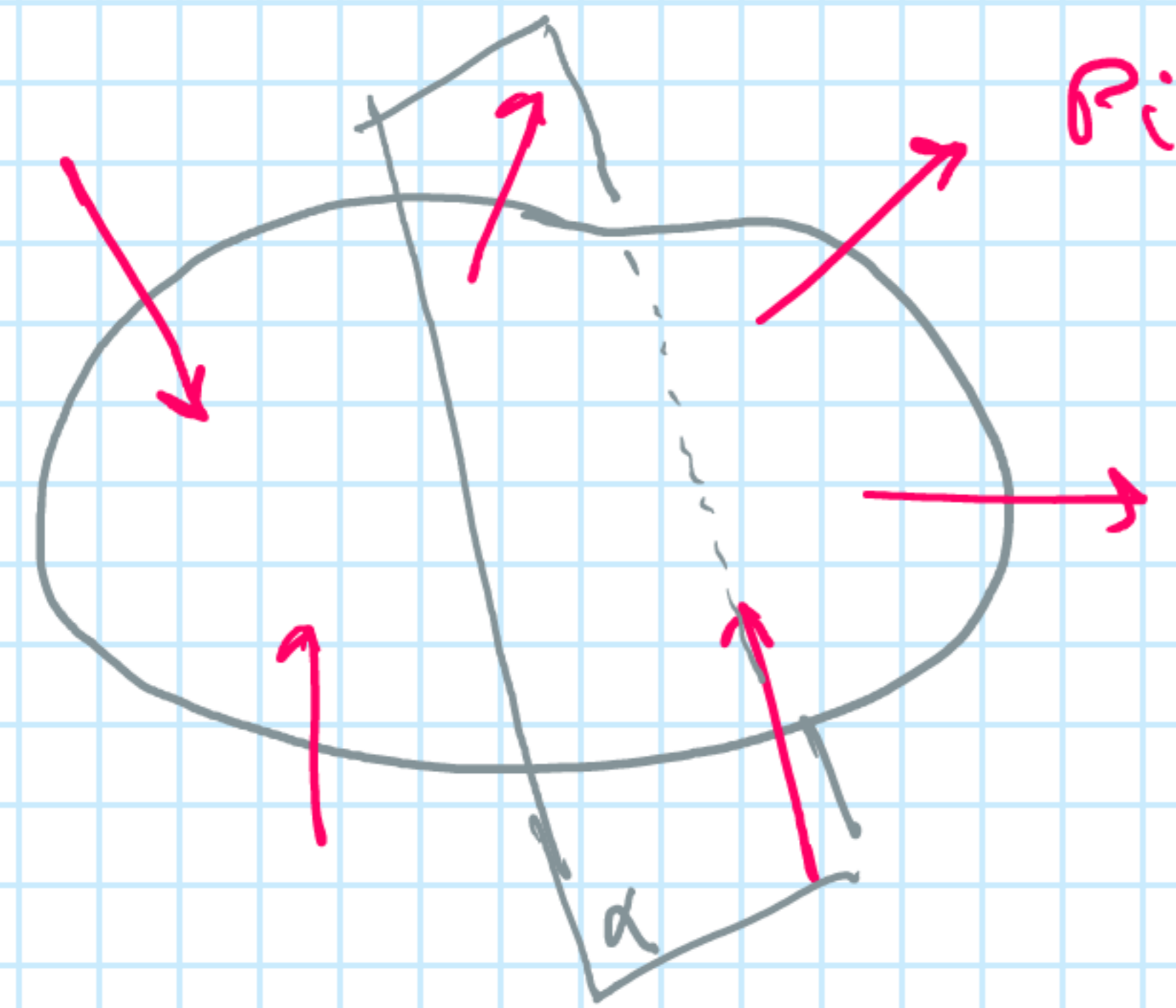
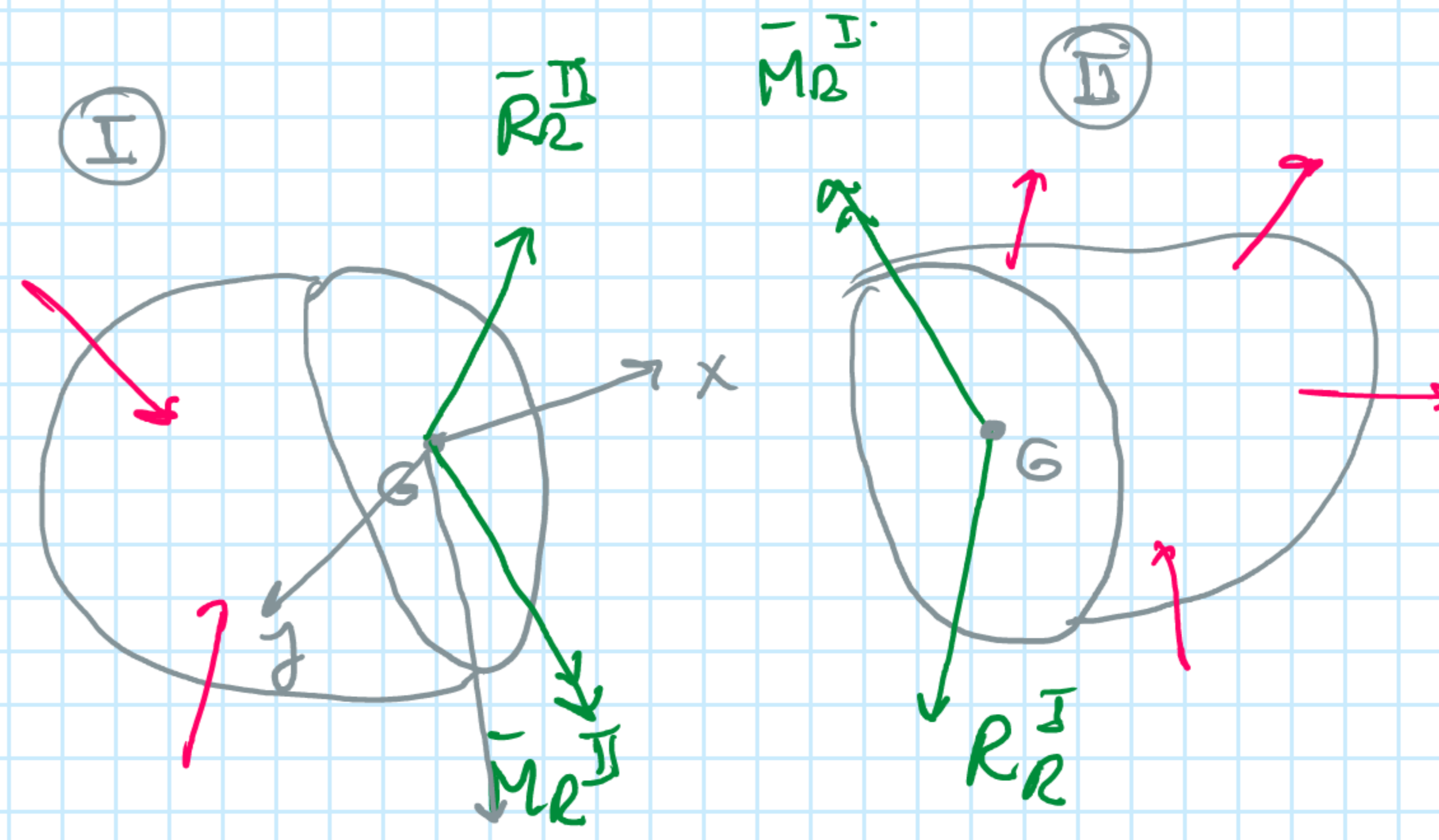


02.01 - DEFINICIÓN:

martes, 28 de septiembre de 2021 09:27



→



ASOCIAR UNA TERNAS $(0; x; y; z)$ AL G DE LA SECCIÓN:

$0 \equiv G$

$R_{DE} x \rightarrow \perp$ PLANO DE LA SECCIÓN.

" $\left. \begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \right\} \rightarrow$ CONTENIDOS EN EL PLANO DE LA SECCIÓN. $\equiv EPI_G$

$\bar{R}_R \rightarrow$
 $R_{Rx} = R_x = 0$
 $R_{Ry} = Q_y = 0$
 $R_{Rz} = Q_z = 0$

$\bar{M}_R \rightarrow$
 $M_{Rx} = M_x = 0$
 $M_{Ry} = M_{Fy} \neq 0$
 $M_{Rz} = M_{Fz} \neq 0$

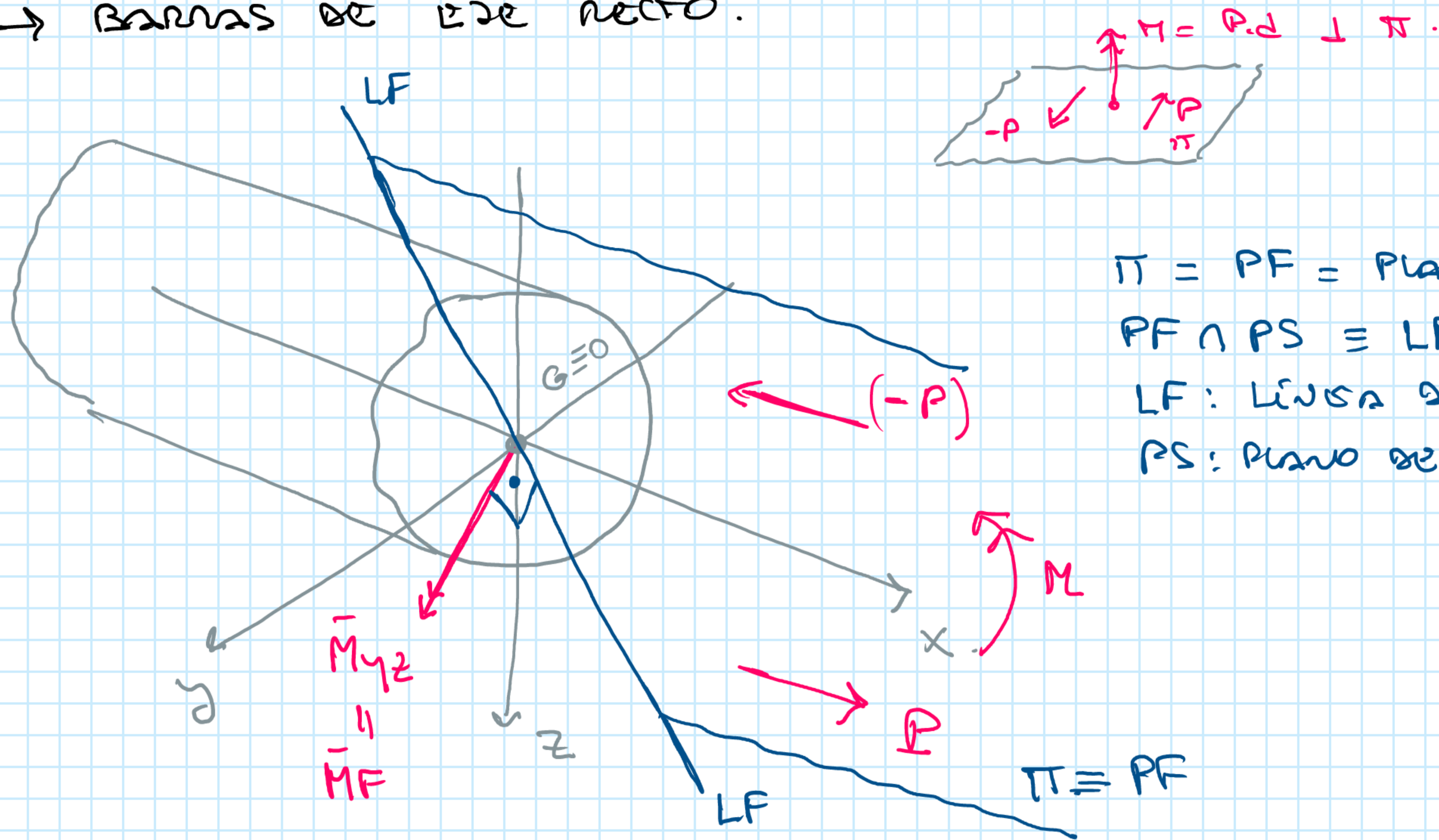
$M_{Ryz} \neq 0$

$M_{Ryz} \rightarrow$ ESTÁ CONTENIDO EN EL PLANO DE LA SECCIÓN.

02.02 - ELEMENTOS:

martes, 28 de septiembre de 2021 09:34

→ BARRAS DE EJE RECTO.



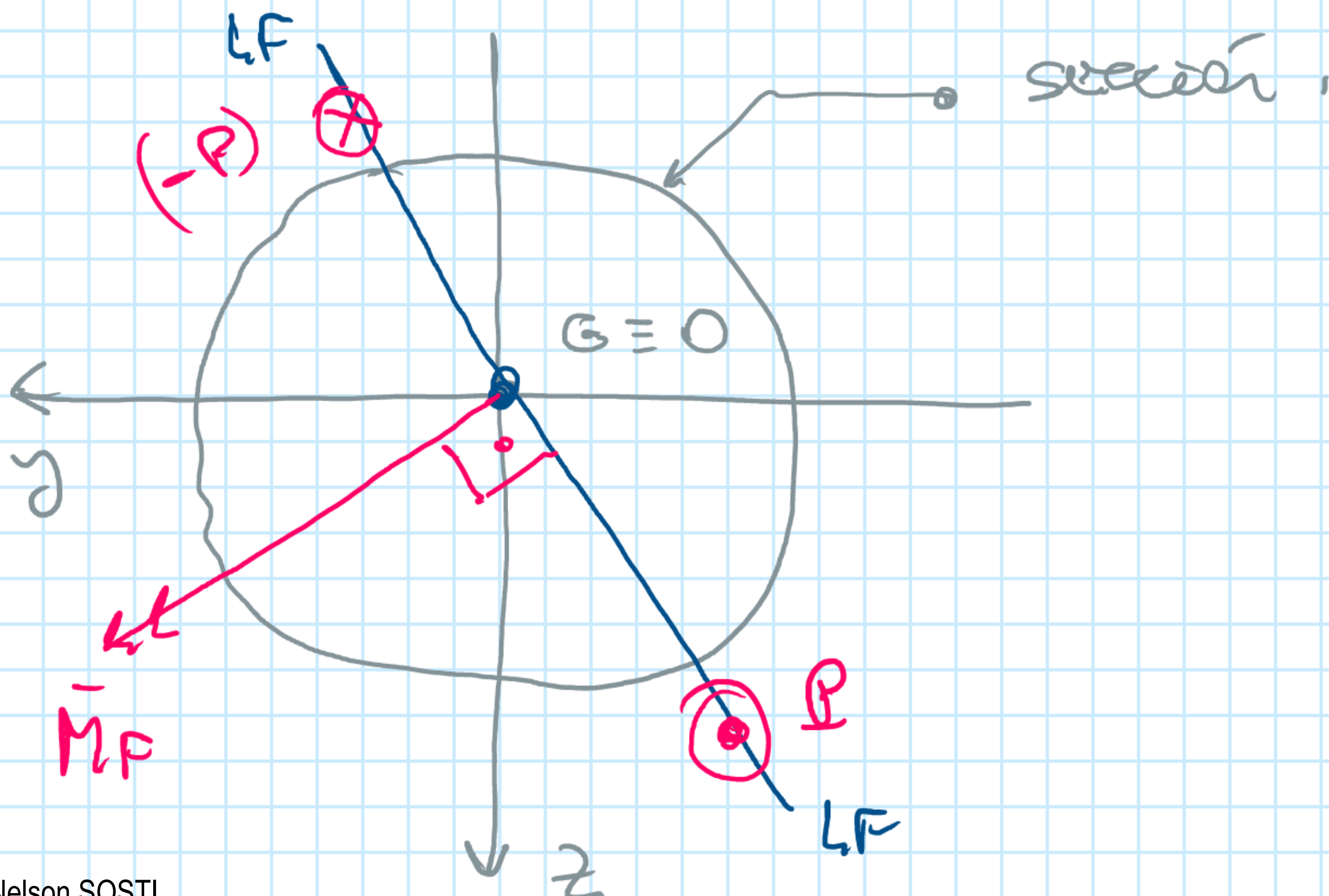
$\pi = PF = \text{PLANO DE FUSIÓN.}$
 $PF \cap PS \equiv LF$
 LF: LÍNEA DE FUERZAS
 PS: PLANO DE LA SOCCÓN.

