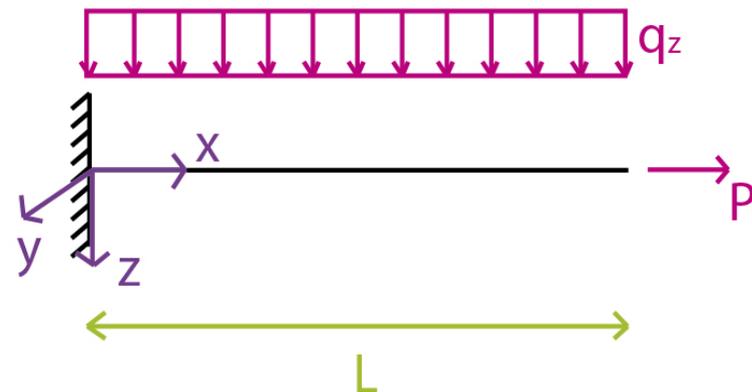
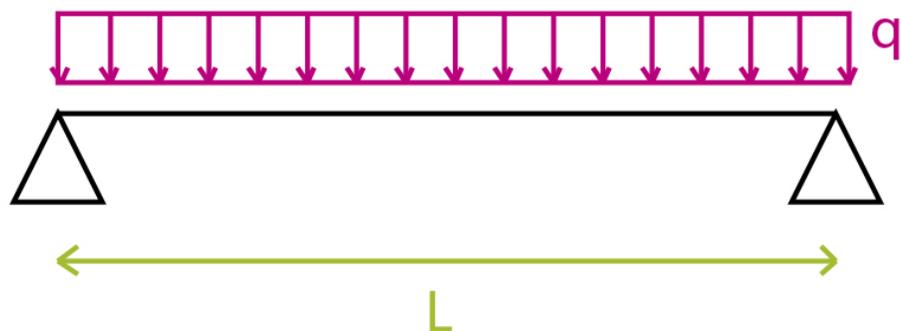




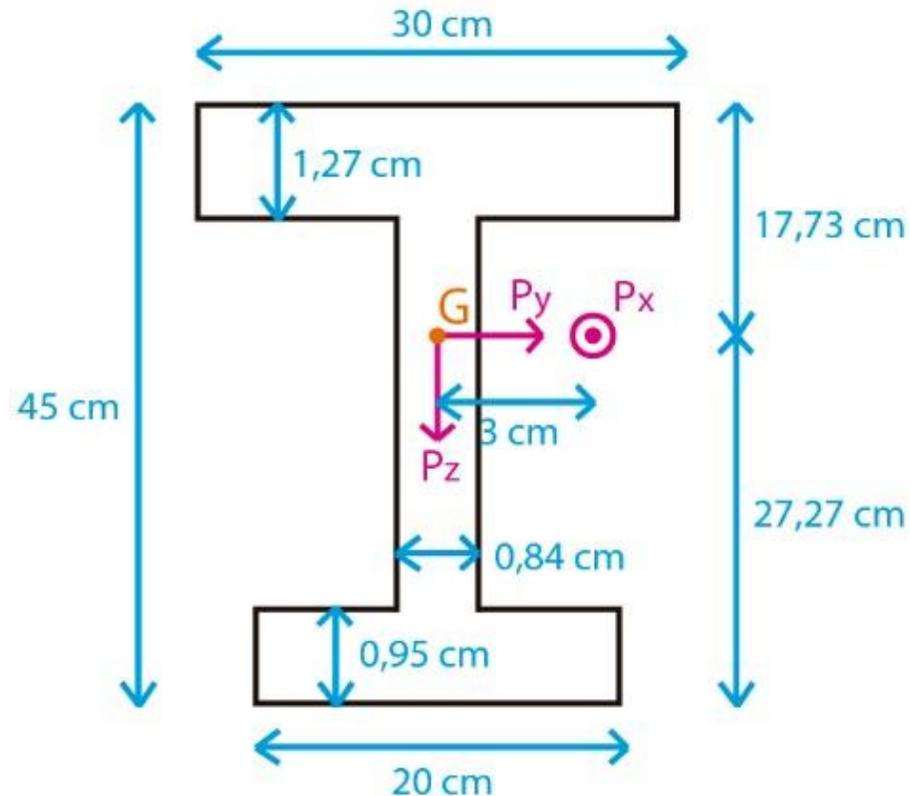
Solicitud por Flexión en Régimen Elástico



Catalina Urtenecche – Clara Zaccaria
Augusto La Colla – Marcos Spinella



Ejercicio 1: Determinar el núcleo central de la sección

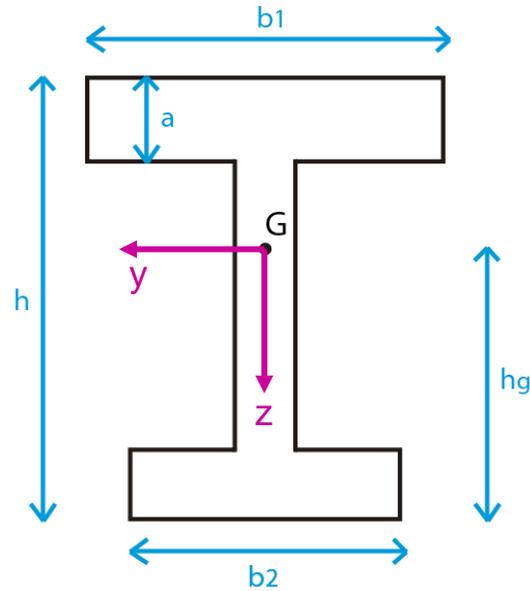


Datos del perfil:

- $J_y = 29679,13 \text{ cm}^4$
- $J_z = 3493,41 \text{ cm}^4$
- $A = 84,31 \text{ cm}^2$
- $W_y^{SUP} = 1670,4 \text{ cm}^3$
- $W_y^{INF} = 1086,21 \text{ cm}^3$
- $W_z = 232,9 \text{ cm}^3$



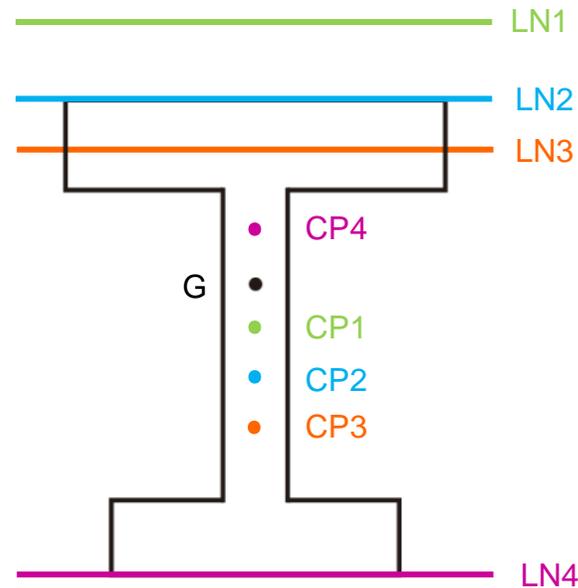
Núcleo central



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} - \frac{M_z \cdot y}{J_z} = 0 \rightarrow \frac{1}{A} + \frac{e_z^{cp} \cdot z}{J_y} + \frac{e_y^{cp} \cdot y}{J_z} = 0$$

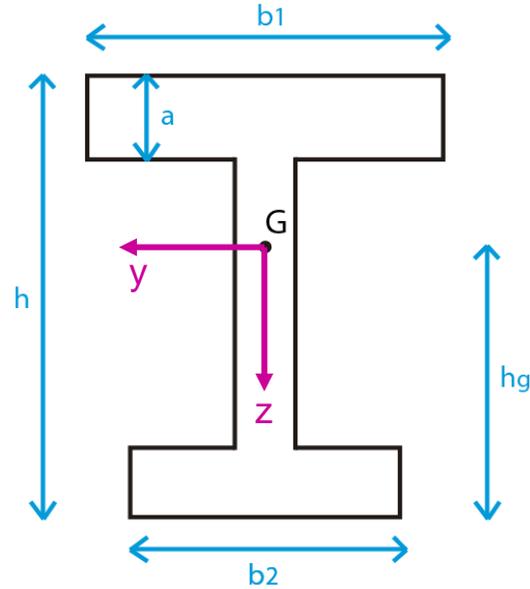
Si el centro de presión pertenece al eje $z \rightarrow e_y^{cp} = 0$

$$z = -\frac{J_y}{A \cdot e_z^{cp}}$$





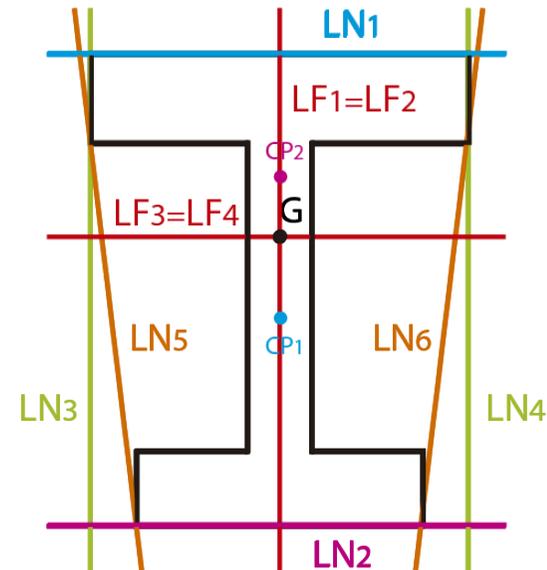
Núcleo central



Para hallar el núcleo central, sólo será necesario hallar los vértices de este. Para esto tenemos que ubicar las líneas neutras tangentes al contorno de la sección.

