



Universidad de Buenos Aires

**Facultad de Ingeniería
Departamento de Estabilidad**

Ingeniería Civil

**ESTABILIDAD II A – 64.02
ESTABILIDAD II - 84.03**

FLEXIÓN DE BARRAS CURVAS

Autor: Ing. Luis Nelson SOSTI
Agosto 2017



01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

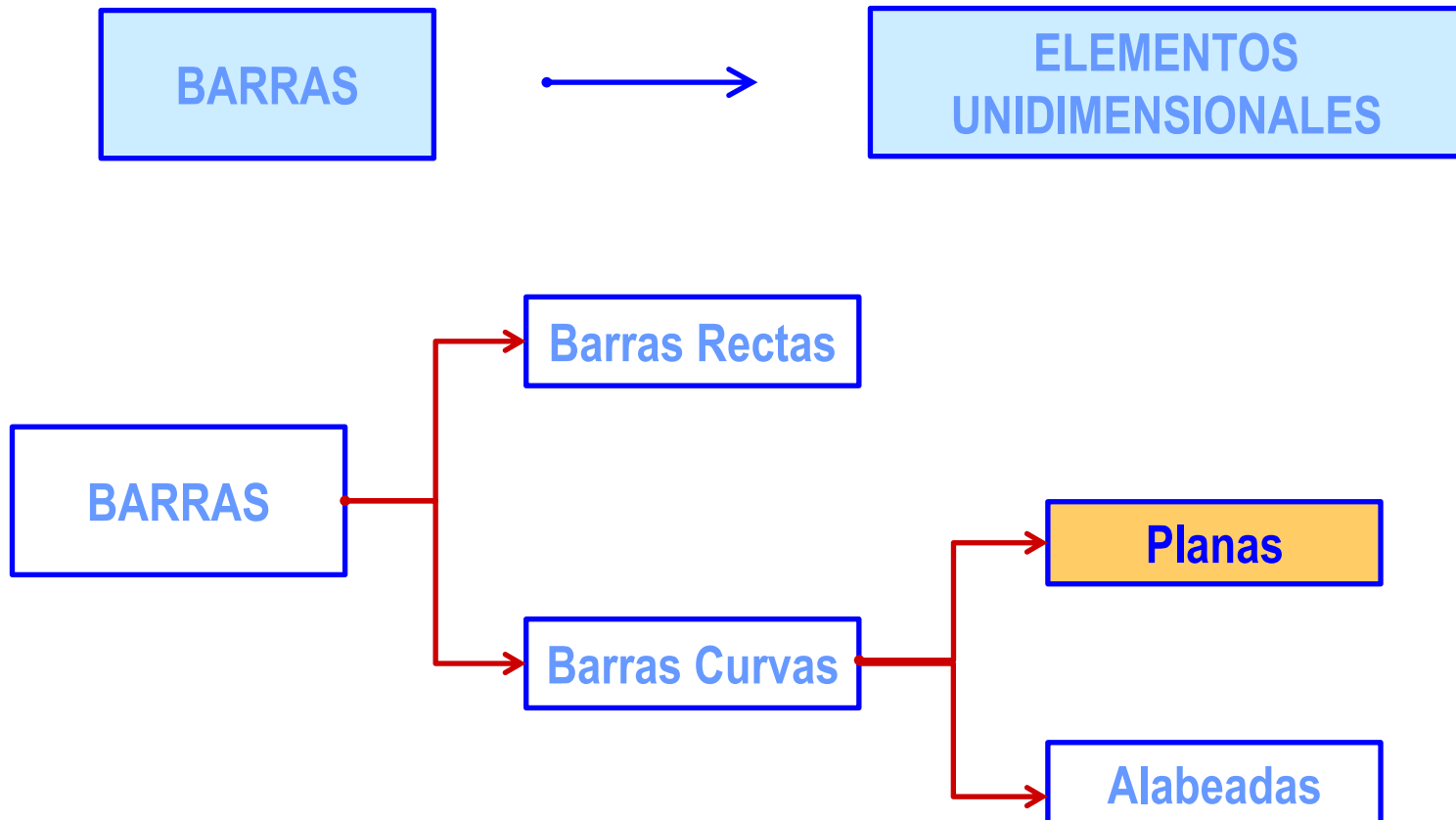
05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