Vector momento \bar{M}_F
 par de fuerzas \bar{P} y $(-\bar{P})$.
 momento M } → son 3 formas de representar lo mismo.

PS: PLANO DE LA SOCCÓN.
 PF: " " FUSIÓN } $PS \perp PF$.

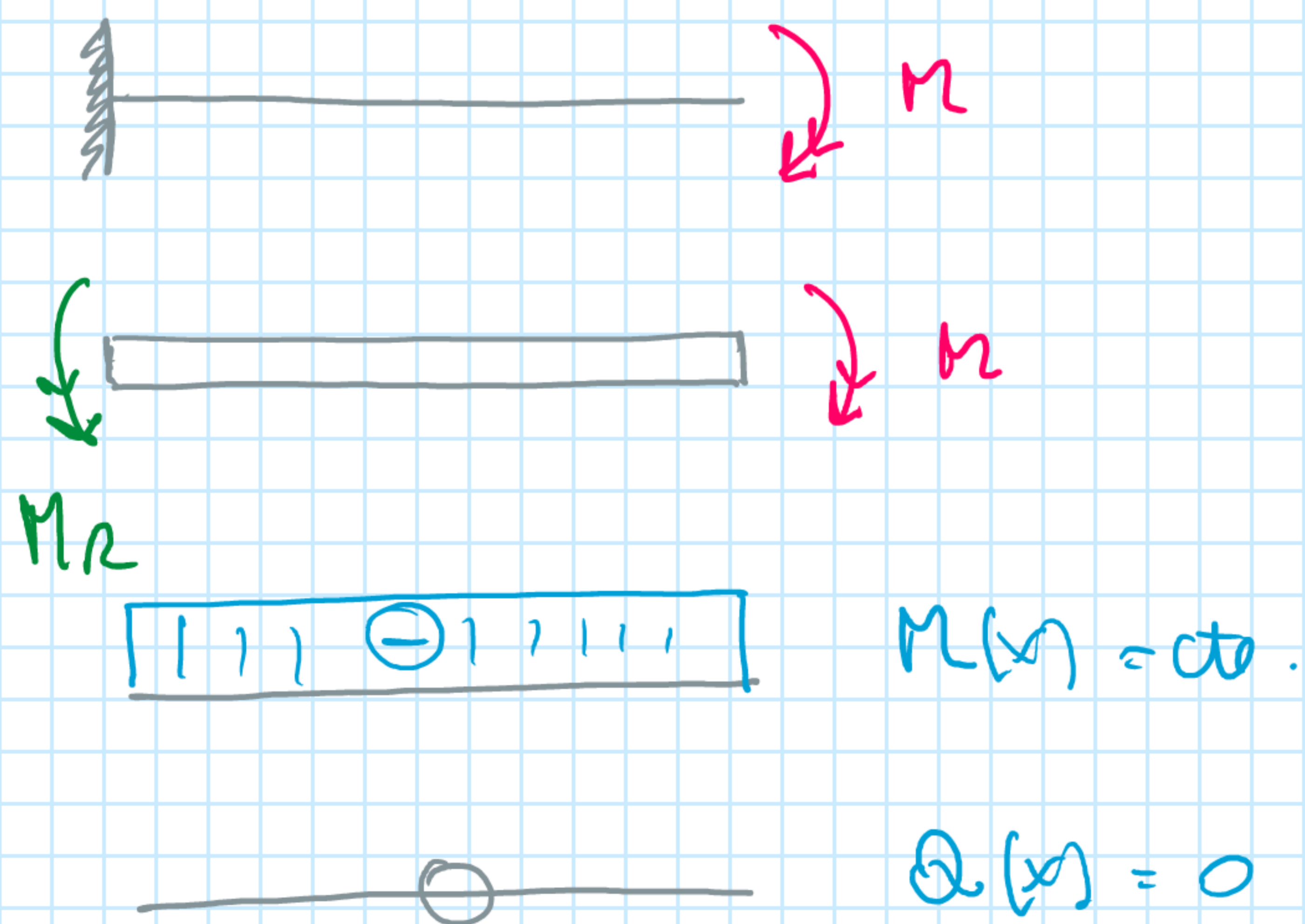
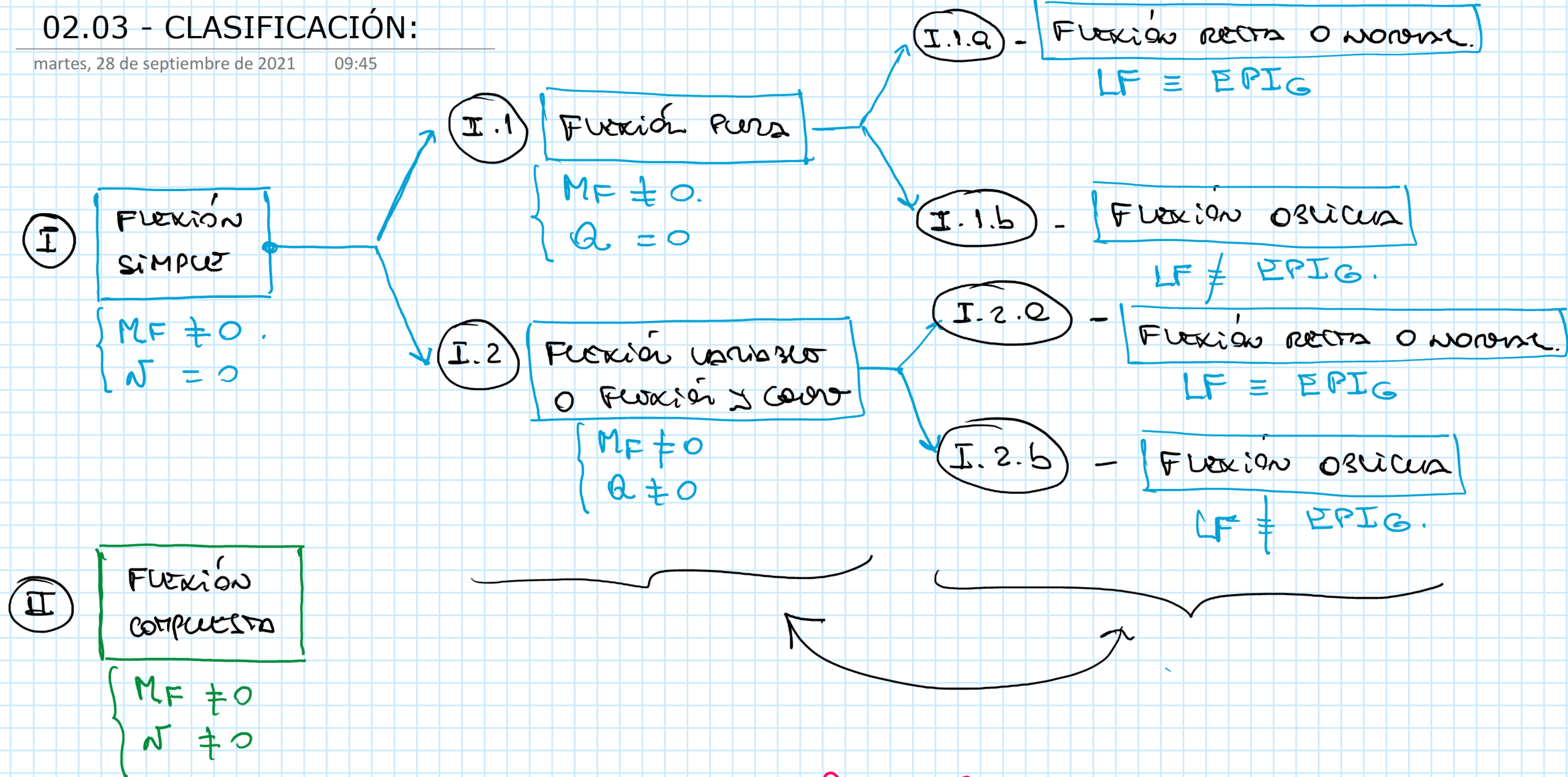
LÍNEA DE FUERZAS = LF = $PS \cap PF$.

- $LF \perp \bar{M}_F$
- LF → SIEMPRE PASA POR EL 'G' DE LA SOCCÓN.

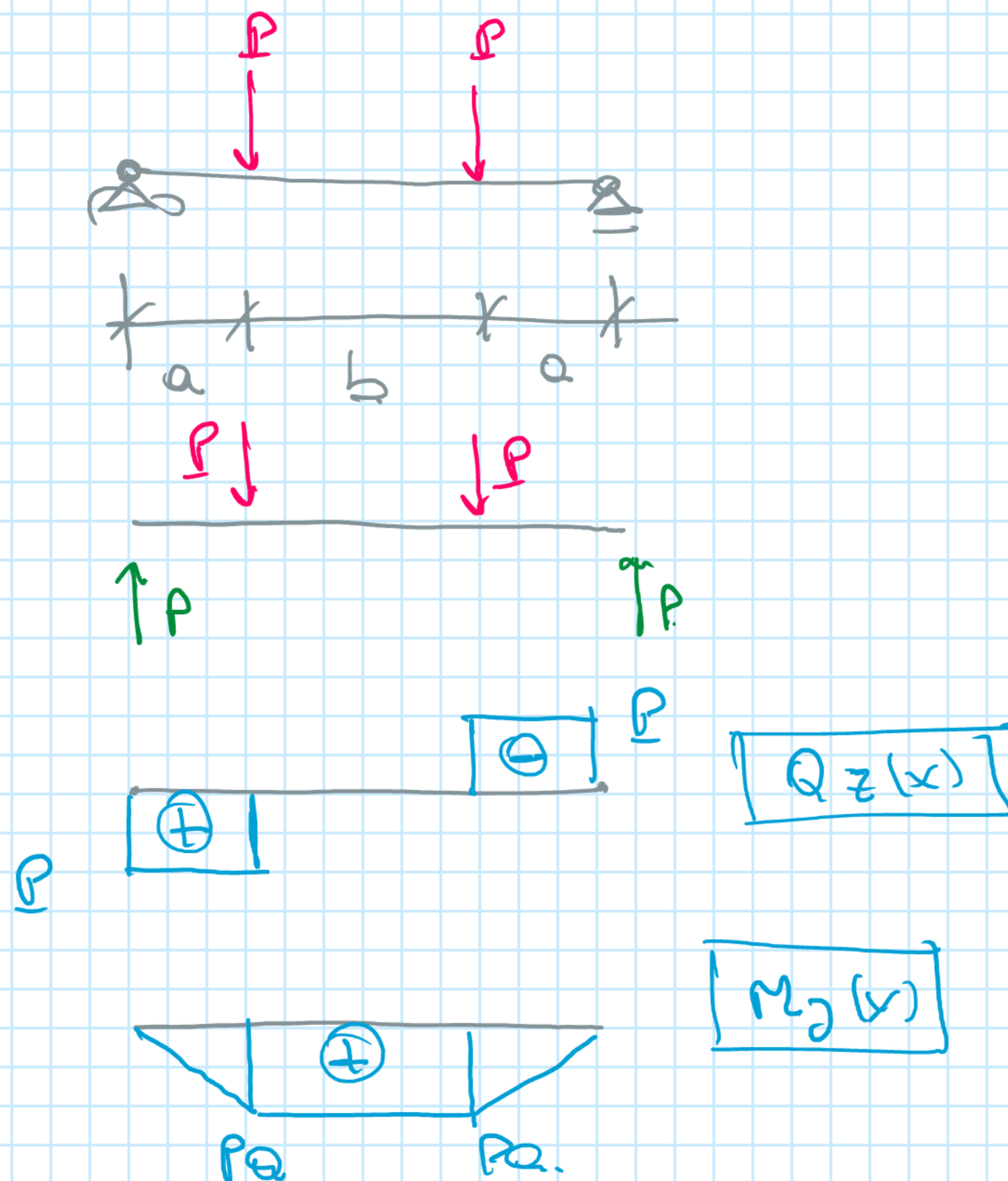


02.03 - CLASIFICACIÓN:

martes, 28 de septiembre de 2021 09:45

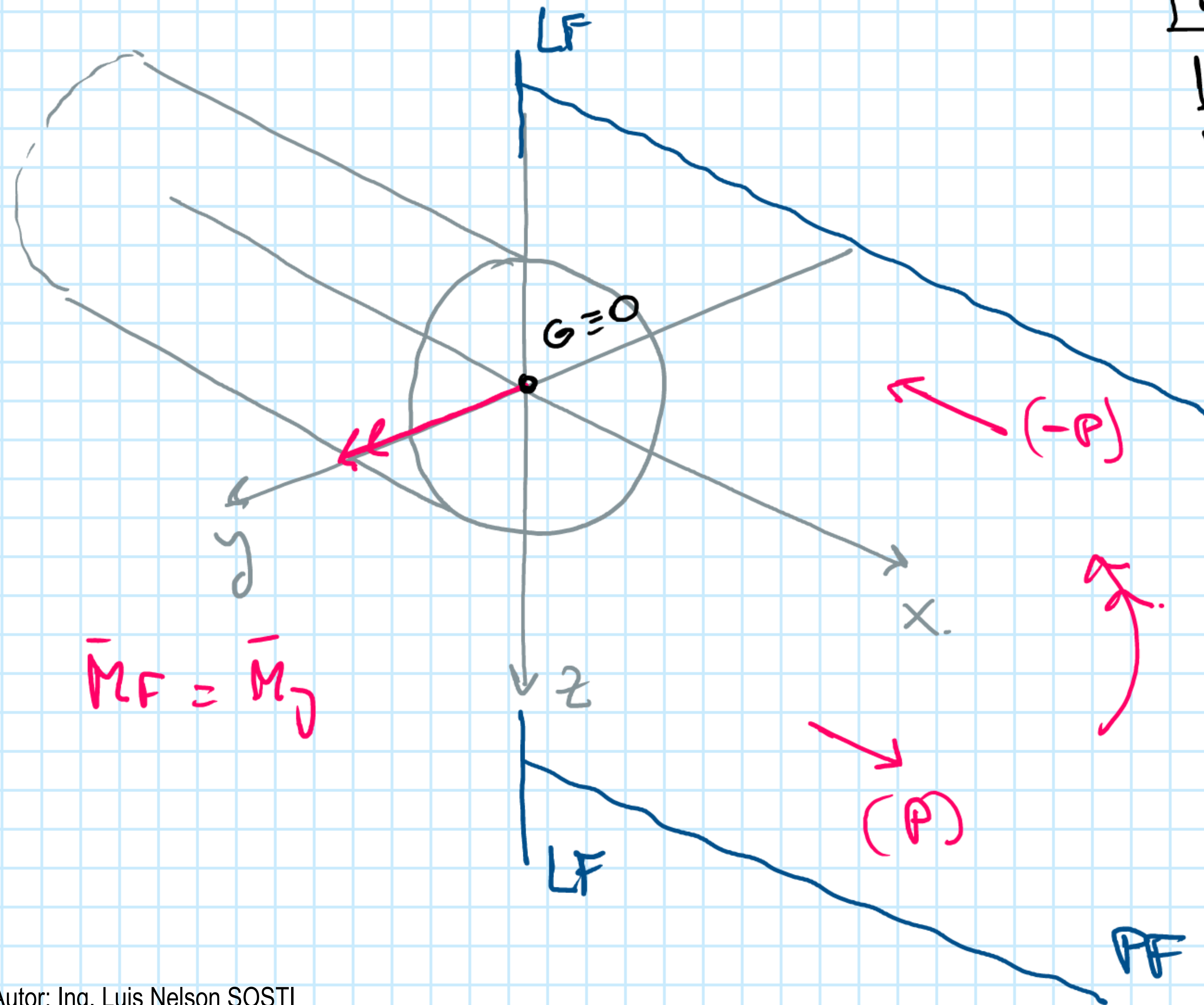


$$Q_z(x) = \frac{dM_y(x)}{dx}$$



02.04 - FLEXIÓN SIMPLE PURA Y RECTA = FSPR :

martes, 28 de septiembre de 2021 10:01



FSPR

↳ simple $\rightarrow \sigma = 0$.