La LF_i es un eje conjugado de inercia de la LN_i y pasa por el baricentro. Además, el CP_i se encontrará sobre su LF_i .

Como LN_1 , LN_2 , LN_3 y LN_4 son paralelas a los ejes principales, las líneas de fuerza asociadas serán ortogonales a ellas.





Recordemos la ecuación de la línea neutra en función de la excentricidad del centro de presión:

$$\frac{1}{A} + \frac{e_z^{cp} \cdot z}{J_y} + \frac{e_y^{cp} \cdot y}{J_z} = 0$$

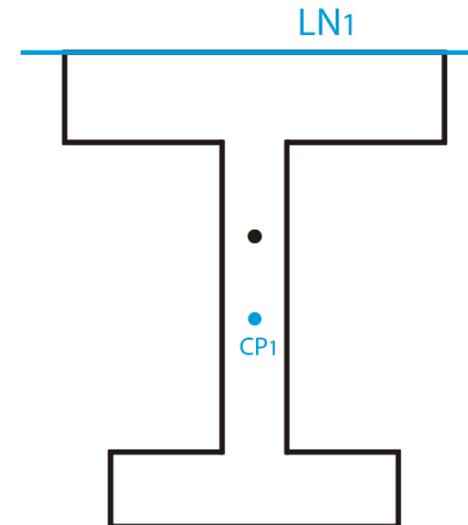
¡Observación!

El núcleo central NO depende de la carga, sólo de la geometría de la sección.

1) $CP_1 \left\{ \begin{array}{l} e_y^1 = 0 \rightarrow \text{Lo sabemos ya que conocemos la ubicación de la } LF_1 \\ z_1 = -(h - h_G) = h_G - h \end{array} \right.$

$$\frac{1}{A} + \frac{e_z^1}{J_y} \cdot (h_G - h) = 0 \Rightarrow e_z^1 = -\frac{J_y}{A \cdot (h_G - h)}$$

$$CP_1 = \left(0; -\frac{J_y}{A \cdot (h_G - h)} \right)$$





$$2) CP_2 \begin{cases} e_y^2 = 0 \rightarrow \text{Porque } LF_1 \equiv LF_2 \\ z_2 = h_G \end{cases}$$

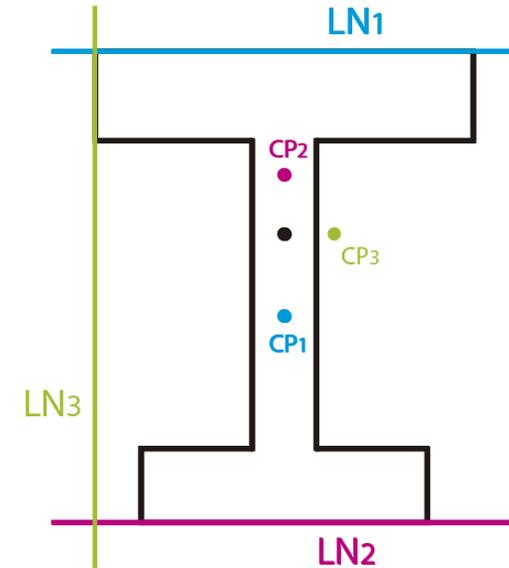
$$\frac{1}{A} + \frac{e_z^2}{J_y} \cdot h_G = 0 \Rightarrow e_z^2 = -\frac{J_y}{A \cdot h_G}$$

$$CP_2 = \left(0; -\frac{J_y}{A \cdot h_G} \right)$$

$$3) CP_3 \begin{cases} e_z^3 = 0 \rightarrow \text{Lo sabemos ya que conocemos} \\ y_3 = b_1/2 \end{cases} \text{ la ubicación de la } LF_3$$

$$\frac{1}{A} + \frac{e_y^3}{J_z} \cdot \frac{b_1}{2} = 0 \Rightarrow e_y^3 = -\frac{J_z}{A \cdot b_1/2}$$

$$CP_3 = \left(-\frac{J_z}{A \cdot b_1/2}; 0 \right)$$





$$4) CP_4 \begin{cases} e_z^4 = 0 \rightarrow \text{Porque } LF_3 \equiv LF_4 \\ y_4 = -b_1/2 \end{cases}$$

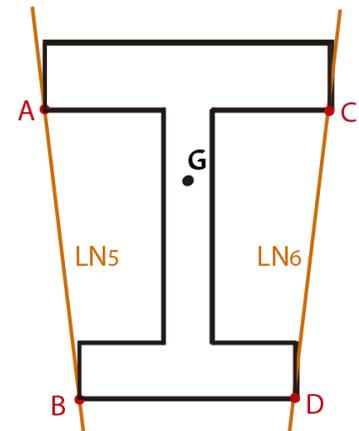
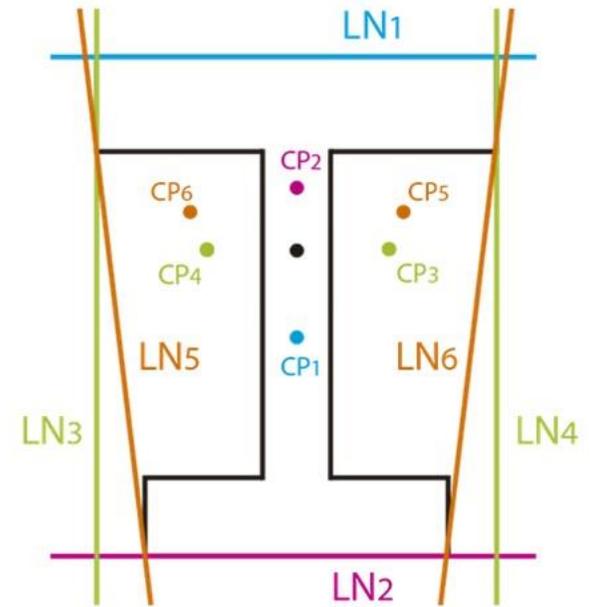
$$\frac{1}{A} + \frac{e_y^4}{J_z} \cdot \left(-\frac{b_1}{2}\right) = 0 \Rightarrow e_y^4 = \frac{J_z}{A \cdot b_1/2}$$

$$CP_4 = \left(\frac{J_z}{A \cdot b_1/2}; 0 \right)$$

5) CP_5 → Como no es sencillo conocer alguna de las coordenadas de cada CP , debemos resolver un sistema de 2×2 para cada uno, reemplazando las coordenadas de dos puntos conocidos por los que pasa su respectiva LN en la ecuación.
 6) CP_6

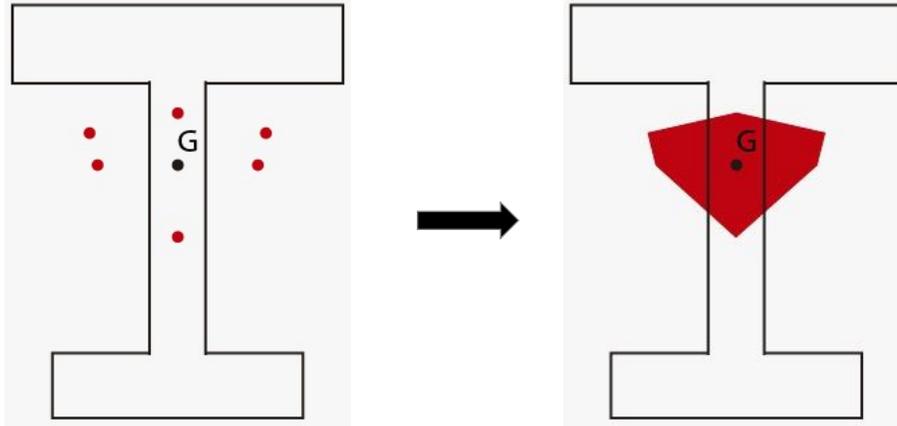
$$A = \left(\frac{b_1}{2}; -(h - h_G - a) \right) \quad B = \left(\frac{b_2}{2}; h_G \right)$$

$$C = \left(-\frac{b_1}{2}; -(h - h_G - a) \right) \quad D = \left(-\frac{b_2}{2}; h_G \right)$$





Las infinitas líneas que pivotean respecto a los vértices generan los infinitos puntos entre los vértices del núcleo central.



El núcleo central es el área definida por los puntos que, tomados como centro de presión, originan tensiones de un mismo signo en la sección.

¡Observación!

El baricentro siempre debe estar contenido dentro del núcleo central.



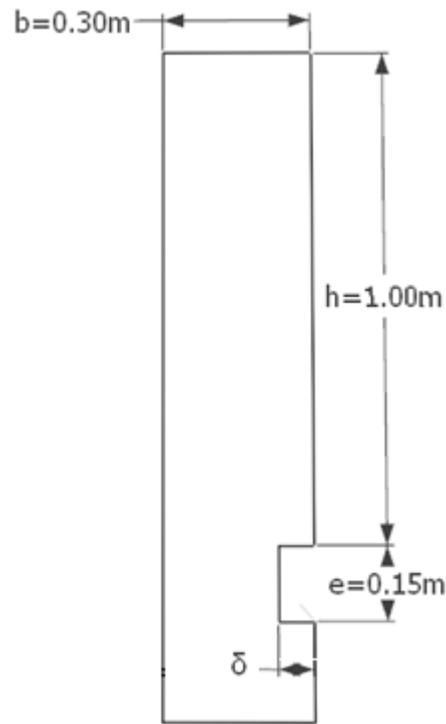
Recordemos que cuando $e = 0 \Rightarrow LN \rightarrow \infty$ y estaremos ante una sollicitación axial pura, por lo tanto, tendremos tensiones de un solo signo.

¿Por que?

