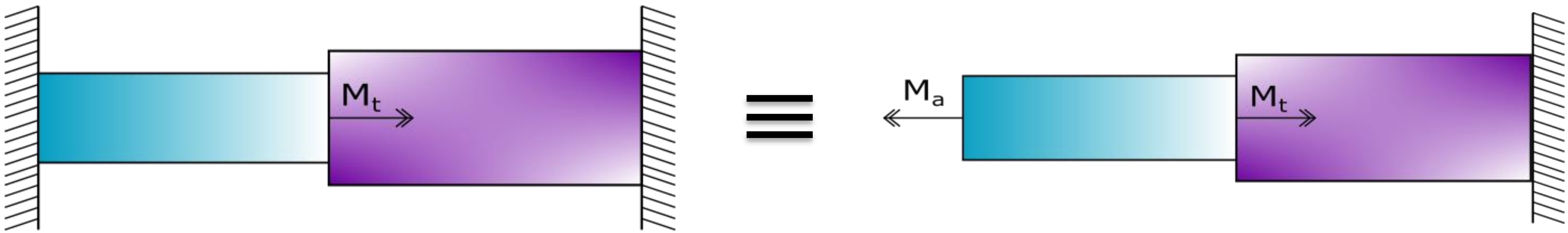



$G_a = 8000 \dfrac{kN}{cm^2}$  $G_b = 6000 \dfrac{kN}{cm^2}$

$J_{ta} = 115\ cm^4$  $J_{tb} = 800\ cm^4$

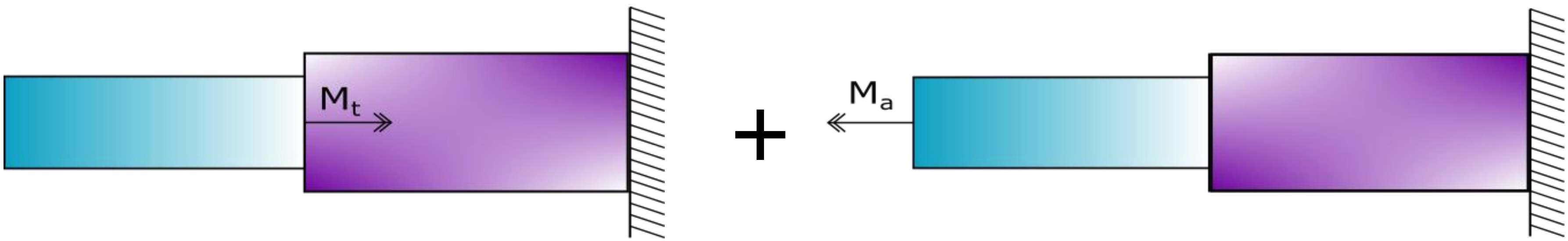
Para resolver éste ejercicio utilizaremos el Método de las Incógnitas Estáticas