↳ pura $\rightarrow Q = 0$.

↳ recta $\rightarrow LF \equiv EPIC$.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Recta} \equiv (0; x; y; z) \\ x \perp PS \\ y, z \text{ son EPIC} \\ 0 \equiv G \end{array} \right.$

$LF \equiv EPIC z$.

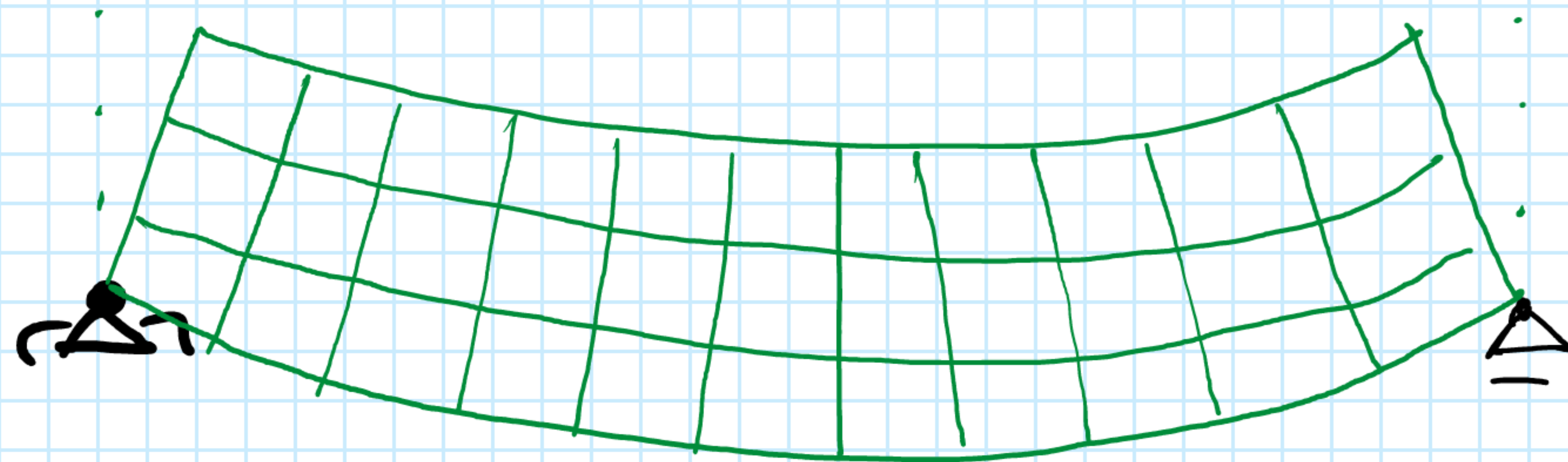
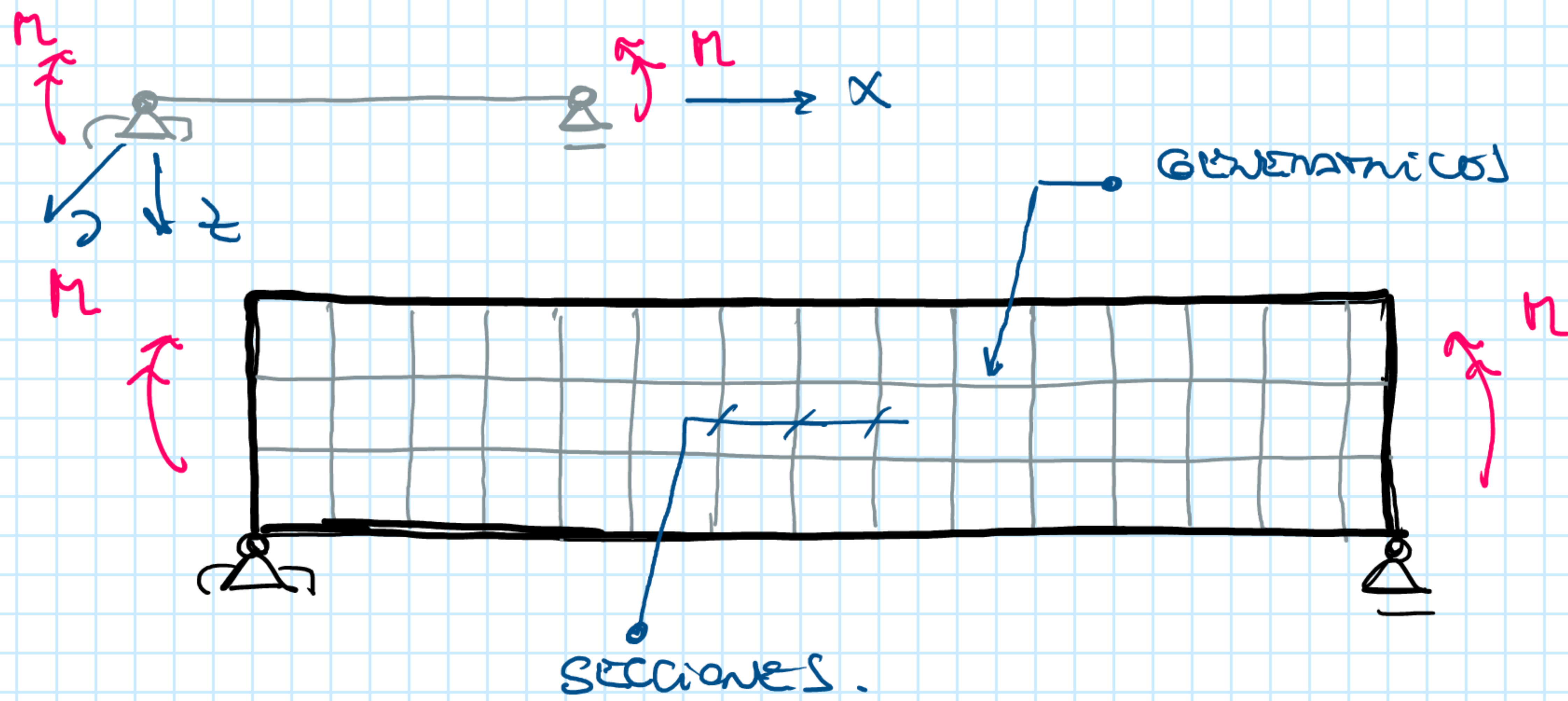
02.04.01 - ECS DE EQUIVALENCIA:

martes, 28 de septiembre de 2021 10:01

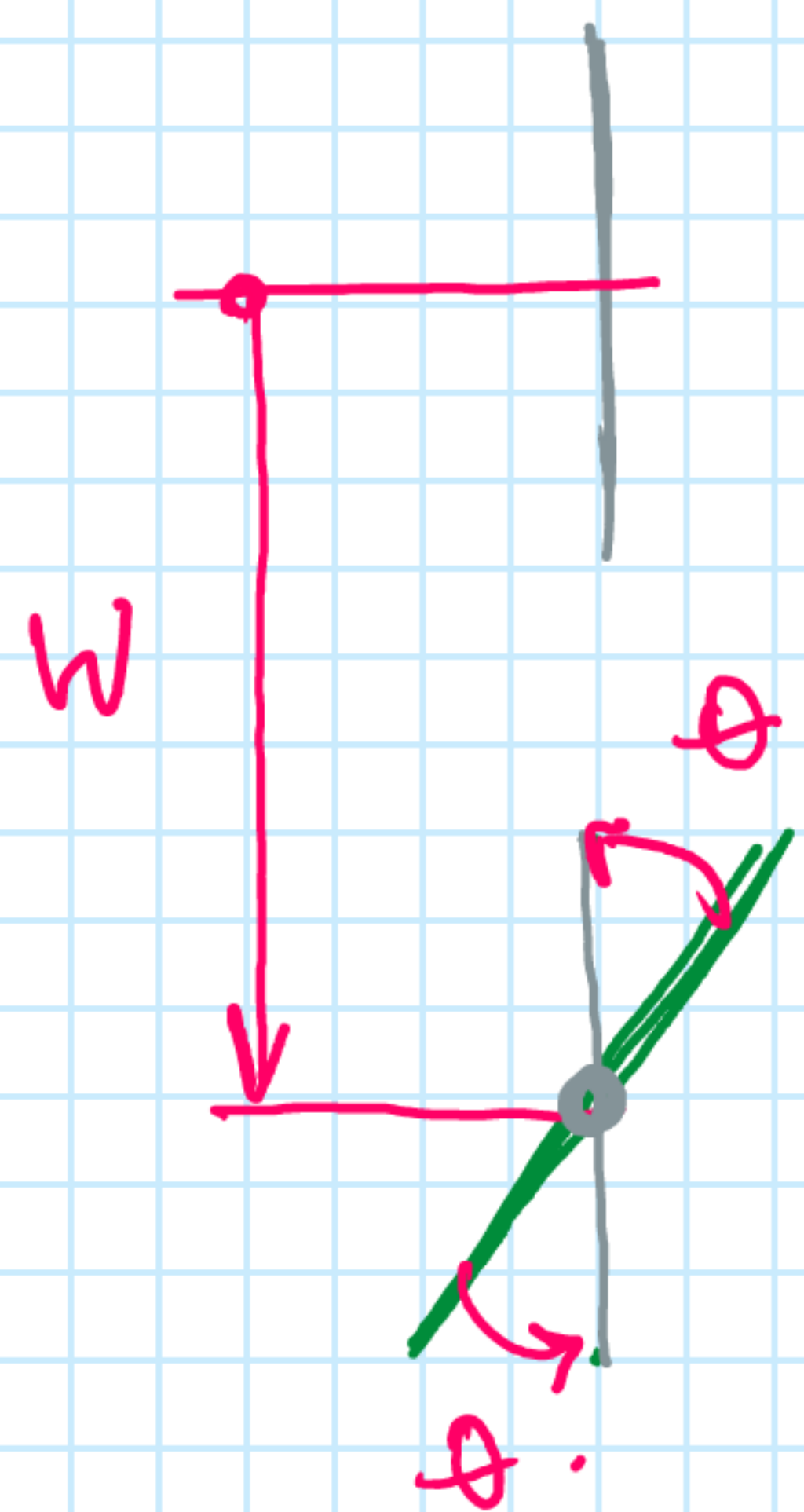
1)	\otimes	$N = 0 = \int_A \sigma_x \cdot dA$	} $\rightarrow \bar{R}_2 = 0$
2)	\odot	$Q_y = 0 = \int_A \tau_{xy} \cdot dA$	
3)	\odot	$Q_z = 0 = \int_A \tau_{xz} \cdot dA$	
4)	\otimes	$M_x = 0 = \int_A (-\tau_{xy} \cdot z + \tau_{xz} \cdot y) \cdot dA$	} $\bar{M}_R \neq 0$
5)	\odot	$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA$	
6)	\odot	$M_z = 0 = \int_A -\sigma_x \cdot y \cdot dA$	

02.04.02 - EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO:

martes, 28 de septiembre de 2021 10:10



- LAS GENERATRICES SE CURVAN
- LAS SECCIONES SE MANTIENEN PLANAS



Las secciones sufren un desplazamiento vertical y un giro.