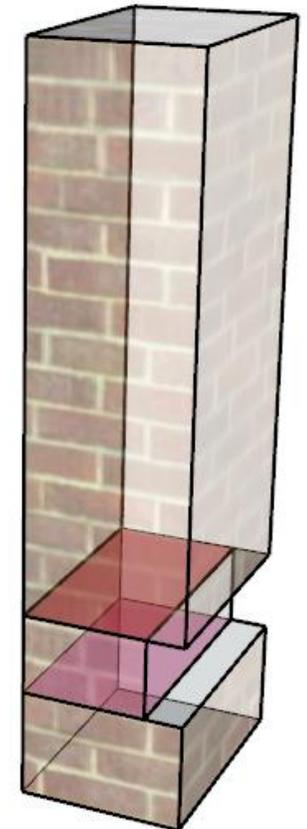
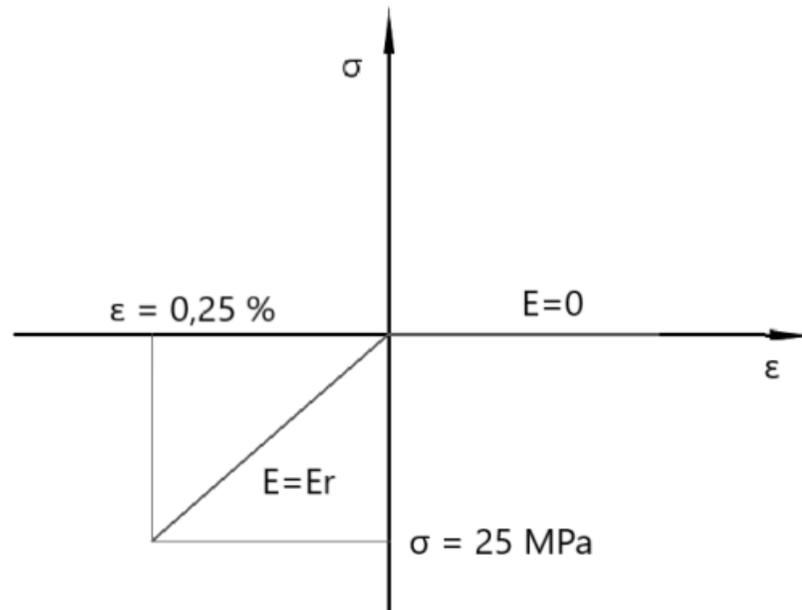


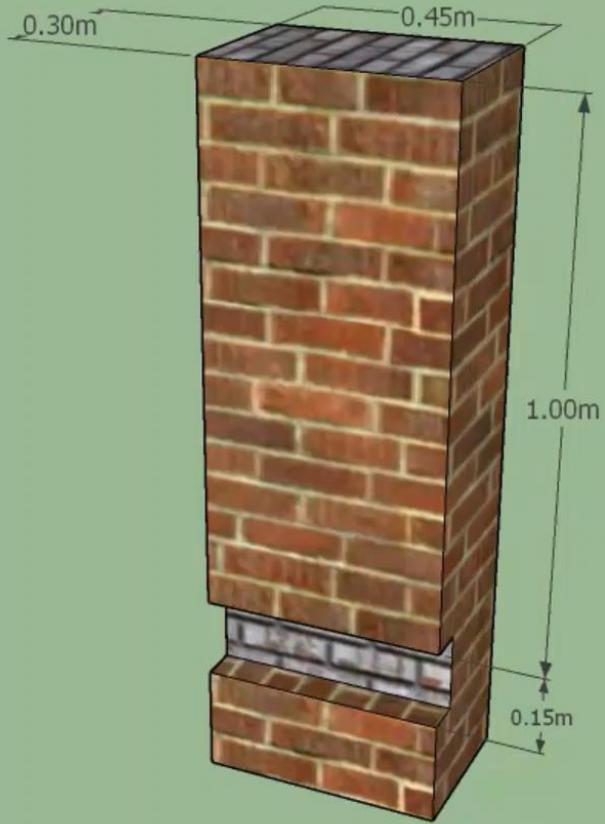
Ejercicio 2: Para el pilar de mampostería indicado, hallar la máxima caladura ($\delta_{\text{máx}}$) que puede practicarse:

- a) Para que las deformaciones sean de un solo signo (toda la sección comprimida)
- b) Para que la tensión no supere la admisible



Vista Lateral







Datos Geométricos:

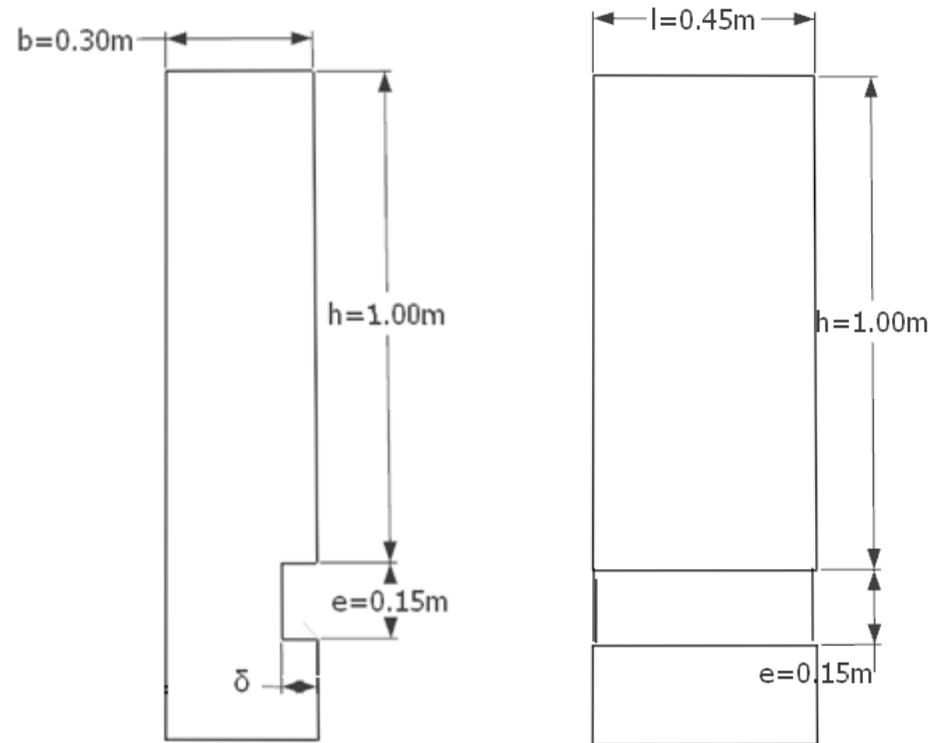
$$l = 0,45 \text{ m}$$

$$b = 0,30 \text{ m}$$

$$h = 1,00 \text{ m}$$

$$e = 0,15 \text{ m}$$

$$\delta = \text{Caladura}$$



Vista Lateral

Vista Frontal



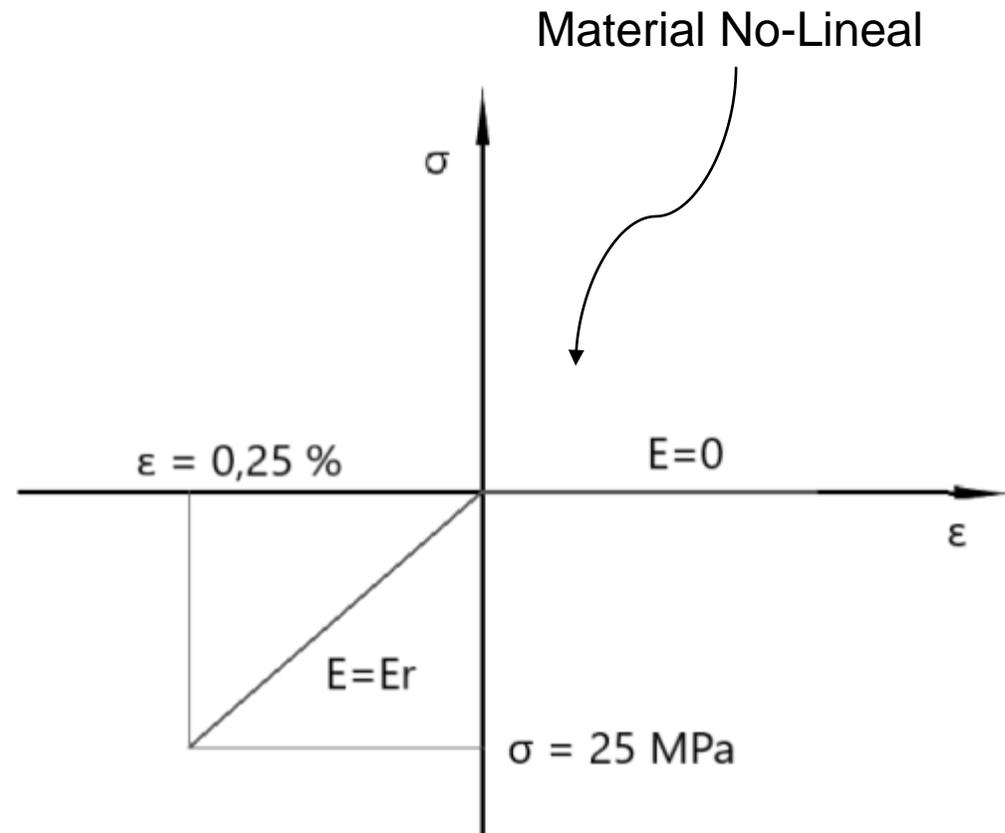
Datos del Material:

$$\gamma_M = 20 \text{ kN/m}^3$$

$$\sigma_c = 25 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_c = 0,25 \%$$