# Método de las incógnitas estáticas




Superposición
de Efectos

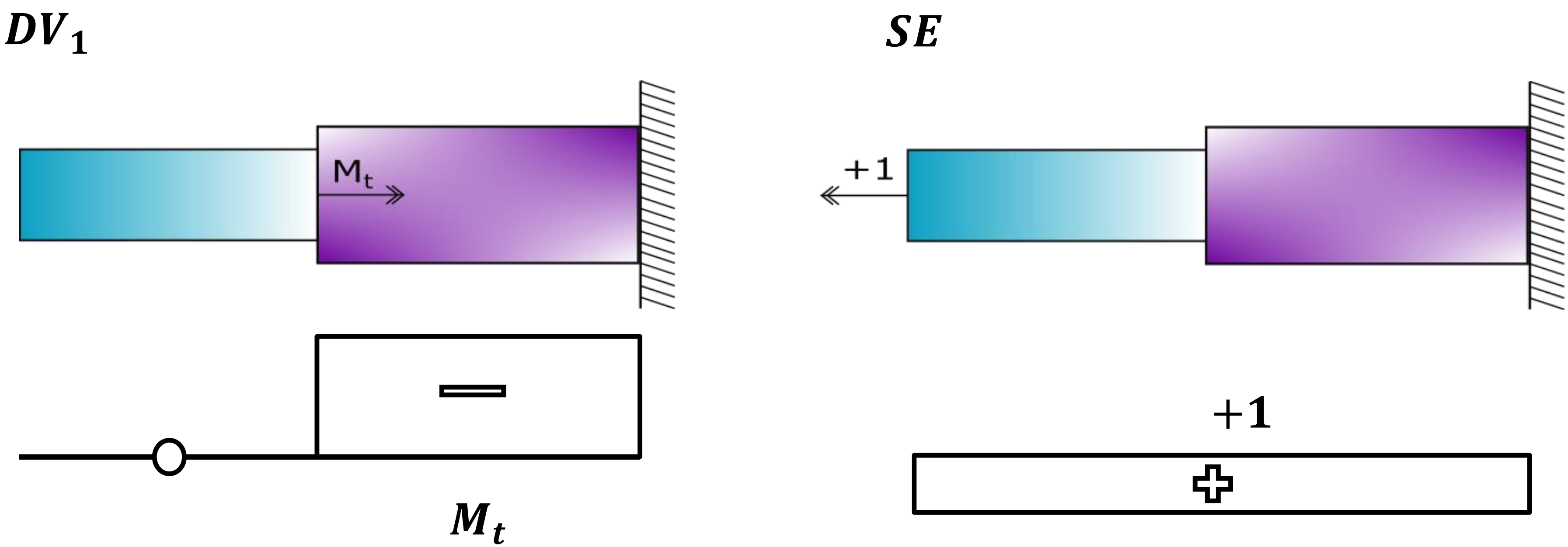
≡




$$\theta_A^H = \theta_A^{M_t} + \theta_A^{M_A} = 0$$

# Resolución por Teorema de los Trabajos Virtuales

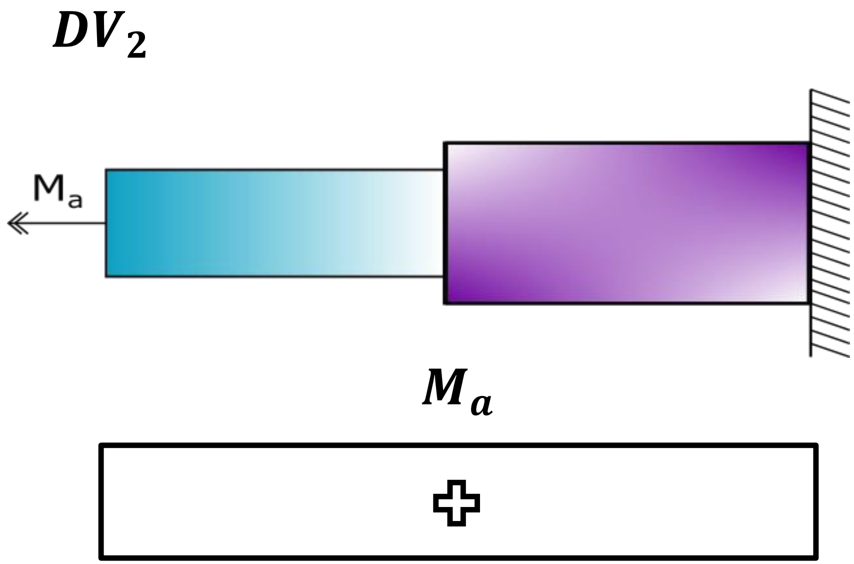
Calculo el giro $\theta_A^{M_t}$

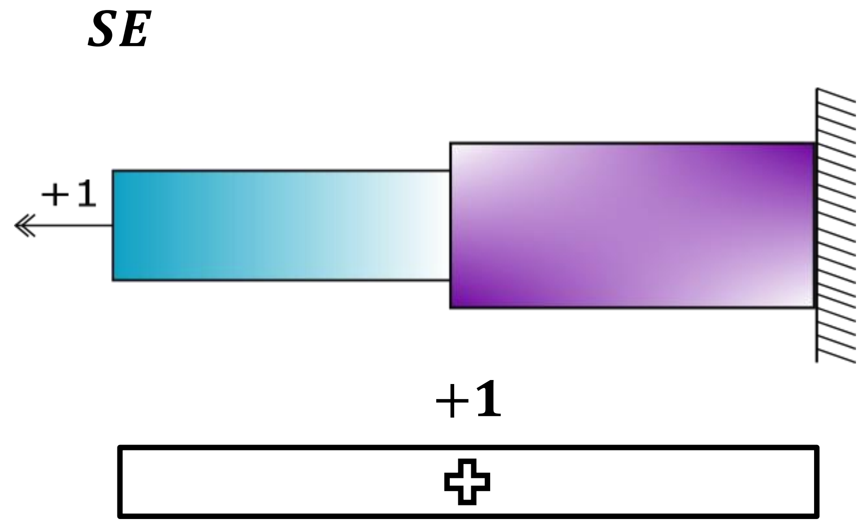



$$\theta_A^{M_t} = \int_l M_{SE}\, d\theta = \int_l M_{SE} \cdot \frac{M_{DV}}{G \cdot J}\, dx = M_{SE} \cdot \frac{M_{DV_1} \cdot L_2}{G_b \cdot J_b} = +1 \cdot \frac{-1000\ kN\ cm \cdot 300\ cm}{6000\,\frac{kN}{cm^2} \cdot 800\ cm^4}$$

$$\boxed{\theta_A^{M_t} = -0{,}0625\ rad}$$

# Calculo el giro $\theta_A^{M_A}$




$$\theta_A^{M_A} = \int_l M_{SE} \cdot \frac{M_{DV}}{G \cdot J}\, dx = 1 \cdot \frac{M_a \cdot L_1}{G_a \cdot J_a} + 1 \cdot \frac{M_a \cdot L_2}{G_b \cdot J_b}$$

$$\theta_A^{M_A} = M_a \cdot \left( \frac{200\ cm}{8000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 115\ cm^4} + \frac{300\ cm}{6000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 800\ cm^4} \right)$$

$$\boxed{\theta_A^{M_A} = 2{,}799 \cdot \frac{10^{-4}}{kN\ cm} \cdot M_a}$$

Reemplazando en la ecuación de compatibilidad

$$\theta_A^H = \theta_A^{M_A} + \theta_A^{M_t} = 0$$

$$\theta_A^{M_A} + \theta_A^{M_t} = -0{,}0625\,rad + 2{,}799 \cdot \frac{10^{-4}\,rad}{kN\,cm} \cdot M_a = 0$$

$$M_a = \frac{0{,}0625\,kN\,cm}{2{,}799\,10^{-4}} \Rightarrow \boxed{M_a = 223{,}3\,kN\,cm}$$

**Aclaración**

No suele ser conveniente usar TTV para torsión, es recomendable plantearlo directamente por inspección
(o MIE pero calculando el giro directamente)