Nota:

Los desplazamientos:

$$\begin{cases} x \rightarrow u \\ y \rightarrow v \\ z \rightarrow w \end{cases}$$

Esto surge de un estudio experimental → solución a una barra a flexión simple pura y recta

02.04.03- HIPÓTESIS DE BERNOULLI - NAVIER:

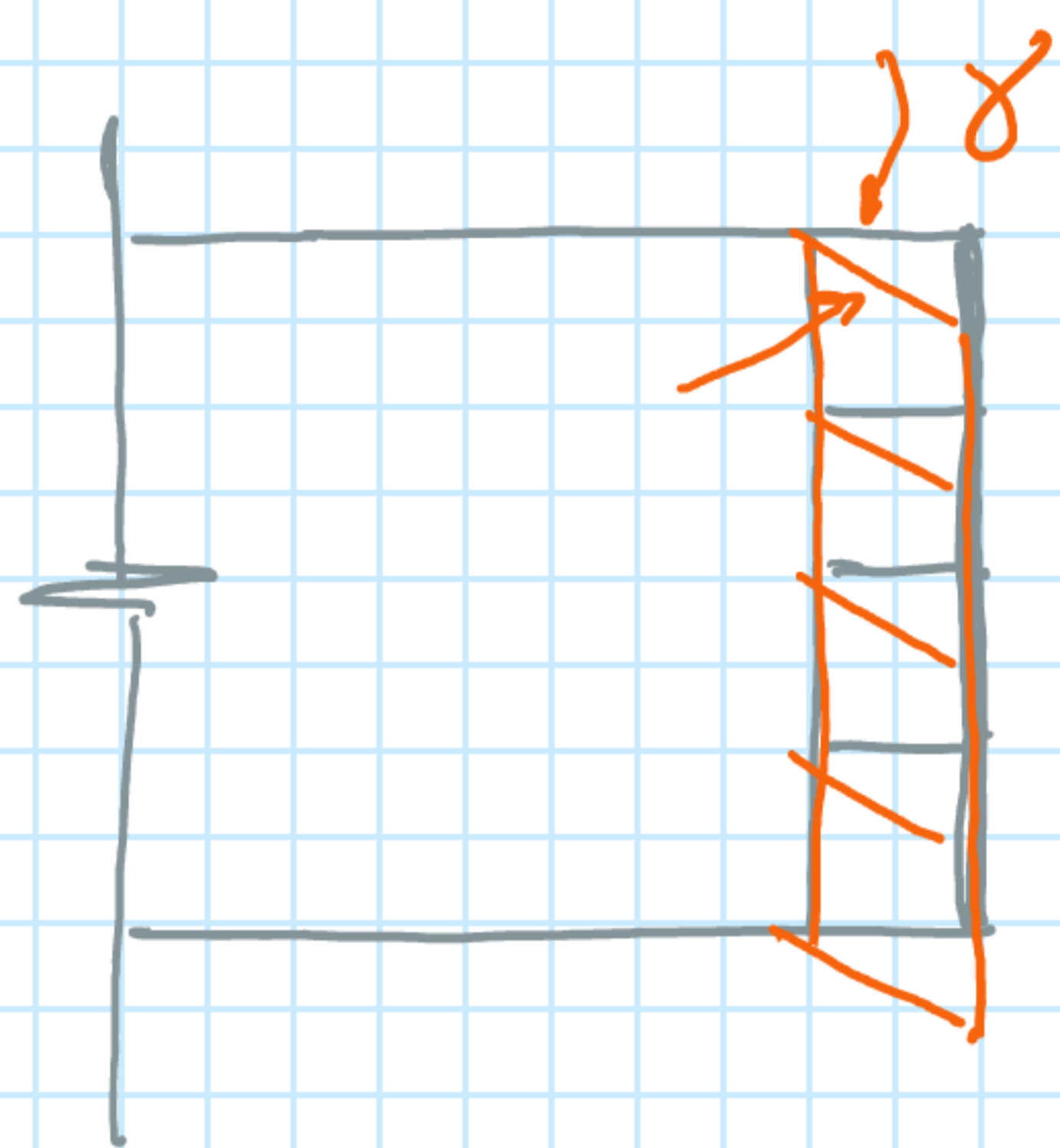
En una barra recta solicitada a flexión, las generatrices que inicialmente (antes de la deformación por flexión) eran, después de la deformación por flexión se curvan. Y las secciones, que originalmente eran planas, van a seguir siendo planas después de la deformación pero girarán alrededor de un eje perteneciente al plano de la sección al que denominaremos como "Eje Neutro" o "Línea Neutra - LN"

$\left\{ \begin{array}{l} \text{EJE NEUTRO} \equiv \text{EN} \\ \text{LÍNEA NEUTRA} \equiv \text{LN} \end{array} \right\}$

02.04.04 - RESOLUCIÓN DE LAS ECS. DE EQUIVALENCIA:

martes, 28 de septiembre de 2021 10:37

- si las secciones se mantienen planas \rightarrow no se alabezan \rightarrow \rightarrow se distorsionan ???



- I • si $\gamma = 0 \rightarrow$ la sección no se distorsiona y NO se alabeza.
- II • si $\gamma = cte \rightarrow$ la sección se distorsiona pero NO se alabeza.
- III • si $\gamma \neq cte \rightarrow$ la sección se distorsiona y se alabeza.

Ⓘ Caso I: $\gamma = 0 \rightarrow$ ley de Hook $\rightarrow \tau = G \cdot \gamma = 0 \rightarrow$
 \rightarrow de la 2ª y 3ª ec. de equivalencia:

$$0 = \int_A \tau_{xy} da \quad \checkmark$$

$$0 = \int_A \tau_{xz} da \quad \checkmark$$

Ⓙ Caso II: $\gamma = cte \rightarrow$ ley de Hook $\rightarrow \tau = \frac{G \gamma}{cte} = cte. \rightarrow$

\rightarrow de la 2ª y 3ª ec. de equivalencia:

$$\textcircled{2} \quad 0 = \int_A \tau_{xy} da = \tau_{xy} \int_A da = \int_A da$$

$$\textcircled{3} \quad 0 = \int_A \tau_{xz} da = \tau_{xz} \int_A da = \int_A da$$

\rightarrow incompatibilidad matemática
) física.

$$\rightarrow \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \rightarrow \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$$

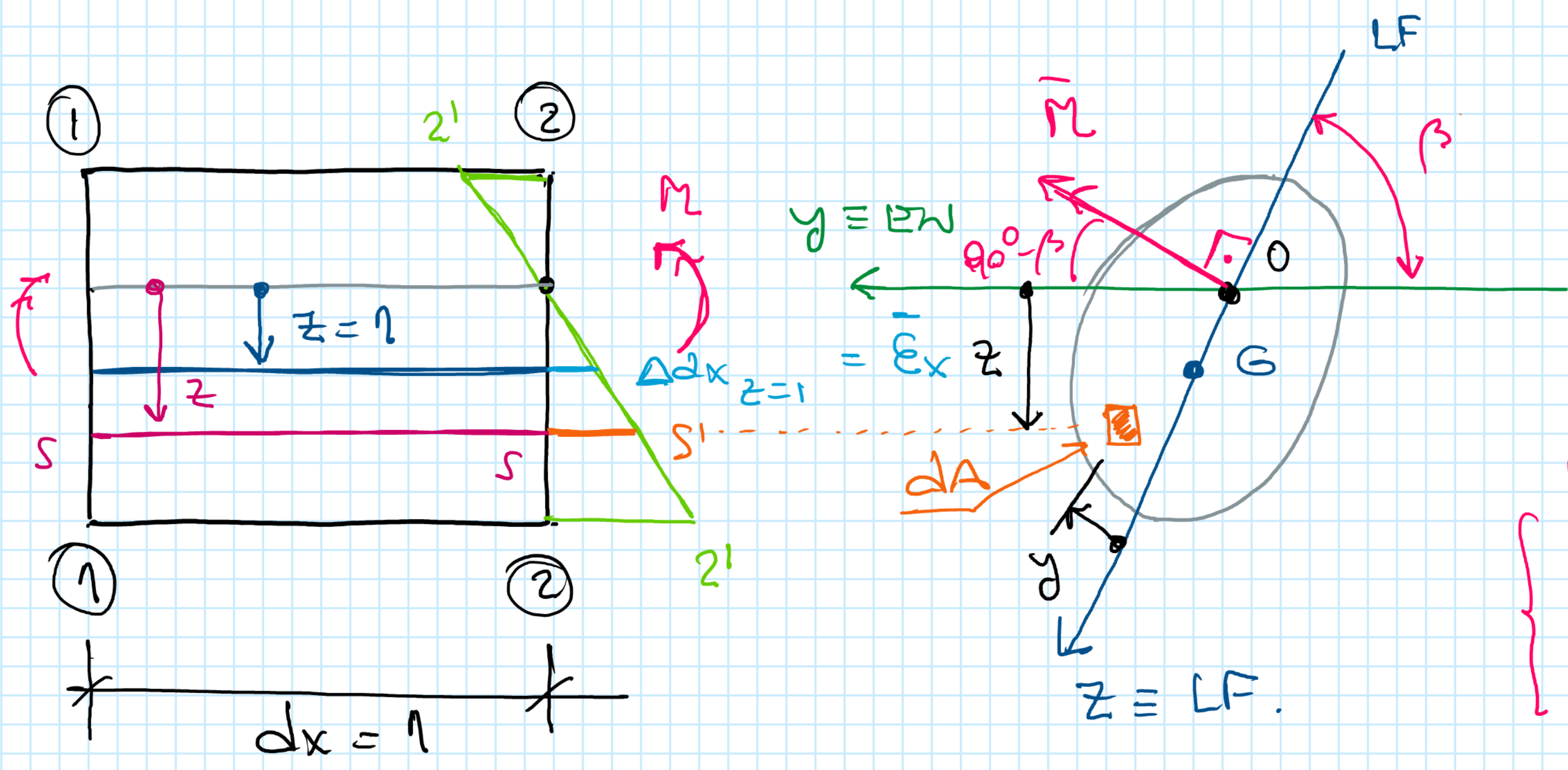
2ª }
 3ª } \rightarrow ECS de equivalencia \rightarrow se distorsionan.
 4ª }

02.04.04 - RESOLUCIÓN DE LAS ECS. DE EQUIVALENCIA:

martes, 28 de septiembre de 2021 10:37



EN EL 'EJE NORMAL - EN' → LAS FIBRAS NO SE
 AVANZAN NI SE ACORTAN.



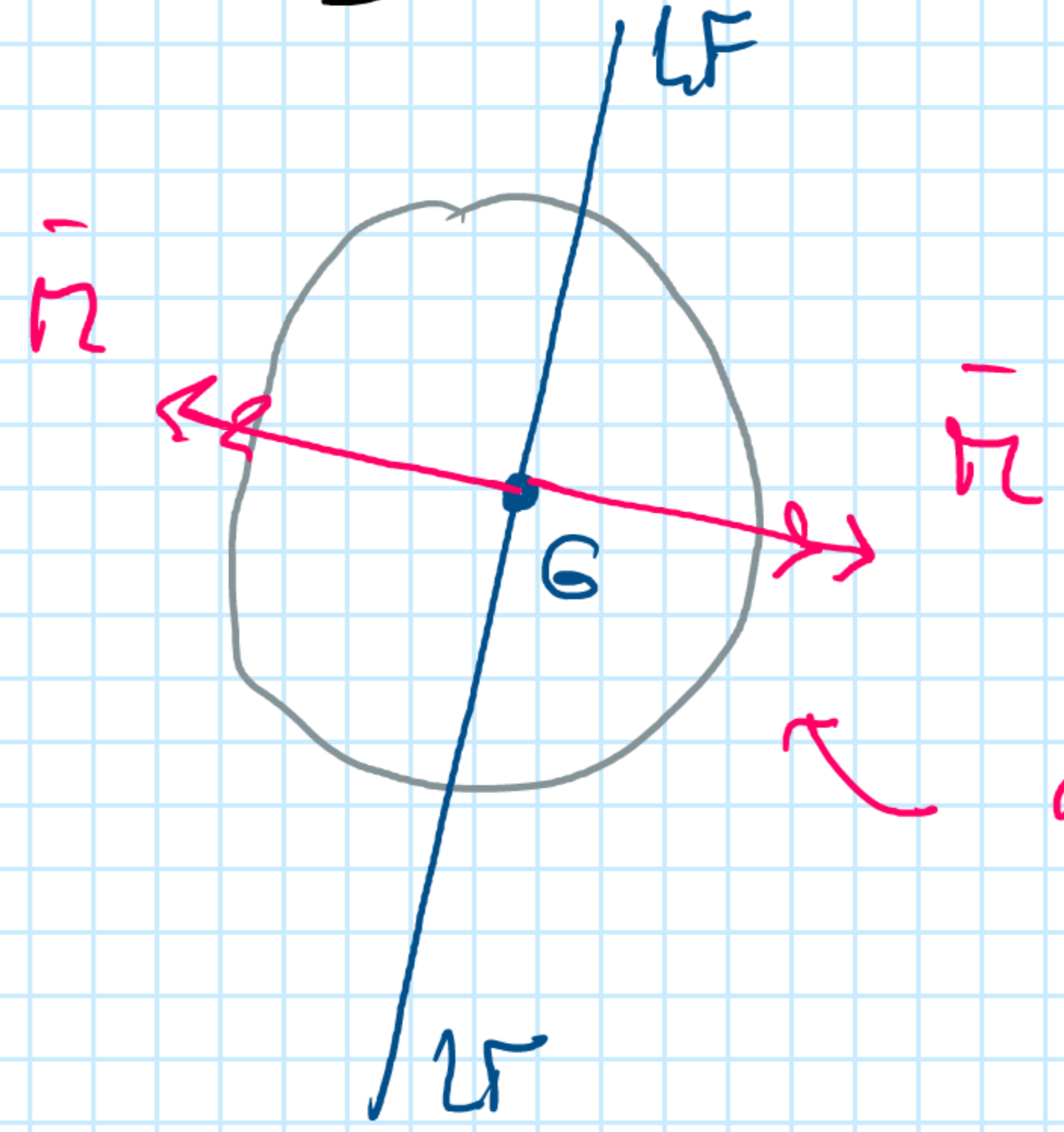
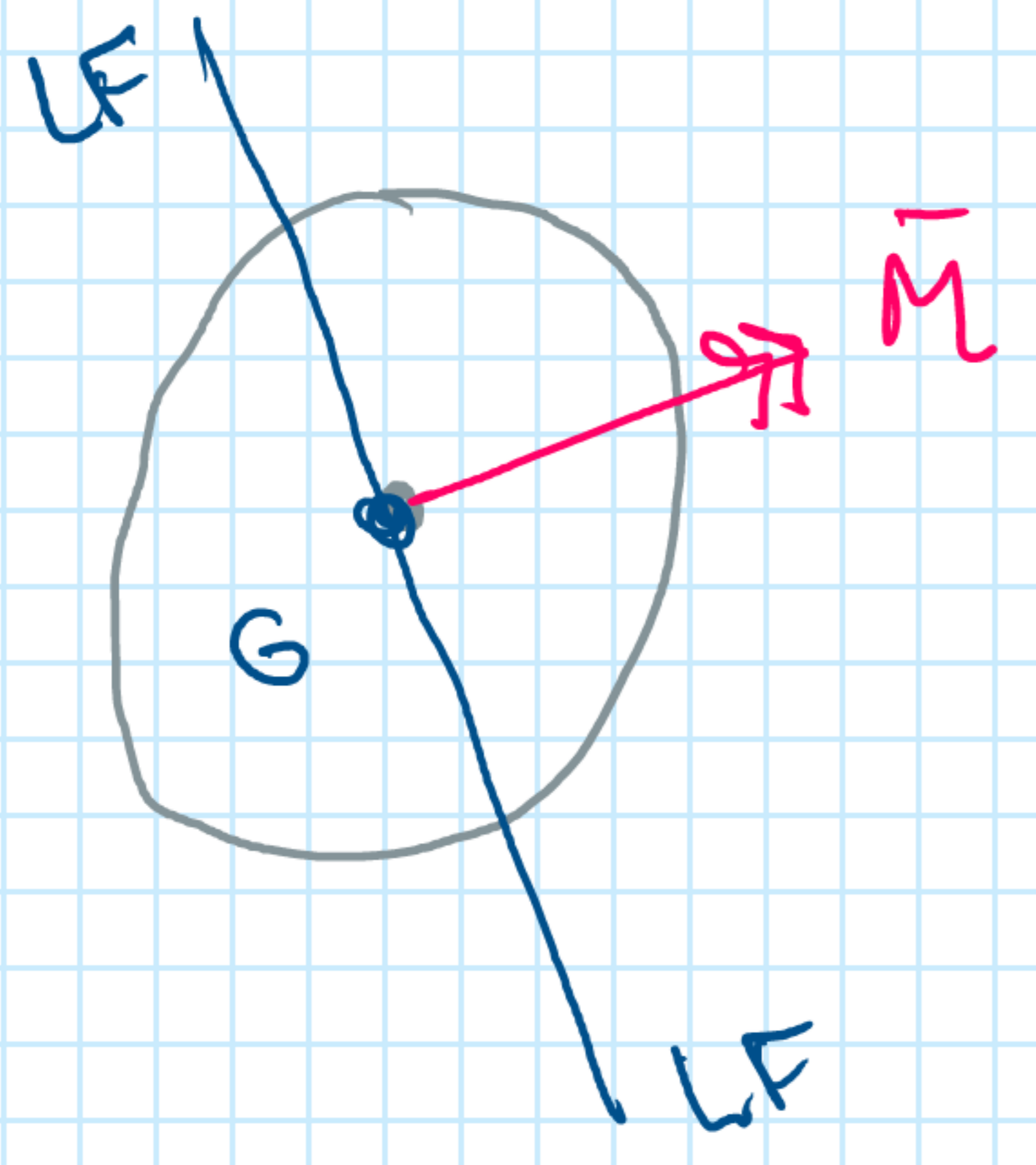
CONSIDERAMOS
 2 FIBRAS.

$$e_x = \frac{\Delta dx}{\frac{dx}{1}} = \Delta dx$$

$$\left\{ \begin{aligned} LF, EN &= \beta \\ \bar{M}_y &= M \cdot \cos(90^\circ - \beta) \\ \bar{M}_z &= M \cdot \sin \beta \end{aligned} \right.$$

Nota

- ↳ si conocemos el vector momento → conocemos a la LF.
- ↳ si " " a la LF → sabemos como como la dirección del vector momento pero no su sentido.