*La mampostería
(comúnmente de
ladrillo), soporta
compresión pero
no tracción*

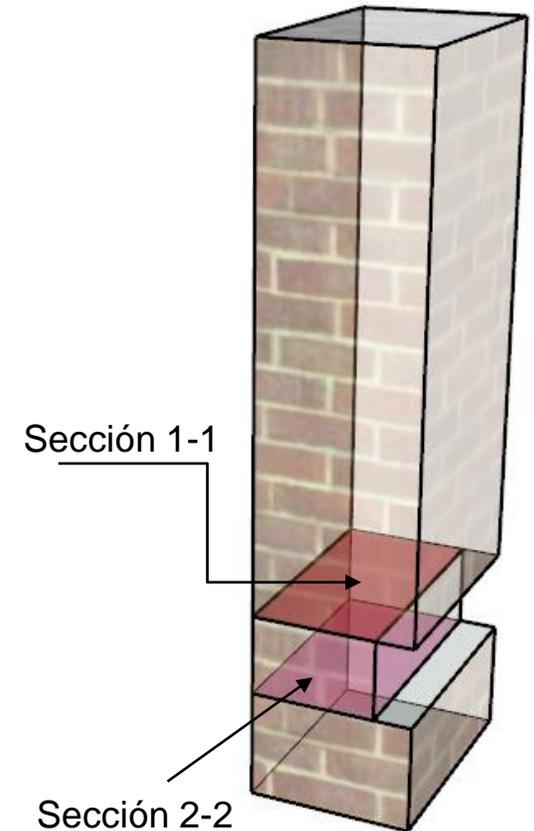
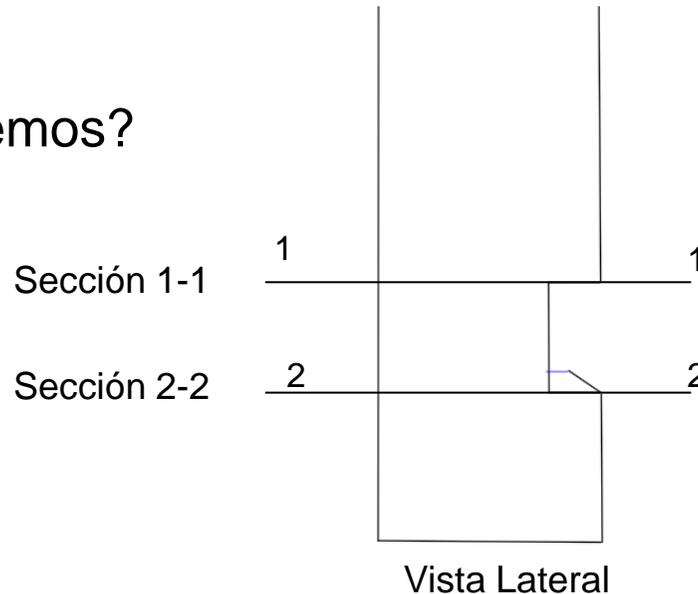




Enunciado: Para el pilar de mampostería indicado, hallar la máxima caladura ($\delta_{\text{máx}}$) que puede practicarse:

- a) Para que las deformaciones sean de un solo signo (toda la sección comprimida)
- b) Para que la tensión no supere la admisible

¿Dónde analizaremos?





a) Para que las **deformaciones** sean de un solo signo (toda la sección comprimida)

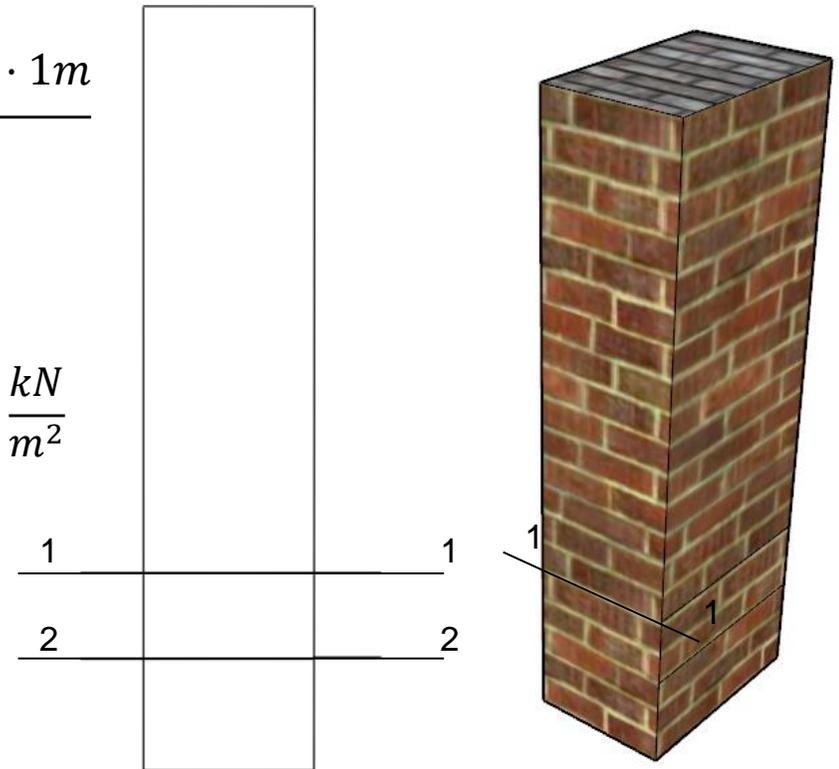
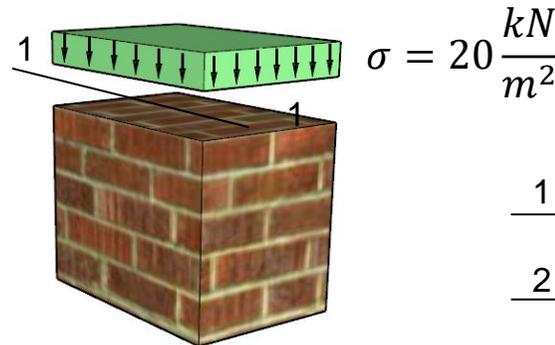
¿Qué pasa a medida que aumento la caladura?

¿Como sería si $\delta = 0$?

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-\gamma \cdot b \cdot l \cdot h}{b \cdot l} = -\frac{20 \frac{kN}{m^3} \cdot 0,3m \cdot 0,45m \cdot 1m}{0,3m \cdot 0,45m}$$

$$\sigma = -20 \frac{kN}{m^2} = -0,02 MPa$$

Todos los puntos de la sección 1-1 están sometidos a esta tensión de compresión.

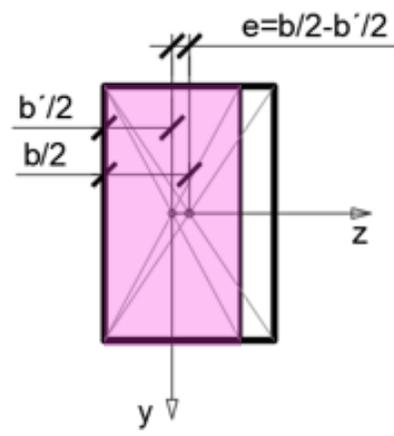
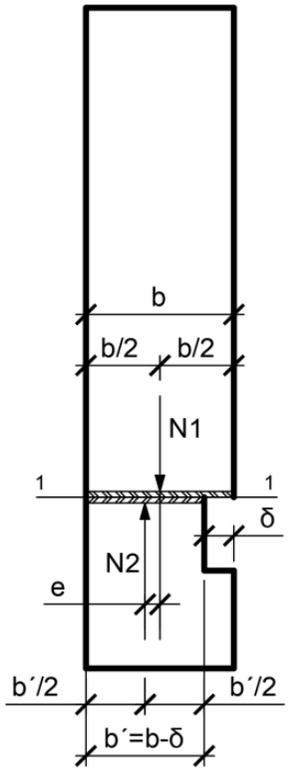


Vista Lateral



¿Como sería si $\delta > 0$?

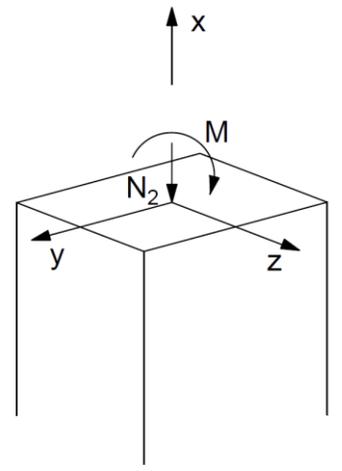
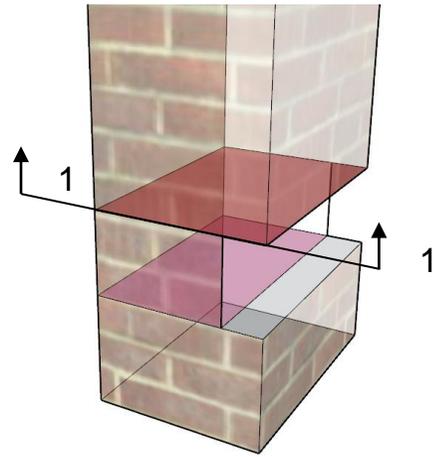
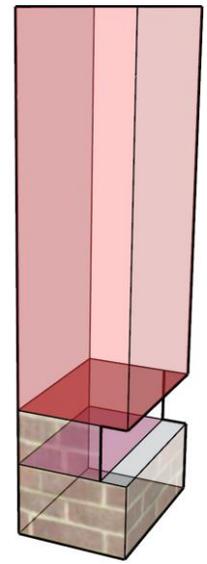
Analizamos los esfuerzos en la Sección 1-1