01 – INTRODUCCIÓN: Conceptos e Ideas Preliminares

- Una clasificación tentativa de las barras desde un punto de vista geométrico es la siguiente:



01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

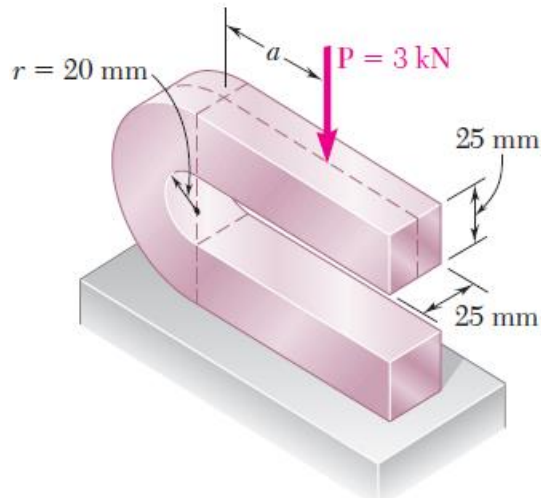
06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

01 – INTRODUCCIÓN: Conceptos e Ideas Preliminares

➤ Ejemplos de estos elementos son los siguientes:

- Ganchos
- Eslabones de cadena
- Llantas de poleas
- Ruedas





01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

02 – OBJETO:

- Hasta el momento, se ha estudiado:

FLEXIÓN EN ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES RECTOS

- Ahora, se desarrollará:

TEORÍA DE FLEXIÓN PURA PARA BARRAS CURVAS



01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

03 – ALCANCE:

- Qué ALCANCE se le dará a este estudio? Es decir, qué se verá y hasta qué profundidad?
- Cuáles serán los condicionantes y premisas de trabajo?
 - Secciones transversales **«uniformes»** (constantes);
 - Barras curvas con **un (1) sólo eje de simetría** en la sección transversal;
 - Período **«Elástico Lineal»**;
 - Módulo de Elasticidad: $E_T = E_C$ \longrightarrow $E^+ = E^-$
 - Los esfuerzos serán originados en el elemento estructural por **«pares iguales y opuestos»**;
 - Los pares o momentos flectores actuarán en el **«plano de simetría de la sección»**.



01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

04 – CONSIDERACIONES PRELIMINARES:

- Relación entre curvatura – radio y dimensiones de la sección, veamos las siguientes 2 posibilidades:

I. Curvatura: « χ » pequeña \longrightarrow «R» grande

En comparación con las dimensiones transversales de la sección.

Cómo se soluciona?

Una muy buena aproximación consiste en considerar al elemento estructural como «recto»; y plantear todas las ecuaciones ya estudiadas.

II. Curvatura: « χ » grande \longrightarrow «R» pequeño

En realidad, R es comparable con las dimensiones transversales de la sección.

Cómo se soluciona?

La solución mediante la aproximación como una barra recta, **NO es válida.**



ESTABILIDAD II A – 64.02 – ESTABILIDAD II – 84.03

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

- La solución que se seguirá a continuación, fue desarrollada por el ingeniero alemán E. WINKLER (1835-1888) en 1858;
- El siguiente es un **«método aproximado»**;
- La solución exacta fue desarrollada por : GOLOVIN en 1881.