ALGUNAS INFORMACION
 ADICIONAL.

A NIVEL 'z':

$$\left. \begin{aligned} \bar{SS} &= dx = l_0 \\ \bar{SS}' &= \Delta dx = lf - l_0 \end{aligned} \right\} \frac{\Delta dx}{dx} = e_{x,z} \text{ con } dx=1$$

$$\frac{e_{x,z}}{z} = \frac{\bar{e}_x}{1} \rightarrow \boxed{e_{x,z} = \bar{e}_x \cdot z}$$

$$\boxed{\frac{\Delta dx}{z} = e_{x,z}}$$

↳ LA RELACION ENTRE LAS DEFORMACIONES ES LINEAL.

• POR LEY DE HOOKE:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{x,z} &= E \cdot e_{x,z} \\ \bar{\sigma}_x &= E \cdot \bar{e}_x \end{aligned} \right\}$$

divido n.a.n →

$$\frac{\bar{\sigma}_{x,z}}{\bar{\sigma}_x} = \frac{E \cdot e_{x,z}}{E \cdot \bar{e}_x} = \frac{e_{x,z}}{\bar{e}_x} \rightarrow$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{x,z}}{\bar{\sigma}_x} = \frac{e_{x,z}}{\bar{e}_x} \rightarrow \boxed{\bar{\sigma}_{x,z} = \bar{\sigma}_x \cdot z}$$

RELACION LINEAL.

02.04.04 -

martes, 28 de septiembre de 2021 11:08

Resolución de ec. de equivalencia (1):

$$N = 0 = \int_A \sigma_x \cdot dA \rightarrow 0 = \int_A \bar{\sigma}_x \cdot z \cdot dA \rightarrow \bar{\sigma}_x = cte. \rightarrow$$

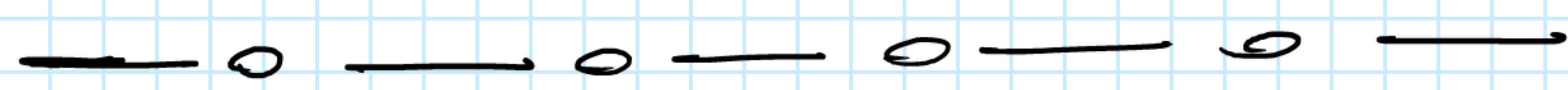
$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x \cdot z$$

$$\rightarrow 0 = \bar{\sigma}_x \cdot \int_A z \cdot dA \rightarrow \boxed{0 = \int_A z \cdot dA}$$

El momento estático del área de la sección respecto al 'EN' es nulo \rightarrow esto ocurre cuando el EN es el eje baricéntrico.

$$\rightarrow \boxed{S_{A,EN} = S_{A,Y} = 0} \rightarrow$$

EN el baricéntrico



6ª ec. de equivalencia:

$$M_z = 0 = \int_A -\sigma_{x,z} \cdot y \cdot dA = \int_A \bar{\sigma}_x \cdot y \cdot z \cdot dA =$$

$$= \bar{\sigma}_x \int_A y \cdot z \cdot dA \rightarrow \boxed{0 = \int_A y \cdot z \cdot dA}$$

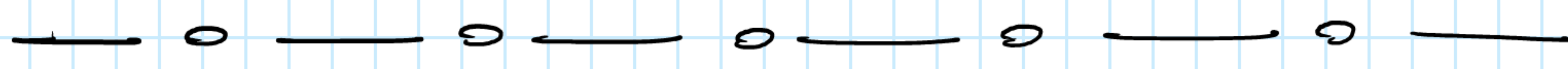
$$I_{LF,EN}^A = I_{y,z}^A = 0. \rightarrow$$

\rightarrow la 'LF' y 'EN' son conjugados de Warburg.

Notas:

- LF \equiv EPIG.
- EN \rightarrow es baricéntrico.
- LF y EN son 'CJ'

\rightarrow el 'EN' es EPIG



5ª ec. de equivalencia:

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA ; M_y = M \cdot \text{sen } \beta ; \sigma_x = \bar{\sigma}_x \cdot z$$

$$M \cdot \text{sen } \beta = \int_A \bar{\sigma}_x \cdot z^2 \cdot dA = \bar{\sigma}_x \cdot \int_A z^2 \cdot dA \rightarrow$$

$I_{EN}^A = I_y^A$

$$\rightarrow M \cdot \text{sen } \beta = \bar{\sigma}_x \cdot I_{EN} = \frac{\sigma_x}{z} \cdot I_{EN} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_x = \frac{M \cdot \text{sen } \beta \cdot z}{I_{EN}} ; \beta = 90^\circ \rightarrow \text{sen } \beta = 1 \rightarrow$$

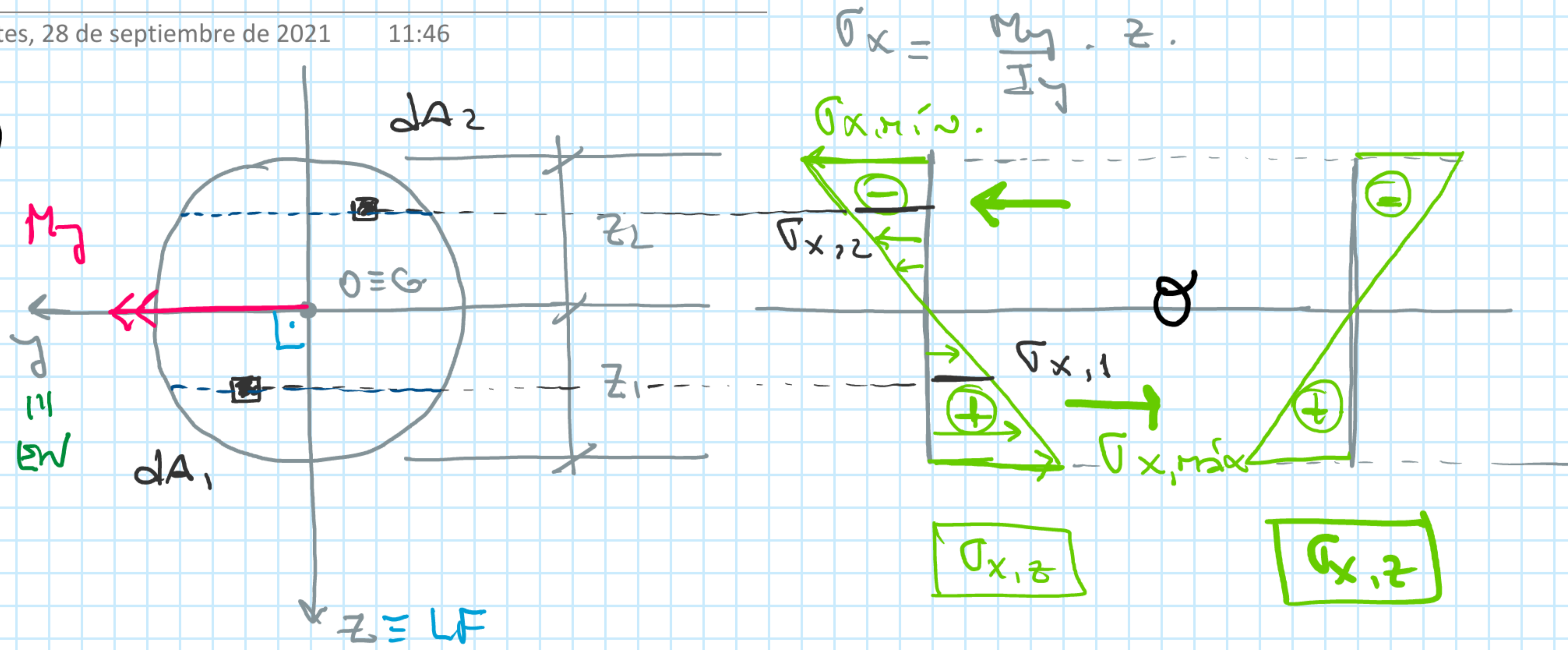
LF y EN son EPIG y son \perp

$$\boxed{\sigma_{x,z} = \frac{M}{I_{EN}} \cdot z}$$

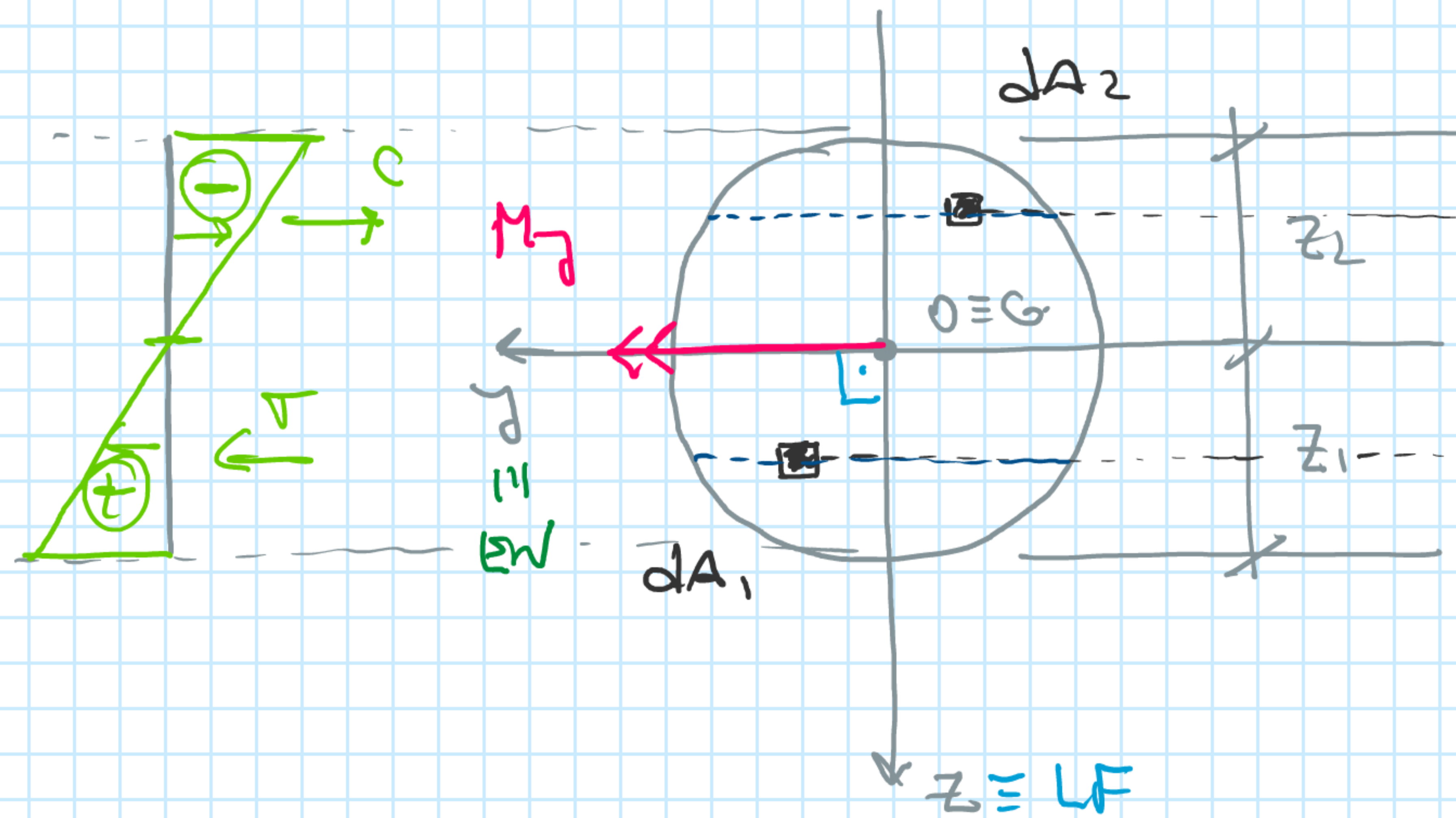
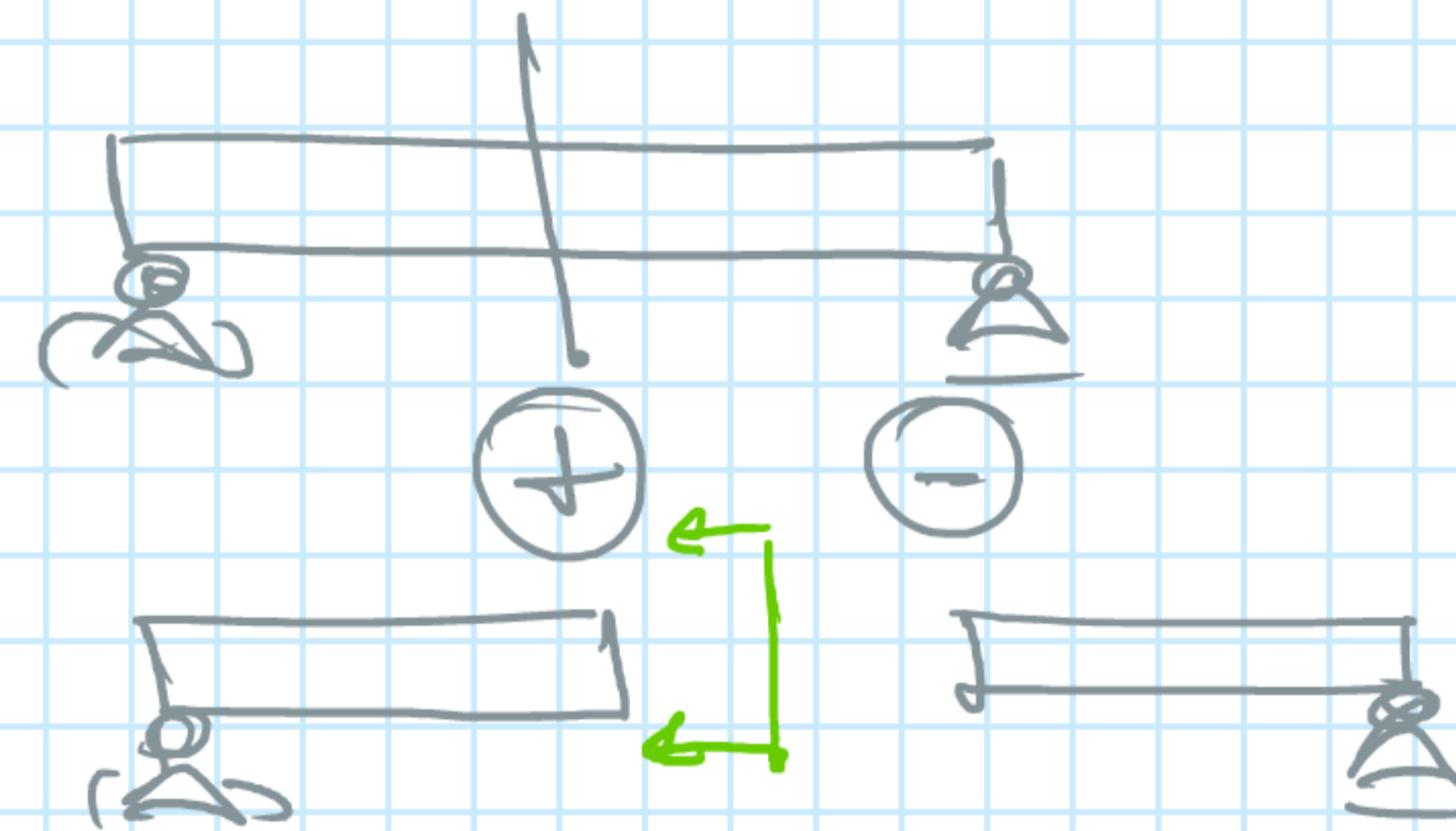
02.04.05 - CONSIDERACIONES:

martes, 28 de septiembre de 2021 11:46

I



$$\sigma_{x,max}^{(+)} = \frac{M_y \cdot z_1}{I_y} ; \quad \sigma_{x,min}^{(-)} = \frac{M_y \cdot z_2}{I_y}$$