$$\sigma_{N1} = \frac{N}{A1} = \frac{y^* b' h}{(b' h)}$$

$$\sigma_{M1} = \frac{M z}{Jy1} = \frac{N e z}{Jy1}$$

$$\sigma_{T1} = \sigma_{N1} + \sigma_{M1}$$





Si $\delta > 0$

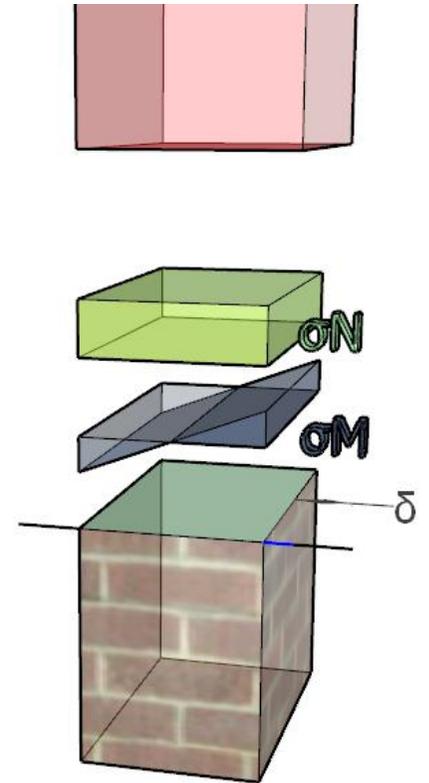
$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_N &= \frac{N}{A} = \frac{-\gamma \cdot b \cdot l \cdot h}{b' \cdot l} = -\frac{\gamma \cdot b \cdot \chi \cdot h}{(b - \delta) \cdot \chi} \\ \sigma_M &= \frac{M_y}{J_y} \cdot z = \frac{N \cdot e}{\frac{b'^3 \cdot l}{12}} \cdot y = -\frac{\gamma \cdot b \cdot \chi \cdot h \cdot e}{(b - \delta)^3 \cdot \chi} \cdot z \end{aligned} \right.$$

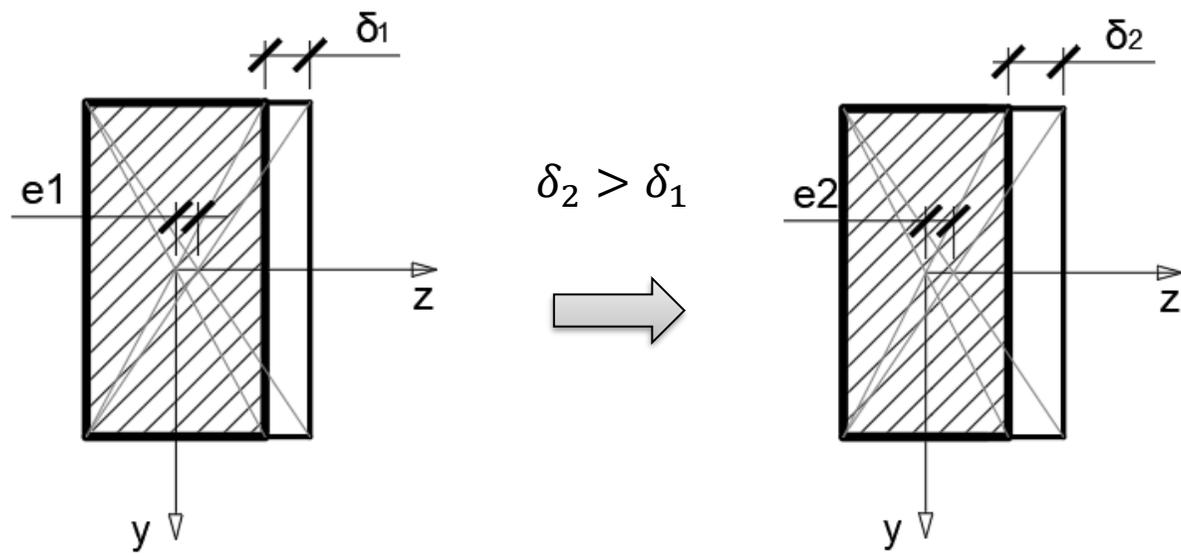
$$\sigma_{Xtot} = \sigma_N + \sigma_M = -\frac{\gamma \cdot b \cdot h}{(b - \delta)} - \frac{12 \cdot \gamma \cdot b \cdot h \cdot e}{(b - \delta)^3} \cdot z \quad \textcircled{1}$$

$$\sigma_{Xtot} = f(\delta)$$

$$\sigma_{XtotMAX(-)} = \sigma_N + \sigma_M = -\frac{\gamma \cdot b \cdot h}{(b - \delta)} - \frac{12 \cdot \gamma \cdot b \cdot h \cdot e}{(b - \delta)^3} \cdot \left(\frac{b - \delta}{2}\right) \quad \textcircled{2}$$

$$\sigma_{XtotMAX(+)} = \sigma_N + \sigma_M = -\frac{\gamma \cdot b \cdot h}{(b - \delta)} + \frac{12 \cdot \gamma \cdot b \cdot h \cdot e}{(b - \delta)^3} \cdot \left(\frac{b - \delta}{2}\right) \quad \textcircled{3}$$





$$\sigma_{N1} = \frac{N}{A1} = \frac{y^*b^*l^*h}{(b^*l)}$$

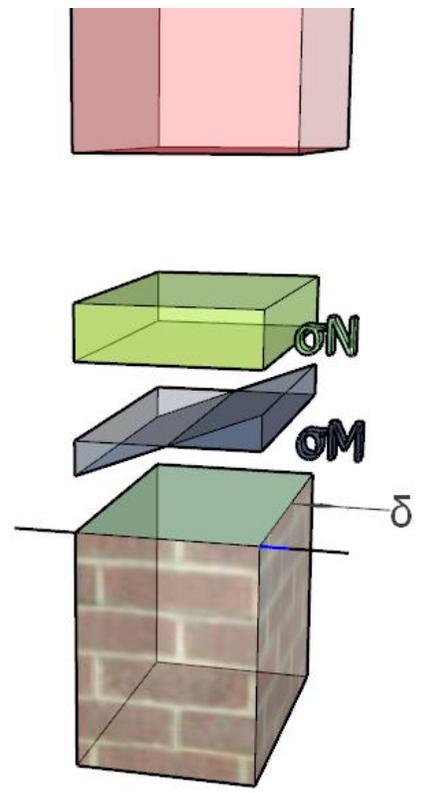
$$\sigma_{M1} = \frac{M^*z}{Jy1} = \frac{N^*e^*z}{Jy1}$$

$$\sigma_{T1} = \sigma_{N1} + \sigma_{M1}$$

$$\sigma_{N2} = \frac{N}{A2} = \frac{y^*b^*l^*h}{(b^*l)}$$

$$\sigma_{M2} = \frac{M^*z}{Jy2} = \frac{N^*e^*z}{Jy2}$$

$$\sigma_{T2} = \sigma_{N2} + \sigma_{M2}$$



A medida que se aumenta la caladura, aumenta la tensión por N

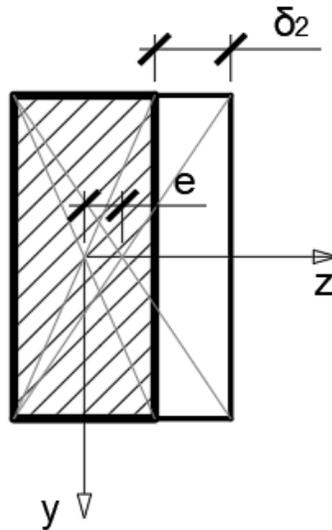
También aumentan las tensiones por M

El ejercicio, en el inciso a), nos pide que las tensiones sean todas de un mismo signo
 ¿Qué significa esto? ¿En qué punto se llegará primero a tensión nula?



De la Ec. 3)

$$\sigma_{XtotMAX (+)} = \sigma_N + \sigma_M = -\frac{\gamma \cdot b \cdot h}{(b - \delta)} + \frac{12 \cdot \gamma \cdot b \cdot h \cdot e}{(b - \delta)^3} \cdot \left(\frac{b - \delta}{2}\right)$$



$$0 = -\frac{\gamma \cdot b \cdot h}{(b - \delta)} + \frac{12 \cdot \gamma \cdot b \cdot h \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{b - \delta}{2}\right)}{(b - \delta)^3} \cdot \left(\frac{b - \delta}{2}\right)$$



$$\delta = 7,5 \text{ cm}$$

$$b' = 22,5 \text{ cm}$$

- Este valor de δ hace que las tensiones en el punto A sean 0, es decir que la línea neutra se encuentre en el extremo del muro.

- Reemplazando el valor hallado de δ en la Ec. 2), **se obtiene una tensión negativa σ_{T2} de 0,054 MPa**

+

=

$$\sigma_{N2} = \frac{N}{A2} = \frac{\gamma \cdot b' \cdot h}{(b' \cdot h)}$$

$$\sigma_{M2} = \frac{M \cdot z}{Jy2} = \frac{N \cdot e \cdot z}{Jy2}$$

$$\sigma_{T2} = \sigma_{N2} + \sigma_{M2}$$

¿Qué significa esto?