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

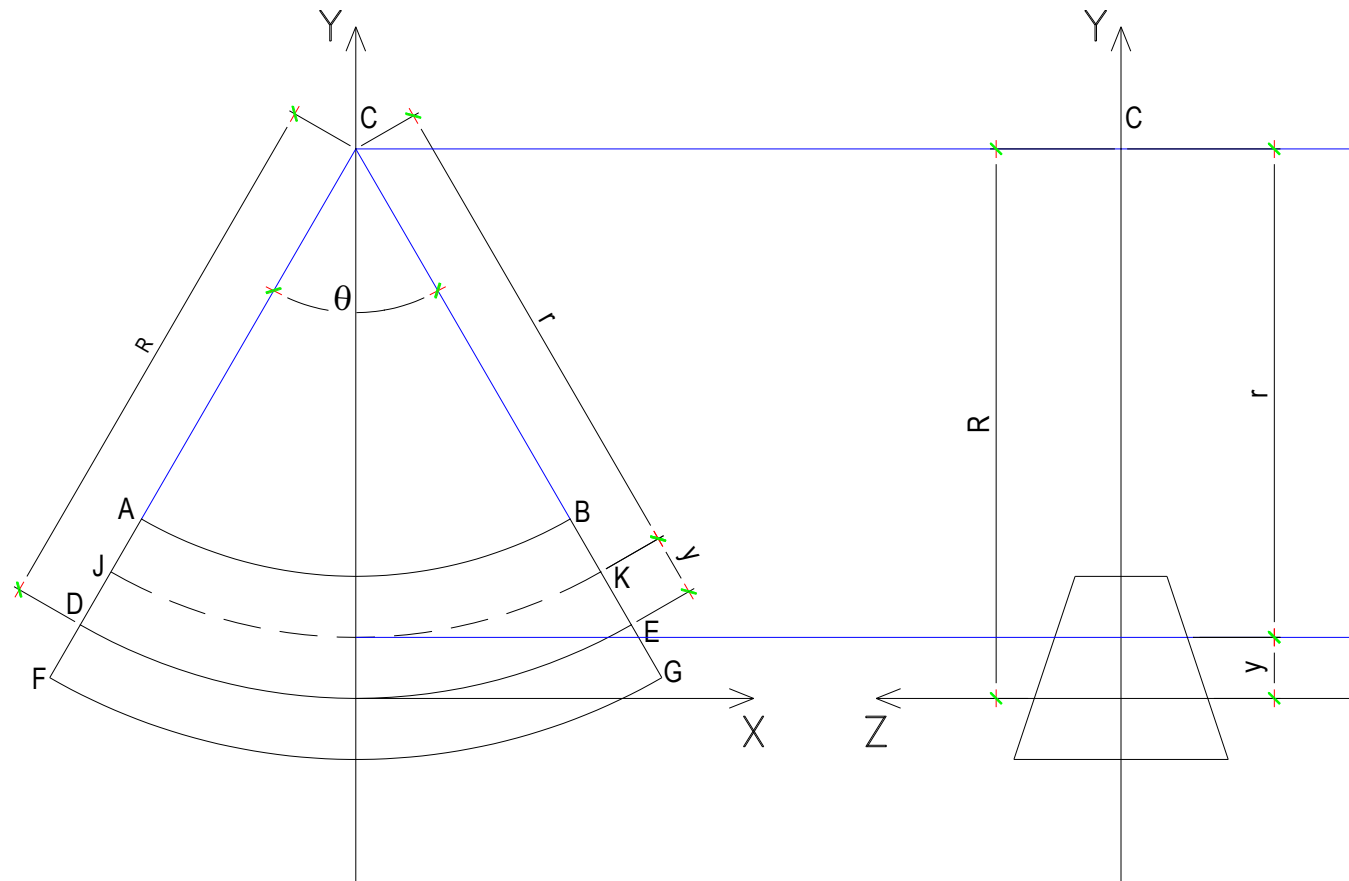
**05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO**

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

05 – DESARROLLO DEL MÉTODO:

➤ Esquema de la Situación Previa a la aplicación de la sollicitación:





ESTABILIDAD II A – 64.02 – ESTABILIDAD II – 84.03

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

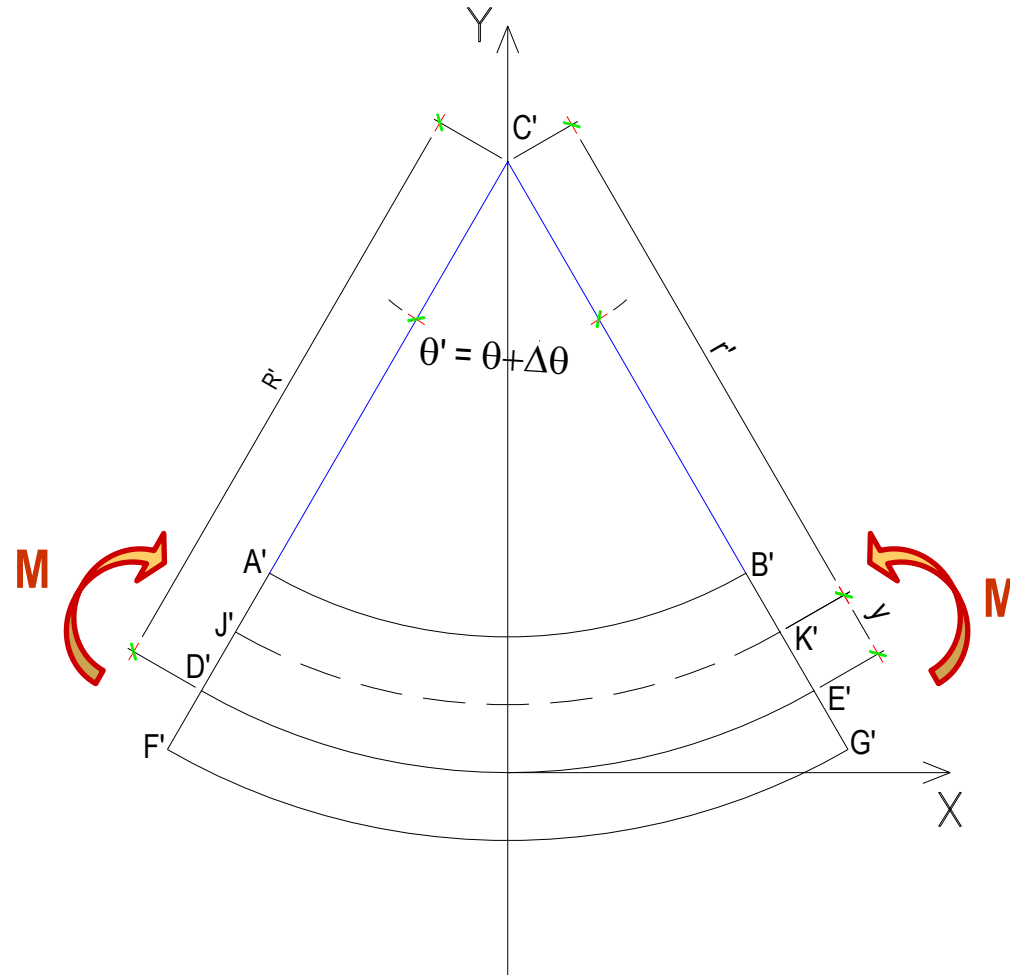
04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

➤ Aplicación de 2 Pares Iguales y Opuestos:





ESTABILIDAD II A – 64.02 – ESTABILIDAD II – 84.03

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

- **Eje «Y»:** Eje de Simetría
- **Plano X-Y:** Plano de Simetría
- **Curva AB:** Curva de intersección del plano de simetría con la superficie curva superior
- **Curva FG:** Curva de intersección del plano de simetría con la superficie curva inferior
- El par de fuerzas actúan en el plano de simetría, plano X-Y
- De acuerdo a la disposición de los momentos en este caso, se tendrá que:

«R» disminuye



« χ » aumenta



01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

Qué ocurre físicamente?