II

EN POSICIÓN HABRÁ FIBRAS TRACCIONADAS, Y FIBRAS COMPRESIVAS
 " " " " QUE SE AUMENTAN " QUE SE REDUCEN.

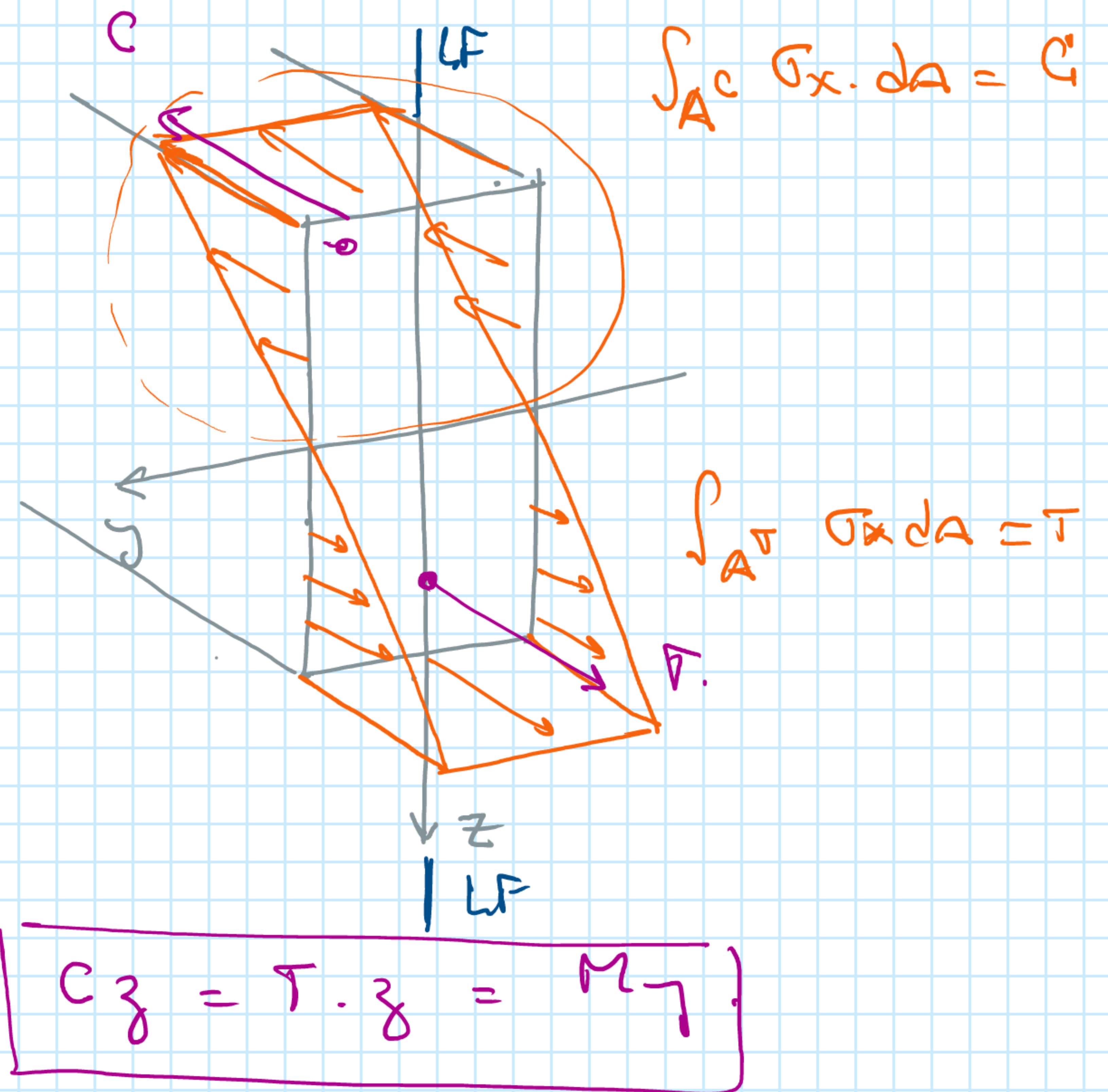
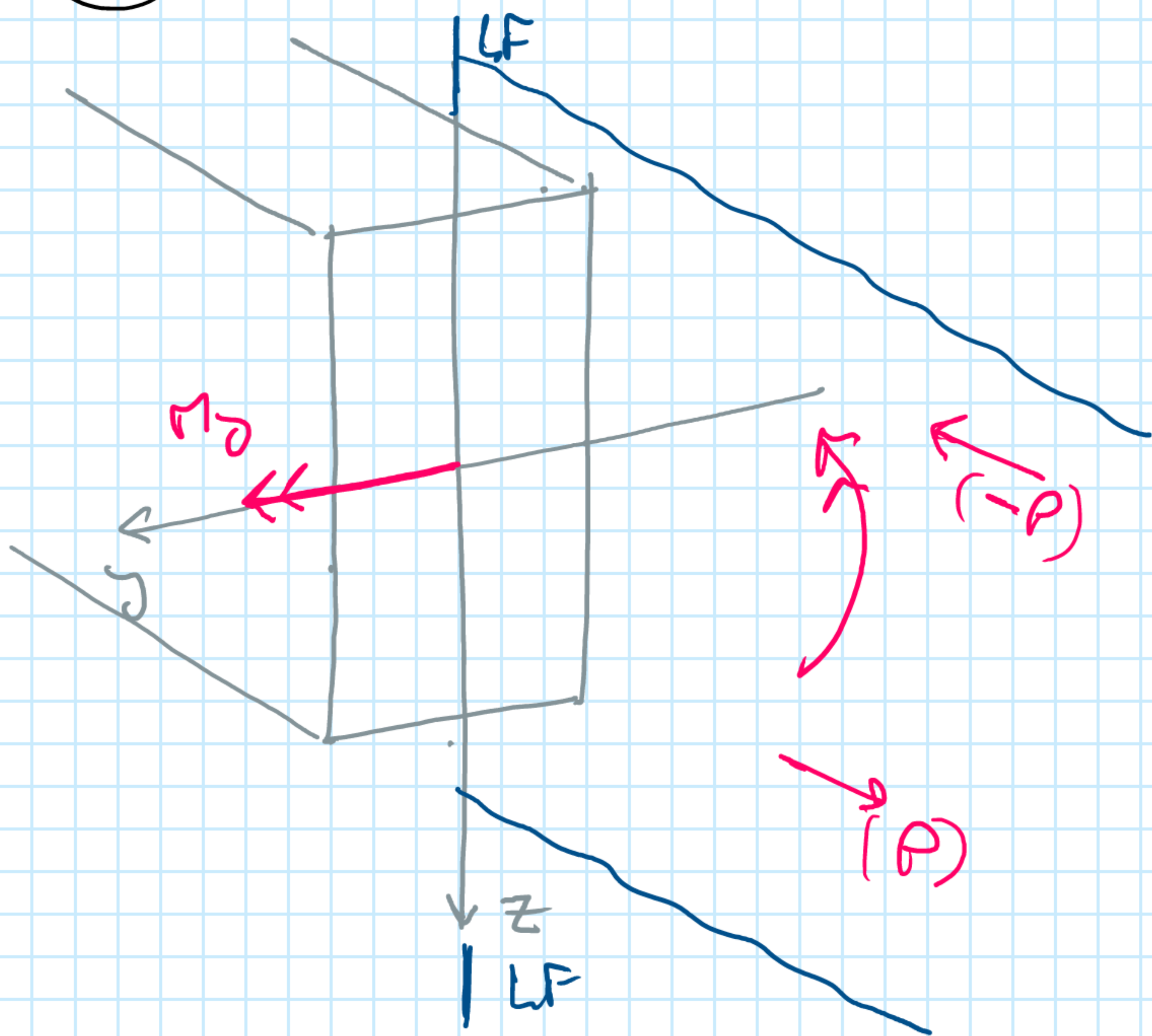
SOBRE LA 'EN' → NO EXISTEN NI ALARGAMIENTOS NI ACORTAMIENTOS →

→ Y LAS TENSIONES SON REVERSAS.

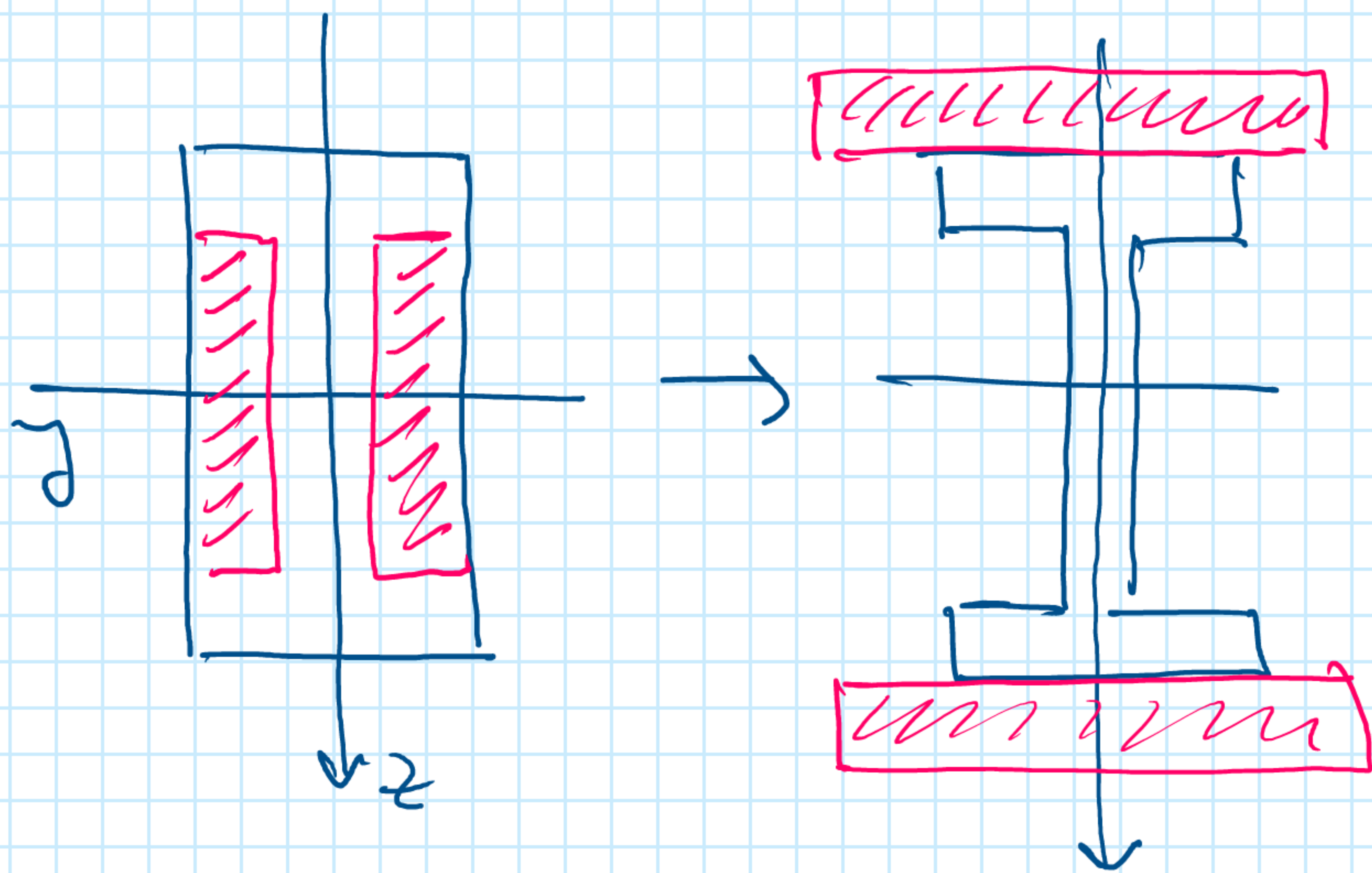
02.04.05 - CONSIDERACIONES:

martes, 28 de septiembre de 2021 11:57

III LEY DE TORSIONES:



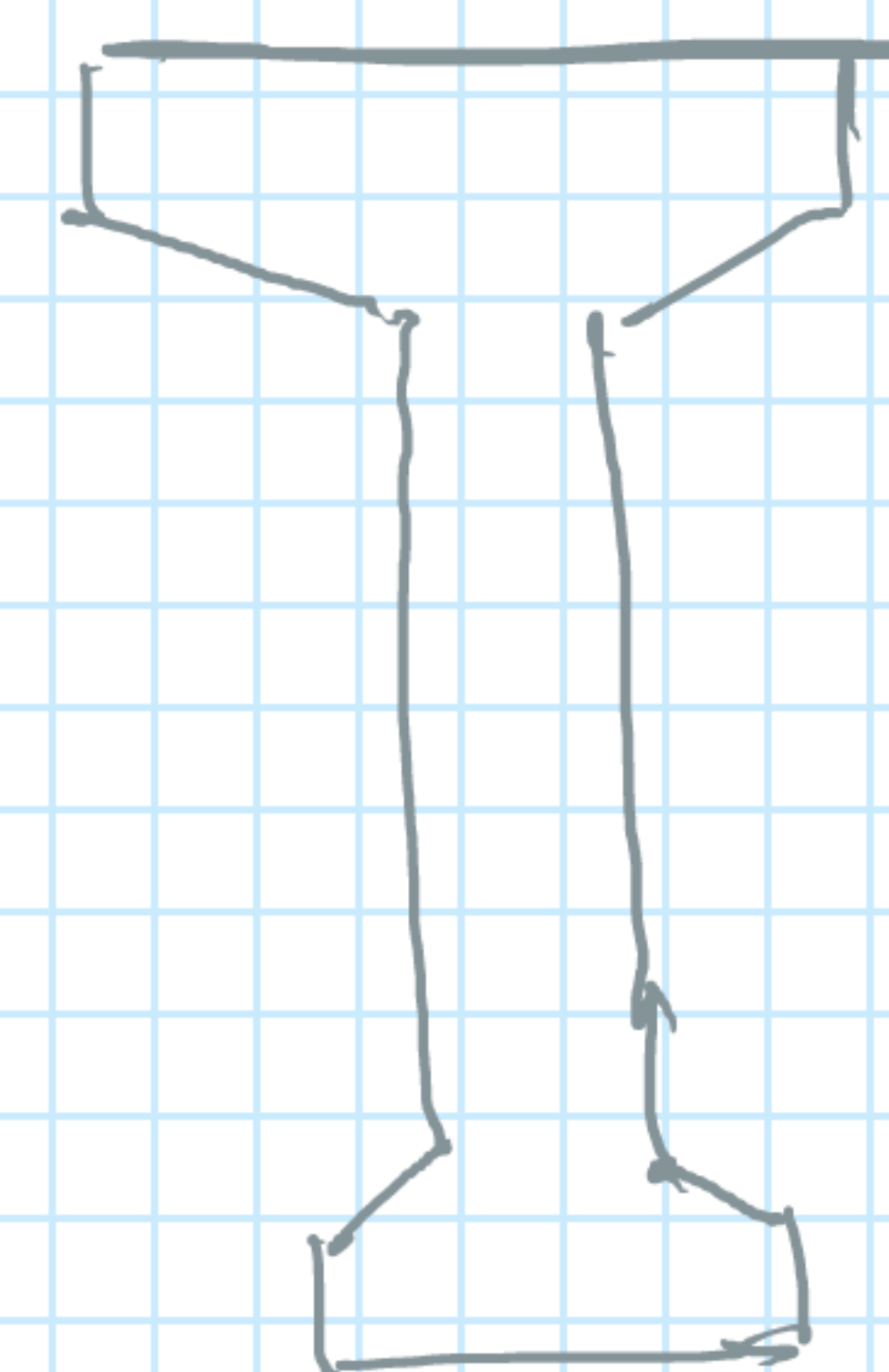
IV APROXIMACIONES DE LA SECCION:



$$\sigma_x = \frac{M_T}{I_T} \cdot z$$

$I_T \uparrow \rightarrow \sigma_x \downarrow \rightarrow z^2$

$z \uparrow \rightarrow \sigma_x \uparrow \rightarrow z^1$



02.04.06 - PROBLEMAS DE LA FLEXIÓN:

martes, 28 de septiembre de 2021 12:12

I) → DE VERIFICACIÓN:

DATOS →

M_y
 I_y → sección.
 material

$$\frac{M_y}{I_y} |z_{\max}| = \sigma_{x, \max} \leq \sigma_{adm}$$

hipótesis: $\sigma_F^{(-)} = \sigma_F^{(+)}$

II) → DE DIMENSIONAMIENTO:

DATOS **INCÓGNITAS**

M_y sección.
 material. I_y

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{\max} \rightarrow$$

$$\left[\frac{I_y}{z_{\max}} \geq \frac{M_y}{\sigma_{adm}} \right]$$

III) → CAPACIDAD ROTANTE:

DATOS:
 material.
 sección →
 → I_y, z

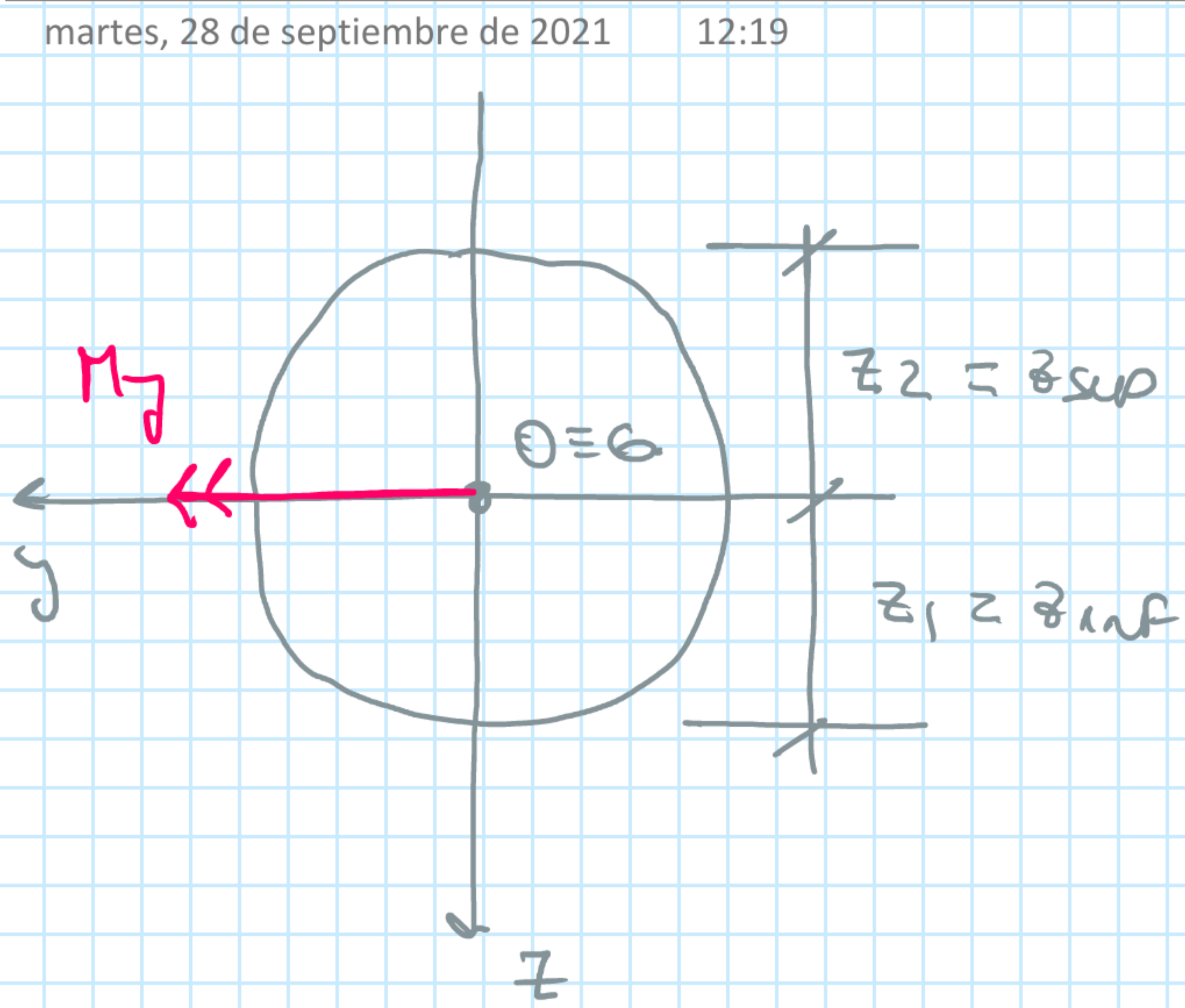
INCÓGNITA:
 $M_{y, adm}$

$$M_{y, adm} = \sigma_{adm} \cdot \frac{I_y}{z_{\max}}$$

↓
 las cosas

02.04.07 - MÓDULO O MOMENTO RESISTENTE:

martes, 28 de septiembre de 2021 12:19

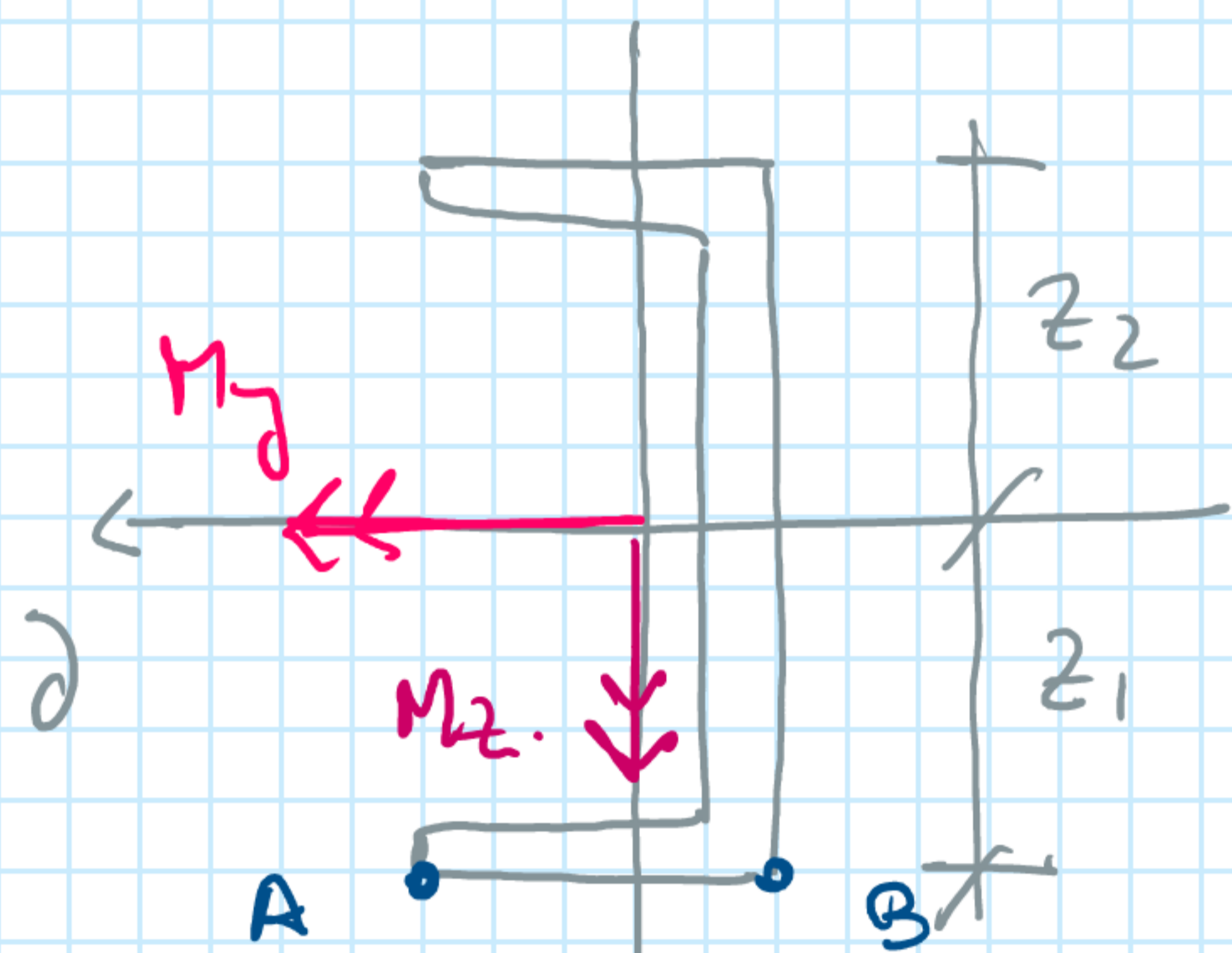


$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{x,z_1} &= \frac{M}{I_y} \cdot z_1 > 0 \\ \sigma_{x,z_2} &= \frac{M}{I_y} \cdot z_2 < 0 \end{aligned} \right.$$

$$\sigma_{x,z_1} = \frac{M}{I_y} \cdot z_1 = S_{y,1} \cdot \sigma_{y,1}$$

$$\sigma_{x,z_2} = \frac{M}{I_y} \cdot z_2 = S_{y,2} \cdot \sigma_{y,2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} S_{y,1} &= S_{y,inf} = W_{y,1} = W_{y,inf} \\ S_{y,2} &= S_{y,sup} = W_{y,2} = W_{y,sup} \end{aligned} \right.$$



$$z_1 = z_2 \rightarrow S_{y,1} = S_{y,2} = S_y = W_y$$

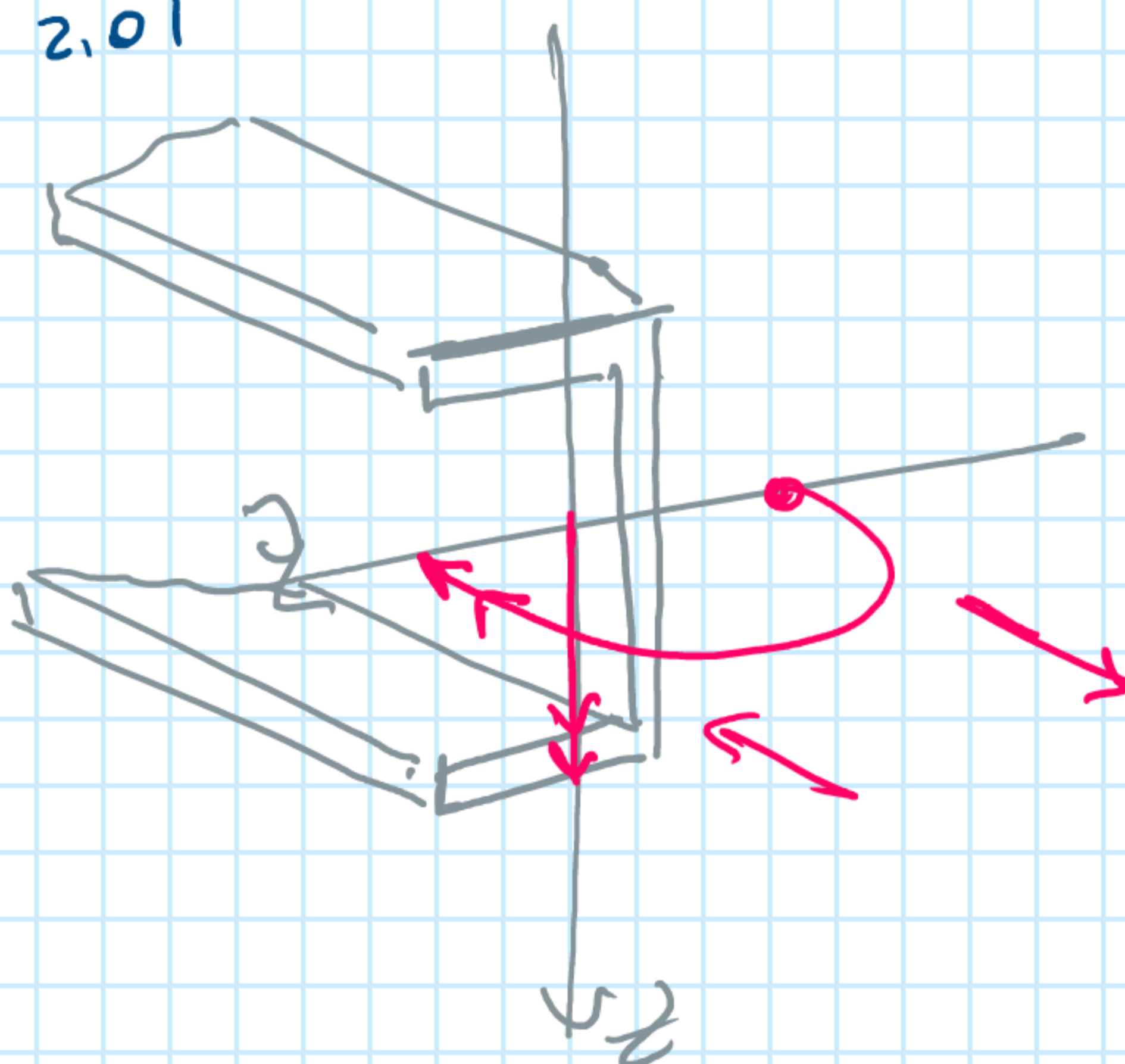
$$y_1 \neq y_2 \rightarrow S_{z,1} \neq S_{z,2}$$