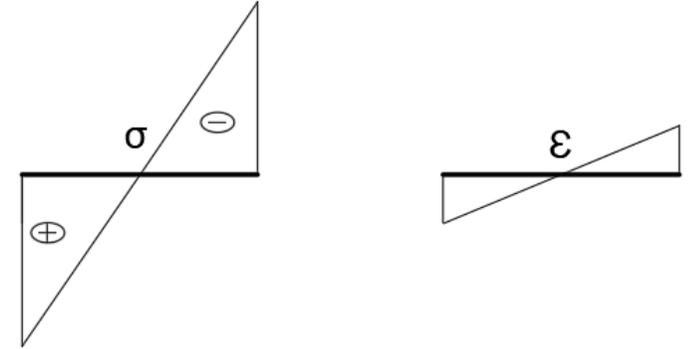
El material aún puede tomar más carga
(tensión admisible = 25MPa > 0,054MPa)



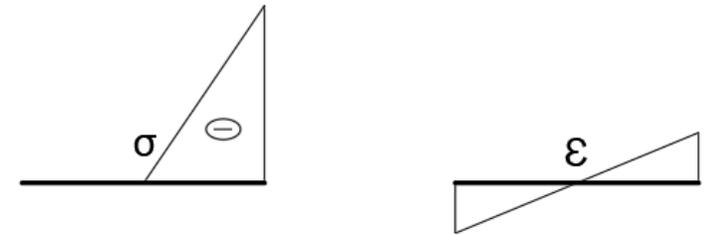
b) Para que la **tensión** no supere la admisible

¿Que pasa si aumento más la caladura?

Si el material fuera elástico lineal, sucedería lo siguiente:



Como el material no es lineal en todo su dominio (no puede “tomar” la tracción)



Esto significa que ya no existe linealidad mecánica, y dejan de ser válidas las expresiones que conocemos de flexión:

$$\sigma_X = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot z$$

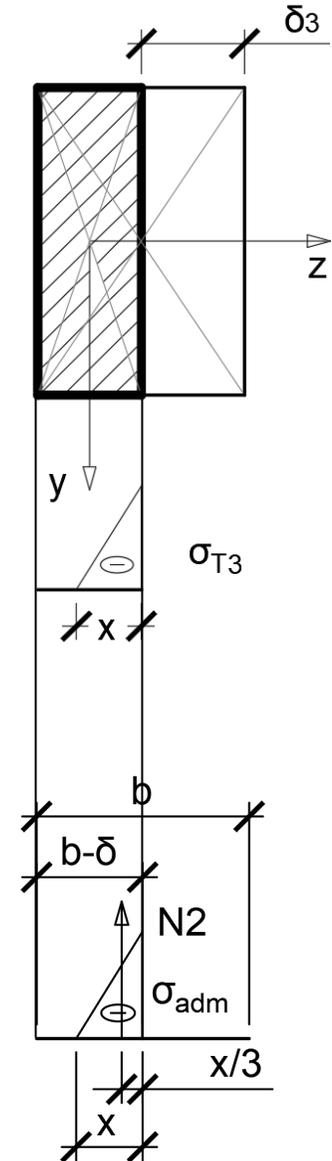
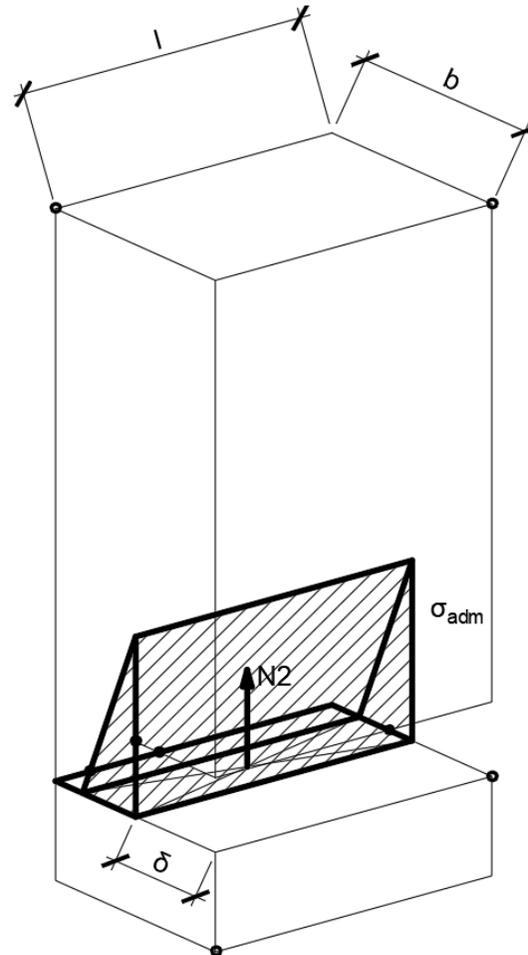
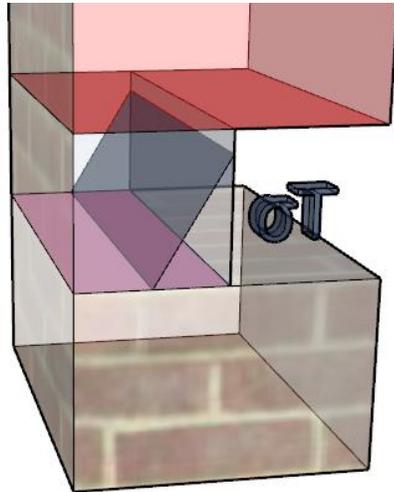
Pero siguen siendo válidas las Ecuaciones de Equivalencia



Ecuaciones de Equivalencia

$$N = \int_A \sigma dA$$

$$M = \int_A \sigma \cdot z dA$$





$$N = \int_A \sigma dA$$

→
$$N = \frac{\sigma_{adm} \cdot x \cdot l}{2} = \gamma \cdot b \cdot l \cdot h$$

$$M = \int_A \sigma \cdot z dA$$

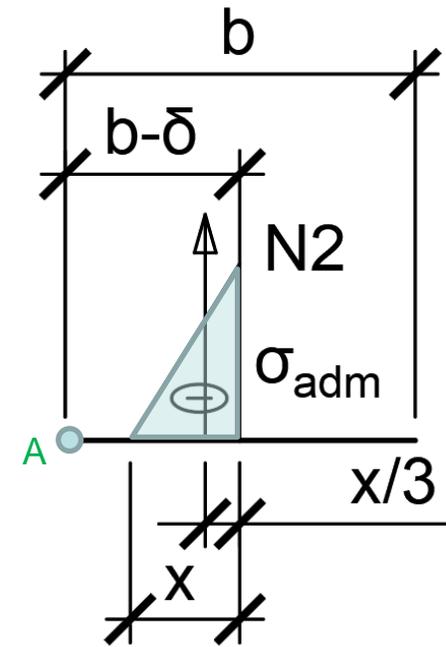
Tomando momento respecto del punto A:

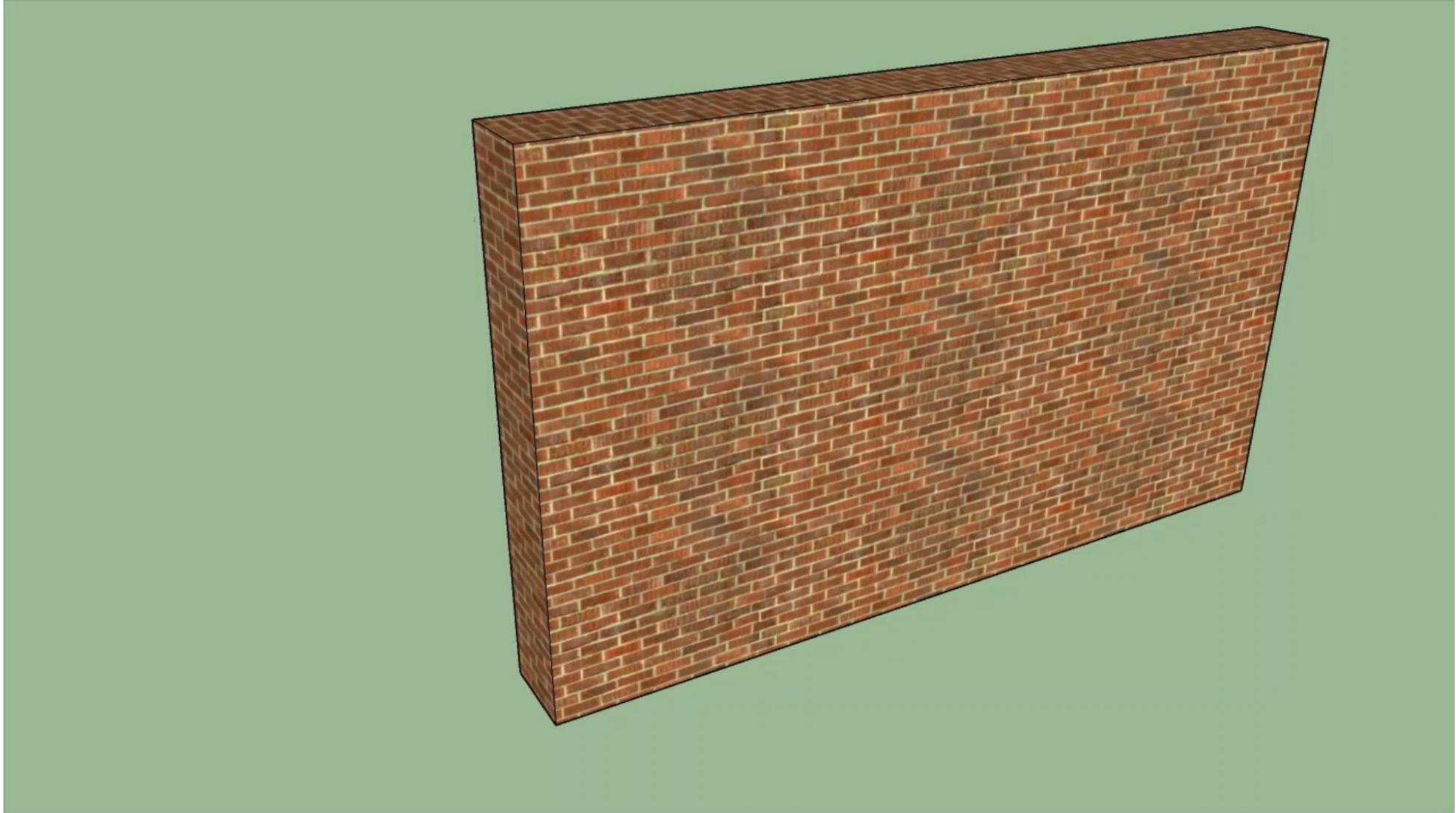
→
$$M = \left(\frac{\sigma_{adm} \cdot x \cdot l}{2} \right) \left(b' - \frac{x}{3} \right) = \gamma \cdot b \cdot l \cdot h \cdot \left(\frac{b}{2} \right)$$