- Las secciones transversales que **antes** de la deformación eran **planas**, continúan siendo planas después de la deformación por flexión;
- Los arcos de círculo como los indicados [AB – FG – DE – JK] se transforman en arcos de círculo con las siguientes características:
 - Son concéntricos;
 - El centro de curvatura pasa a ser C' en vez de C ;
 - Para los pares indicados: **«R» disminuye** → **« χ » aumenta**
 - Luego: el radio $A'C' < AC$ es menor que el radio original;
 - Arcos: $A'B' < AB$; las superficies superiores disminuyen su longitud;
 - Arcos: $F'G' > FG$; las superficies inferiores aumentan su longitud;
- Lo anterior indica que habrá un cambio de signo en las deformaciones puesto que unos arcos se alargan y otros se acortan. Luego, habrá un arco que no se alarga ni se acorte.



ESTABILIDAD II A – 64.02 – ESTABILIDAD II – 84.03

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

- Lo anterior indica que habrá un **cambio de signo** en las deformaciones puesto que unos arcos se alargan y otros se acortan. Luego, habrá un arco que no se alarga ni se acorte;
- Por lo tanto, existirá una **superficie neutra** cuya longitud permanecerá **constante**;
- En las figuras se han representado las intersecciones de las superficies neutras con el plano X-Y mediante:

SITUACIÓN	ARCO NEUTRO	RADIO	LONGITUD DEL ARCO
Sin Deformar	DE	R	$R.\theta$
Deformado	D'E'	R	$R'.\theta'$

Al ser la longitud del arco cte:	$R'.\theta' = R.\theta$
----------------------------------	-------------------------

(1)



ESTABILIDAD II A – 64.02 – ESTABILIDAD II – 84.03

01 – INTRODUCCIÓN
 02 – OBJETO
 03 – ALCANCE
 04 – CONSIDERACIONES PRELIMINARES
 05 – DESARROLLO DEL MÉTODO
 06 – CONCLUSIONES – COMENTARIOS FINALES
 07 - BIBLIOGRAFÍA

➤ Para un arco cualquiera JK, se tendrá:

SITUACIÓN	ARCO Cualquiera	RADIO	LONGITUD DEL ARCO
Sin Deformar	JK	r	r.θ
Deformado	J'K'	r'	r'.θ'

Alargamiento o Acortamiento	$\delta = r'.\theta' - r.\theta$	(2)
-----------------------------	----------------------------------	-----

➤ Teniendo en cuenta que:

$$r = R - y \qquad r' = R' - y \qquad (3)$$

$$\delta = (R' - y).\theta' - (R - y).\theta = R'.\theta' - y.\theta' - R.\theta + y.\theta$$

$$\delta = y . (\theta - \theta')$$



ESTABILIDAD II A – 64.02 – ESTABILIDAD II – 84.03

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

- Teniendo en cuenta que:

$$\theta' = \theta + \Delta\theta \quad \theta' - \theta = \Delta\theta$$

$$\delta = y \cdot (\theta - \theta') = -y \cdot \Delta\theta \quad (4)$$

- La deformación específica que experimenta un arco cualquiera JK, estará dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\delta}{r \cdot \theta} = \frac{-y \cdot \Delta\theta}{r \cdot \theta}$$

- Teniendo en cuenta (3) – $[r = R - y]$:

$$\varepsilon_x = - \frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{y}{R - y} \quad (5)$$

- La (5) indica que las deformaciones específicas ε_x en este tipo de piezas estructurales no varían linealmente en función de su distancia a la superficie neutra. Esta conclusión se manifiesta a pesar de que las secciones transversales permanecen planas durante la deformación.