$$\sigma_{x,Mz}^A = - \frac{M_z}{I_z} \cdot y_1 = - \frac{M_z}{I_z/y_1} = - \frac{M_z}{S_{z1}}$$

$$\sigma_{x,Mz}^B = - \frac{M_z}{I_z} \cdot y_2 = - \frac{M_z}{I_z/y_2} = - \frac{M_z}{S_{z2}}$$

$$S_{z1} < S_{z2} \rightarrow \sigma_{x,A} > \sigma_{x,B}$$

$7,5 - 2,01 = 5,49$
 $y_1 = 5,49$
 $y_2 = 2,01$



UPN 200

$$I_x = 1910 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 148 \text{ cm}^4$$

$$h = 200 \text{ mm}$$

$$bf = 75 \text{ mm}$$

$$S_x = 191 \text{ cm}^3 \checkmark$$

$$e_y = 2,01 \text{ cm}$$

$$S_y = 27 \text{ cm}^3$$

$$S_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{1910}{200/2} = 191 \text{ cm}^3$$

$$S_{y_1} = \frac{148}{5,49} = 26,96 \text{ cm}^3$$

$$S_{y_2} = \frac{148}{2,01} = 73,63 \text{ cm}^3$$

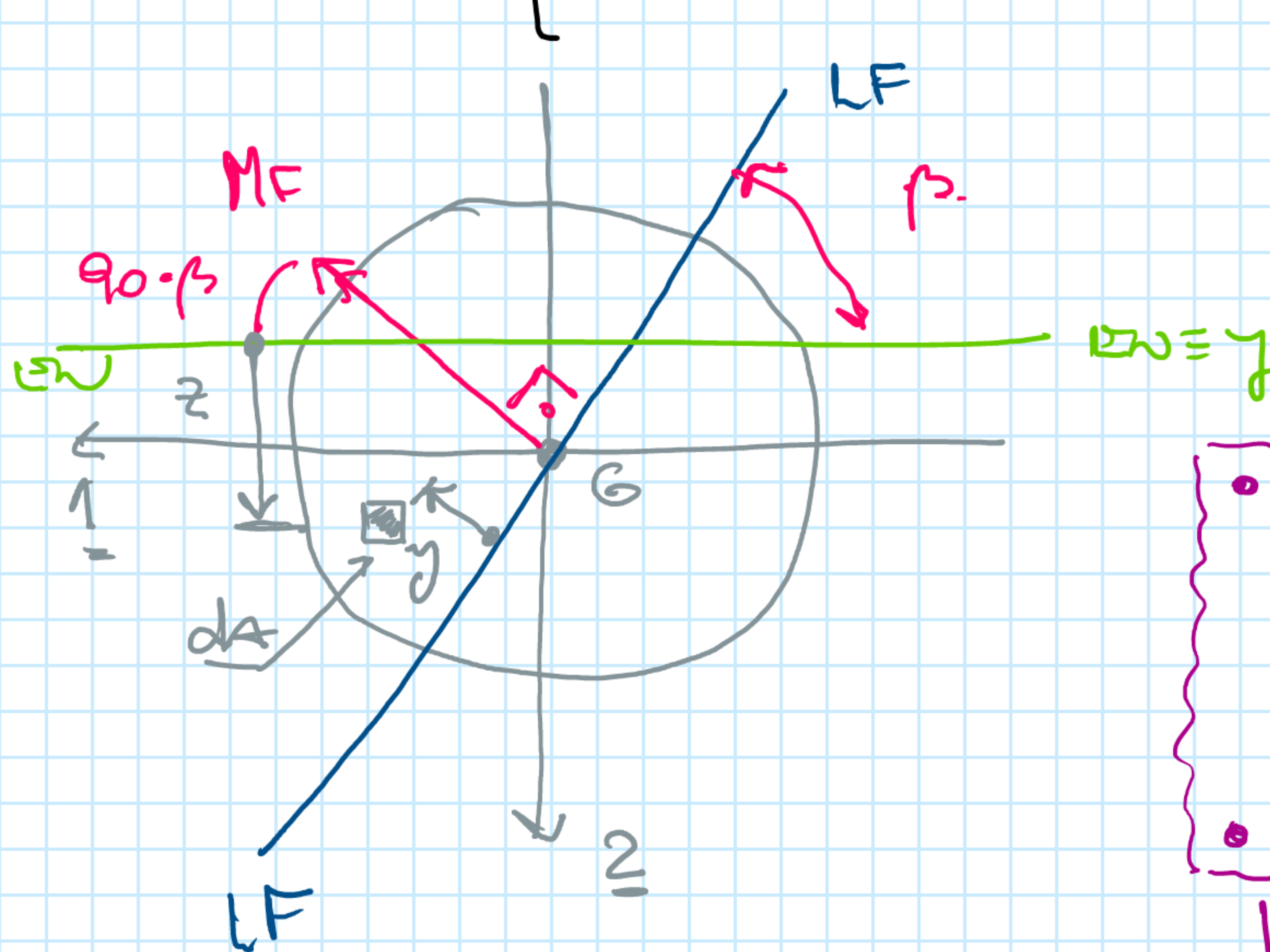
02.05 - FLEXIÓN SIMPLE OBLICUA - 02.05.01 - ESQUEMAS:

martes, 28 de septiembre de 2021 12:38

FSO

simple $\rightarrow \sigma = 0$.

oblicua $\rightarrow LF \neq LPIC$.



$$\beta = LF, EN$$

$dA \rightarrow y$: hasta la LF
 z : " en EN.

- EN UN PROBLEMA DE FSO \rightarrow
- \rightarrow SE VERIFICA LA HIPÓTESIS DE BERNOLLI - NAVIER \rightarrow HBA \rightarrow
- \rightarrow COMPROBACIÓN DE TIPO EXPERIMENTAL

\rightarrow LAS DEFORMACIONES Y LAS TENSIONES \rightarrow
 \rightarrow SITUAR UNA RELACIÓN LINEAL.

02.05.02 - ECUACIONES DE EQUIVALENCIA:

martes, 28 de septiembre de 2021 12:47

el análisis de 2º, 3º y 4º → idem → FSPR

1º) ec. de equivalencias:

$$N = 0 = \int_A \sigma_x dA = \int_A \bar{\sigma}_x \cdot z \cdot dA = \bar{\sigma}_x \int_A z \cdot dA = \int_A z dA$$

→ $0 = \int_A z \cdot dA$ S_{EW}^A → EN ES BARI-CÉNTRICO.

5º) ec. de equivalencias: Lado al EN $\equiv \gamma$ → TORO ROTANDO

respecto del eje 'y' o 'EN'

$$M_y = M \cdot \cos(90^\circ - \beta) = M \cdot \sin \beta = \int_A \sigma_{x,z} \cdot z \cdot dA = \int_A \bar{\sigma}_x \cdot z^2 dA$$

$$M_y = M \cdot \sin \beta = \bar{\sigma}_x \underbrace{\int_A z^2 dA}_{I_{EW}} = \bar{\sigma}_x \cdot I_{EW} = \frac{\bar{\sigma}_x \cdot z}{z} \cdot I_{EW}$$

$\bar{\sigma}_{x,z} = \frac{M \cdot \sin \beta \cdot z}{I_{EW}}$ ←

6º) ec. de equivalencias: LF $\equiv z$ → tomar el momento respecto de la 'LF'

$$0 = \int_A \sigma_{x,z} \cdot \gamma \cdot dA = \int_A \bar{\sigma}_x \cdot \gamma \cdot z \cdot dA = \bar{\sigma}_x \int_A \gamma \cdot z \cdot dA$$

$0 = \int_A \gamma \cdot z \cdot dA$ → $\underbrace{I_{LF,EW}^A}_{=0} = 0$ → LF y EN son concaracteres de inercia.

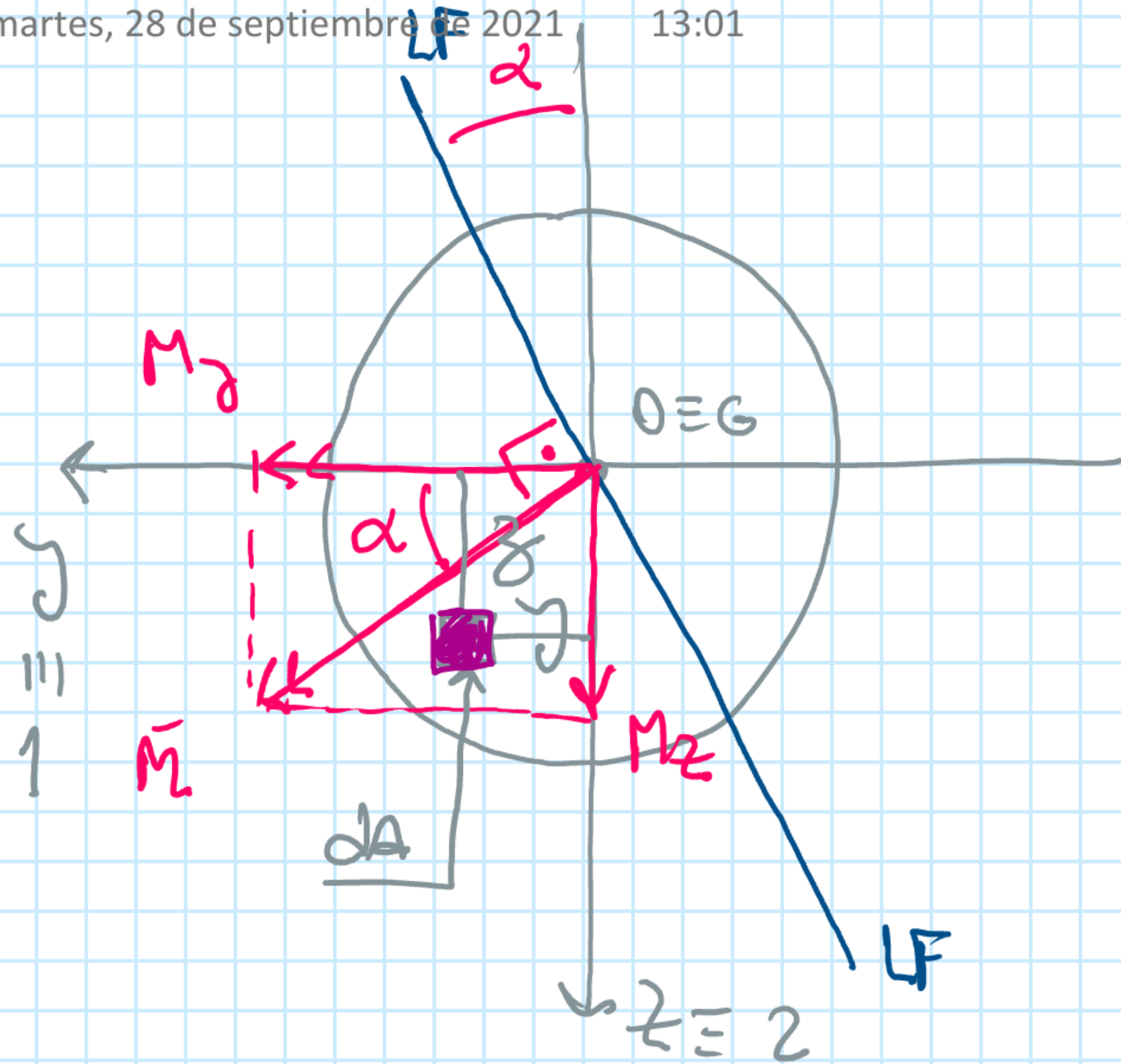
FLEXIÓN SIMPLE

	RECTA	OBLICUA.
LF.	EPIC	NO ES EPIC.
EN	ES BARI-CÉNTRICA	ES BARI-CÉNTRICA.
LF, EN	Son CS → Son EPIC	Son CS → NO SON EPIC.

02.05.03 - DESCOMPOSICIÓN DE LA FLEXIÓN OBLICUA EN 2 FLEXIONES RECTAS:

Ejes 'y' y 'z' son P.D.G.

martes, 28 de septiembre de 2021 13:01



$LF \rightarrow \neq P.D.G. \rightarrow F. OBLICUA.$

$$\begin{cases} M_y = M \cdot \cos \alpha \\ M_z = M \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

$$\bar{M} = \bar{M}_y + \bar{M}_z$$

$$\begin{cases} \bar{M}_y \equiv \bar{M}_1 \rightarrow LF \equiv z \equiv 2 \rightarrow EN \equiv y \equiv 1 \\ \bar{M}_z \equiv \bar{M}_2 \rightarrow LF \equiv y \equiv 1 \rightarrow EN \equiv z \equiv 2 \end{cases}$$

$$\sigma_{x, \forall \theta \gamma} = \sigma_{x, \bar{M}} = \sigma_{x, M_y} + \sigma_{x, M_z}$$

$$\sigma_{x, \forall \theta \gamma} = \begin{matrix} \oplus & \oplus & \oplus & \oplus \\ \oplus & \oplus & \oplus & \oplus \\ \oplus & \oplus & \oplus & \oplus \\ \oplus & \oplus & \oplus & \oplus \end{matrix} \cdot \begin{matrix} M_y \\ H_y \\ H_z \\ H_z \end{matrix} \cdot \begin{matrix} z \\ - \\ z \\ - \end{matrix} - \begin{matrix} \oplus & \oplus \\ \oplus & \oplus \\ \oplus & \oplus \\ \oplus & \oplus \end{matrix} \cdot \begin{matrix} M_z \\ H_z \\ H_y \\ H_y \end{matrix} \cdot \begin{matrix} - \\ z \\ - \\ z \end{matrix}$$

$$\sigma_{x, \forall \theta \gamma} = \frac{M_y}{H_y} \cdot z - \frac{M_z}{H_z} \cdot z$$