$$x = 0,048 \text{ cm}$$

$$\delta = 14,98 \text{ cm}$$







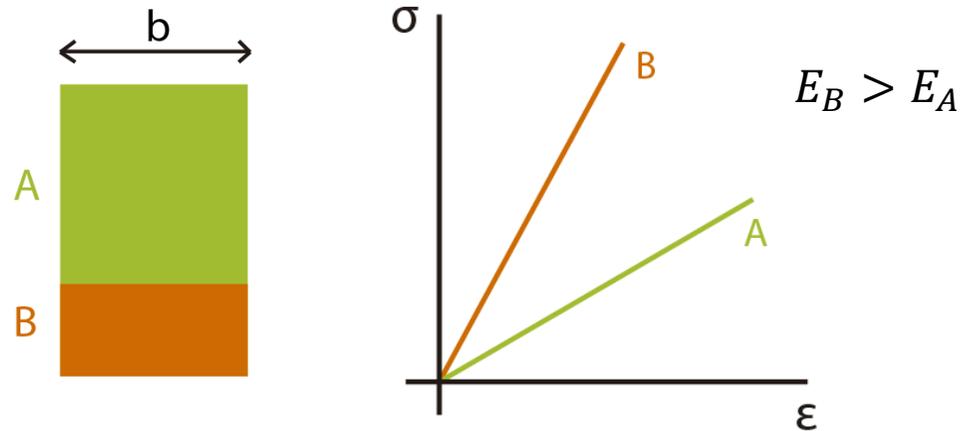
Homogeneización

¿Por qué homogeneizamos en secciones compuestas por más de un material?

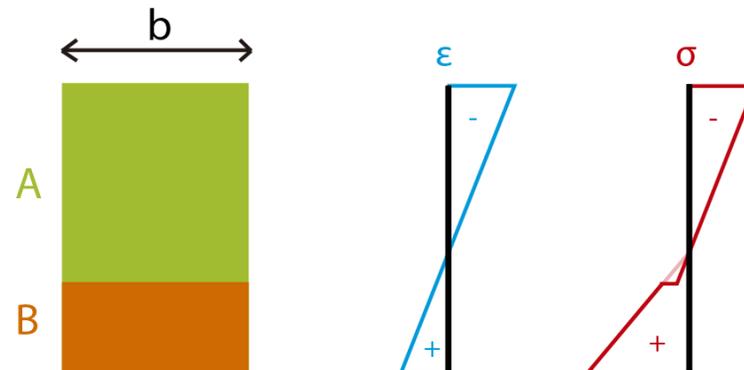
Porque al tener distintos módulos de elasticidad, no podemos utilizar la ecuación $\sigma = \frac{M}{J} \cdot d$

¿Por qué?

Porque ε sigue siendo lineal, Bernoulli-Navier sigue valiendo, y la ley de Hooke también, pero para cada material por separado.

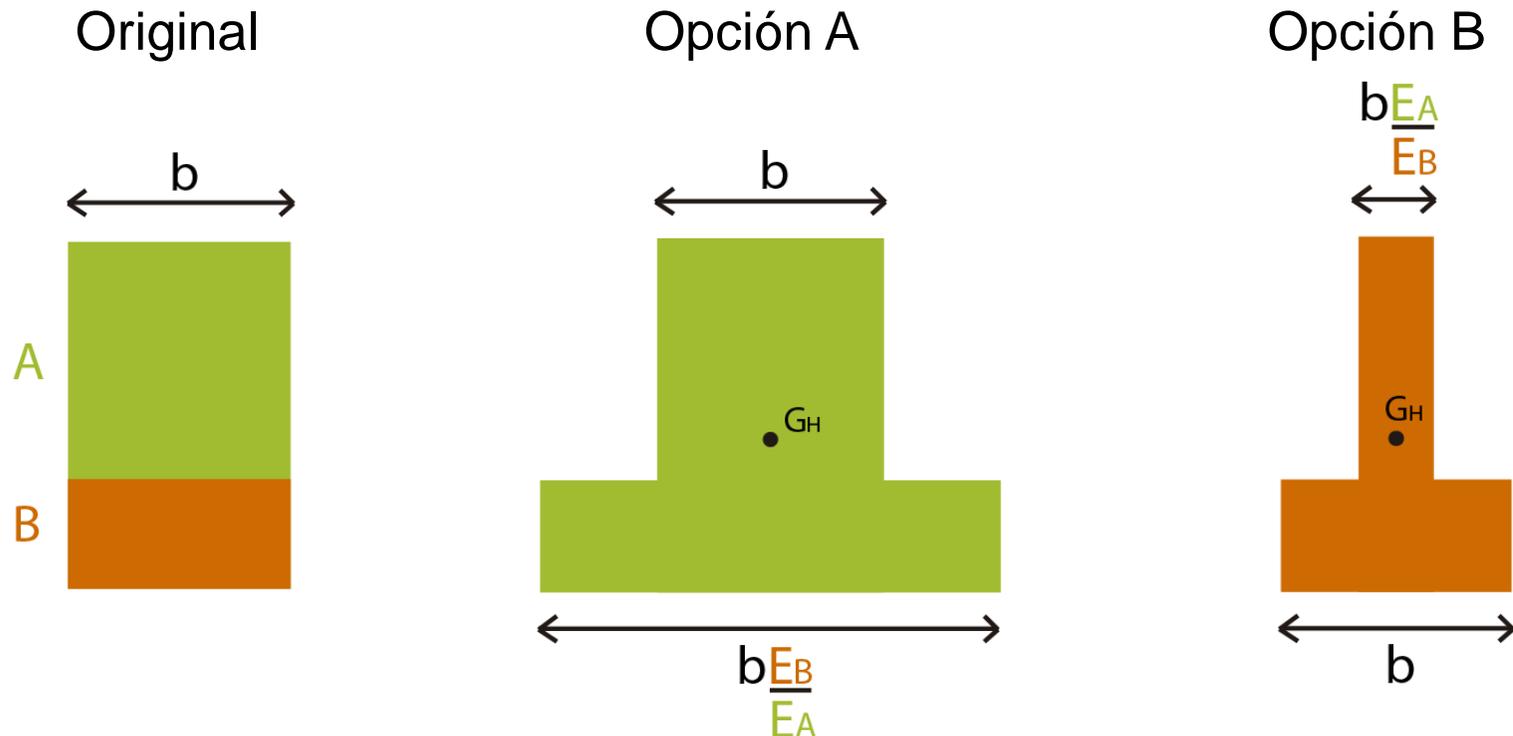


Esto genera que si ε es lineal pero cambia el módulo de elasticidad con cada material, el diagrama de tensiones deja de ser lineal.





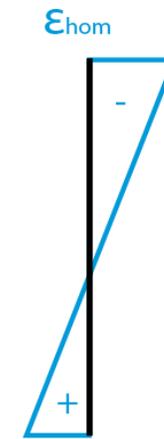
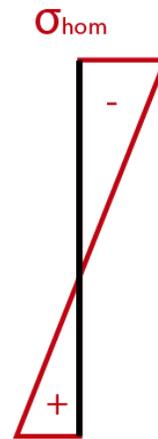
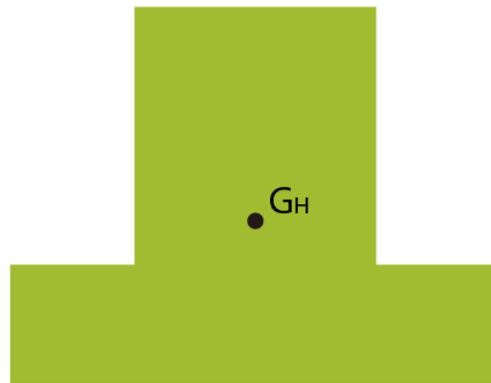
- Para resolver este “problema” de tener un diagrama de tensiones no lineal, homogeneizamos.
- Es indiferente cuál de los materiales homogeneizamos. El resultado debe ser el mismo.
- Para homogeneizar transformamos el lado paralelo al eje neutro, usando la ecuación: $b_i = b \cdot \frac{E_i}{E_H}$, donde i es el material que transformo y H el material al cual homogenizo.