ESTABILIDAD II A – 64.02 – ESTABILIDAD II – 84.03

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

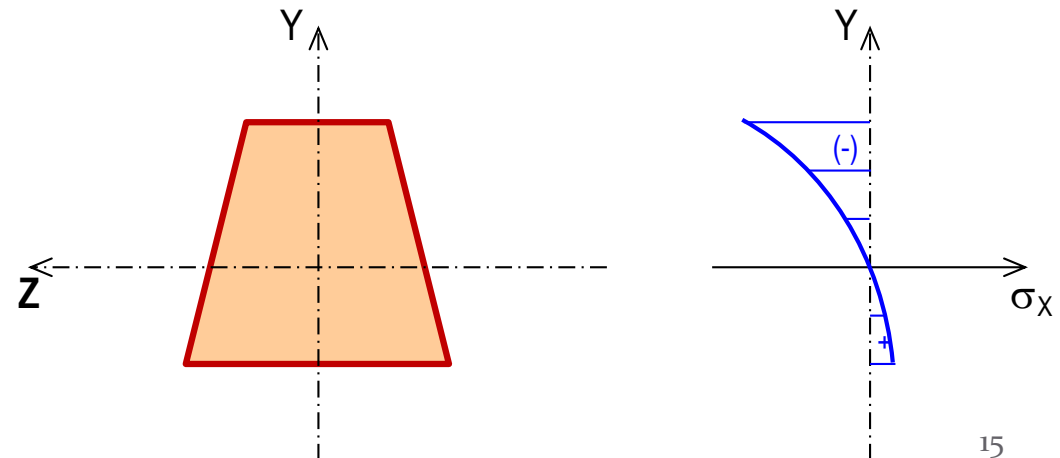
07 - BIBLIOGRAFÍA

- Una vez obtenidas las deformaciones específicas mediante la (5), el siguiente paso es obtener las tensiones normales. Para ello se utiliza la Ley de Hooke, puesto que se ha asumido un comportamiento elástico y lineal:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (6)$$

$$\sigma_x = - \frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{y}{R - y} \quad (7) \quad \sigma_x = - \frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R - r}{r}$$

- Las (7) muestran, también, que las tensiones normales **NO** varían linealmente con su distancia a la superficie neutra, sino a través de un arco de hipérbola, como indica la siguiente figura:





01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

Qué está faltando determinar?

1. Cómo evaluar $\Delta\theta / \theta$;
2. Cómo vincular $\sigma_x = f(M)$;
3. Ubicar la posición de la superficie neutra.

➤ Se plantean las ecuaciones de equivalencia entre tensiones normales y solicitaciones internas:

$$\int \sigma_x \cdot dA = 0 \quad (8) \quad - \int \sigma_x \cdot y \cdot dA = M \quad (9)$$

➤ Se reemplaza la (7) en la (8), y se opera:

$$\int E \cdot \frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R-r}{r} \cdot dA = 0 \quad \int \frac{R-r}{r} \cdot dA = 0$$

ESTABILIDAD II A – 64.02 – ESTABILIDAD II – 84.03

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

$$R \int \frac{dA}{r} - \int dA = 0$$

$$R \int \frac{dA}{r} = \int dA$$

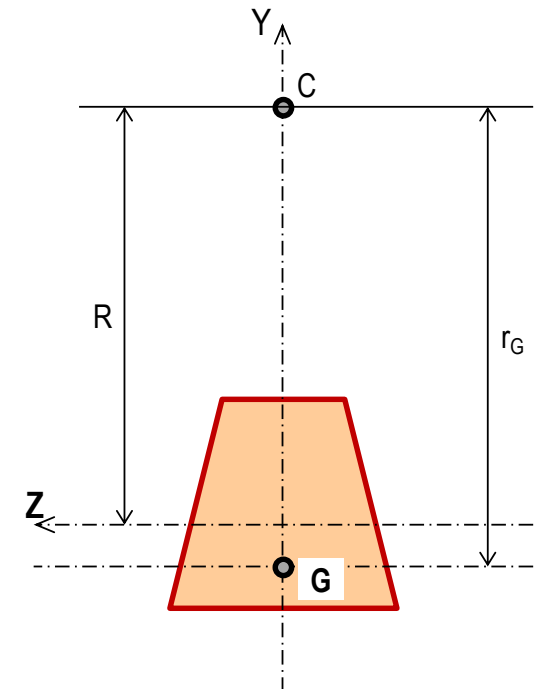
$$R = \frac{\int dA}{\int \frac{dA}{r}} \quad (10)$$

La (10) proporciona la distancia del centro de curvatura a la línea neutra

➤ Antes de continuar, es preciso tener presente que:

$$r_G = \frac{\int r \cdot dA}{A}$$

En un elemento curvo, el eje neutro NO es baricéntrico a diferencia de lo que si ocurre en elementos rectos solicitados a flexión simple.



ESTABILIDAD II A – 64.02 – ESTABILIDAD II – 84.03

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
 PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
 MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
 COMENTARIOS FINALES

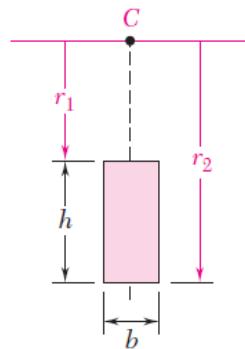
07 - BIBLIOGRAFÍA

➤ Se rescribe la (10):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A} \cdot \int \frac{1}{r} \cdot dA \quad (11)$$

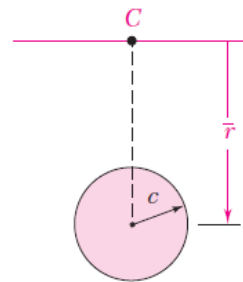
➤ La (11) indica que si el área fuera dividida en infinitos diferenciales dA , la curvatura inicial $\chi_0 = 1 / R$ de la superficie neutra será el valor promedio de las distintas curvaturas de los dA .

➤ Los valores de R están tabulados para distintas secciones transversales típicas usadas en la práctica. Se indica una tabla resumida:



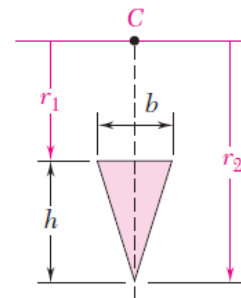
Rectángulo

$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$



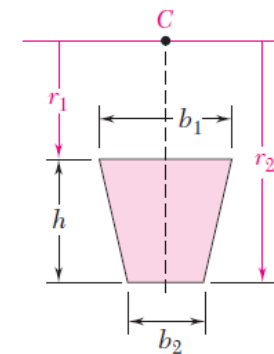
Círculo

$$R = \frac{1}{2} (\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2})$$



Triángulo

$$R = \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{r_2}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1}$$



Trapecio

$$R = \frac{\frac{1}{2}h^2(b_1 + b_2)}{(b_1r_2 - b_2r_1) \ln \frac{r_2}{r_1} - h(b_1 - b_2)}$$



ESTABILIDAD II A – 64.02 – ESTABILIDAD II – 84.03

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

- Se trabajará ahora con la 2º Ecuación de Equivalencia, dada por la (9), previo reemplazo de la (7) en ella:

$$M = \int y \cdot E \cdot \frac{\Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R - r}{r} \cdot dA \quad (12)$$

- Luego de desarrollar y operar, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{M}{A \cdot (r_G - R)} = \frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \quad (13)$$

- Si $M > 0$ (como es este caso), $\Delta\theta > 0$ también.
- Con lo que $r_G - R > 0$; lo que significa que $r_G > R$ siempre y sin importar la forma de la sección.
- Lo anterior implica que el eje neutro (y la superficie neutra) se ubican siempre entre el Baricentro «G» y el centro de curvatura «C».



ESTABILIDAD II A – 64.02 – ESTABILIDAD II – 84.03

01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

- Denominando: $e = r_G - R$; la (13) es posible de expresar según la (14):

$$\frac{M}{A \cdot E} = \frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \quad (14)$$

- Combinando las (7) y la (14), se tiene:

$$\sigma_x = - \frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{y}{R - y} = - \frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R - r}{r} \quad (7)$$

$$\sigma_x = - \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{R - y} = - \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{R - r}{r} = \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{r - R}{r} \quad (15)$$

- La (15) permite determinar el diagrama de tensiones en función de las solicitaciones y de las características geométricas de la sección.
- Dado que $e = r_G - R$ es pequeño debido a que ambos, r_G y R , son comparables, se requiere para la determinación de σ_x con cierta precisión que R y r_G sean evaluadas con mucha precisión.



01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

Cálculo del cambio de curvatura de la superficie neutra:

- Recordando la (1) y operando con ella, se tiene:

$$R'.\theta' = R.\theta \quad \frac{1}{R'.\theta'} = \frac{1}{R.\theta} \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\theta'}{\theta}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\theta + \Delta\theta}{\theta} = \frac{1}{R} \cdot \left[1 + \frac{\Delta\theta}{\theta} \right]$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \cdot \left[1 + \frac{M}{E.A.e} \right]$$

- Con lo que la variación de la curvatura queda:

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{E.A.e.R} \quad (16)$$



01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

**06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES**

07 - BIBLIOGRAFÍA

06 – CONCLUSIONES – COMENTARIOS FINALES

06.01 - COMPARACIÓN CON LA FLEXIÓN SIMPLE EN BARRAS RECTAS:

BARRAS RECTAS	BARRAS CURVAS
Las secciones se mantienen planas luego de la deformación por flexión	Las secciones se mantienen planas luego de la deformación por flexión
El eje neutro es baricéntrico.	El eje neutro NO es baricéntrico y se ubica entre el centro de curvatura y el baricentro.
La distribución de las deformaciones en la sección es lineal.	La distribución de las deformaciones en la sección es de variación hiperbólica.
La distribución de las tensiones normales en la sección es lineal.	La distribución de las tensiones normales en la sección es de variación hiperbólica.



01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

**06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES**

07 - BIBLIOGRAFÍA

06 – CONCLUSIONES – COMENTARIOS FINALES

06.02 – CONTINUACIÓN DEL TEMA VISTO:

- Análisis exacto mediante el desarrollo por la Teoría Matemática de la Elasticidad:
 - Para flexión pura el método de Winkler y el exacto dan resultados muy parecidos;
 - No así cuando las cargas actuantes son combinadas;
 - El análisis para barras rectas no es aplicable;
 - Barras con una curvatura muy suave son posibles de analizar mediante el análisis como barras rectas.



01 – INTRODUCCIÓN

02 – OBJETO

03 – ALCANCE

04 – CONSIDERACIONES
PRELIMINARES

05 – DESARROLLO DEL
MÉTODO

06 – CONCLUSIONES –
COMENTARIOS FINALES

07 - BIBLIOGRAFÍA

07 – BIBLIOGRAFÍA:

- «Resistencia de Materiales» - V. I. FEODOSIEV – Ed. MIR
- «Mecánica de Materiales» - BEER-JOHNSTON-DEWOLF – Ed. McGraw Hill
- «Mecánica de Sólidos» - Egor P. POPOV - Pearson Educación
- «Mechanics of Materials» – R. C. HIBBELER – Prentice Hall
- «Advanced Strength and Applied Elasticity» – Ansel C. UGURAL-Saul K FENSTER -“Prentice Hall
- «Manual de Resistencia de Materiales» - PISARENKO-YÁKLOVEV-MATVÉEV – Ed. MIR