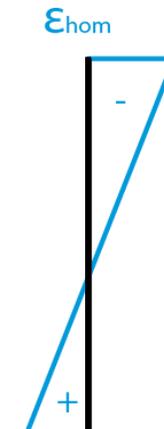
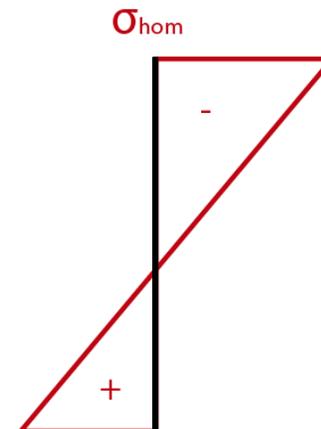
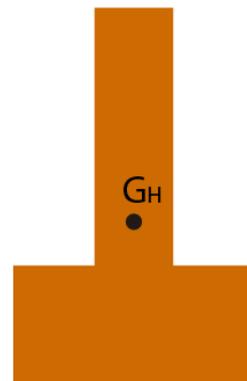


- Como ahora trabajamos con un material homogéneo, el diagrama de tensiones será lineal. Por lo tanto valdrán las fórmulas vistas anteriormente.
- Necesitamos hallar el baricentro y el momento de inercia de la sección homogenizada.
- Trazamos los diagramas utilizando la ecuación: $\sigma = \frac{M}{J_H} \cdot z$

Opción A

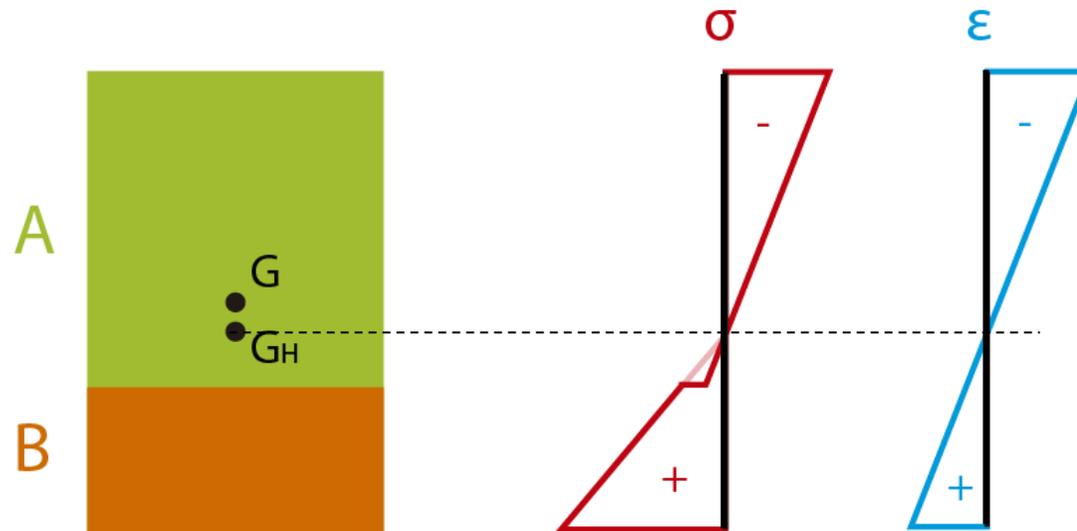


Opción B



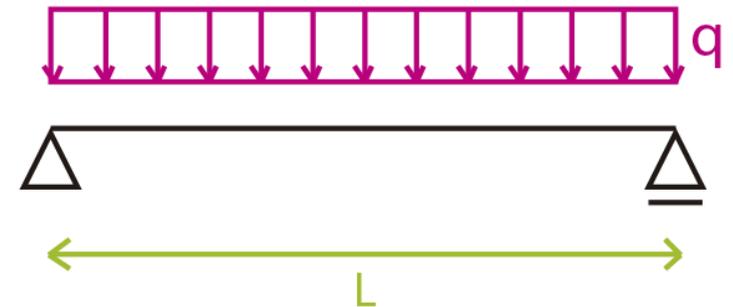
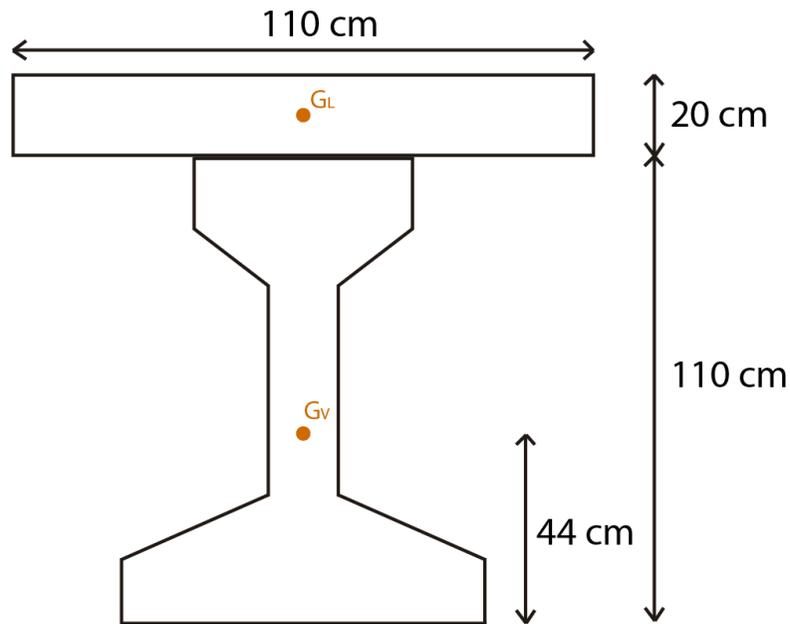


- Las tensiones calculadas anteriormente no son las tensiones reales de nuestra sección. Tenemos que des-homogeneizar y volver al original.
- Al volver a la sección orginial, el diagrama de deformaciones se mantendrá igual al de la sección homogenizada.
- El diagrama de tensiones cambia según la ecuación: $\sigma_i = \frac{E_i}{E_H} \cdot \sigma_H$
- La línea neutra pasará por el baricentro de la sección homogenizada.



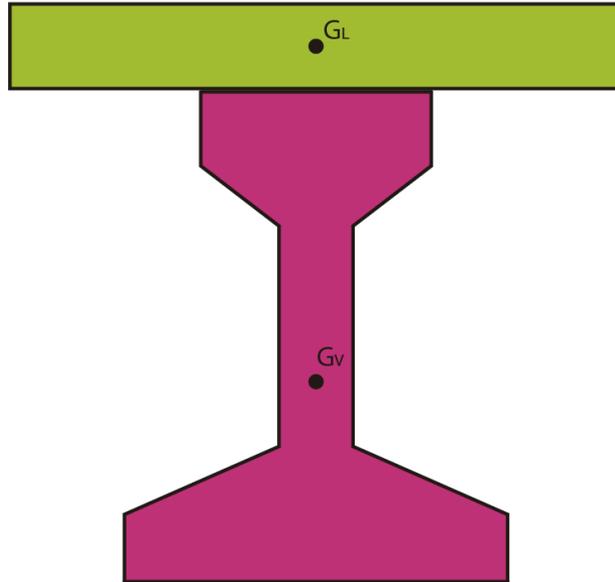


Ejercicio 3: Trazar los diagramas de deformación y de tensión y verificar por resistencia.



Datos:

- $q = 4,05 \frac{t}{m}$
- $L = 25 m$



$$H30 \Rightarrow \sigma_{adm}^- = 135 \frac{kg}{cm^2}$$

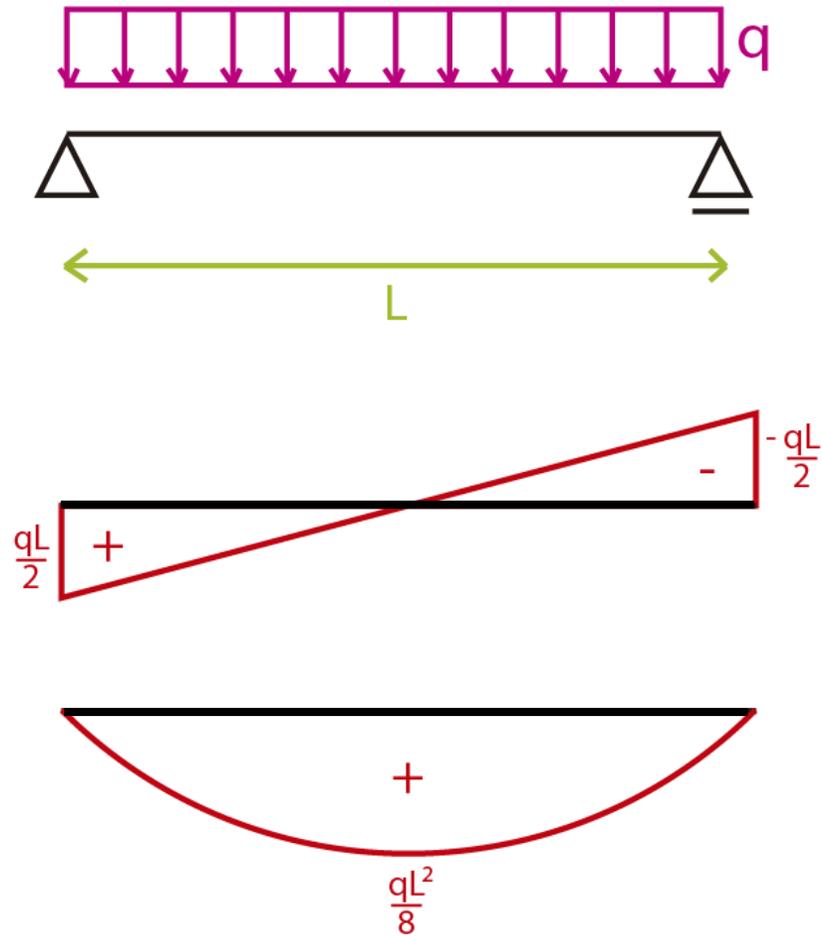
$$H38 \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_{adm}^- &= 160 \frac{kg}{cm^2} \\ \sigma_{adm}^+ &= 32 \frac{kg}{cm^2} \end{aligned}$$

Datos del perfil:

- $E_{H30} = 3,4 \cdot 10^5 \frac{kg}{cm^2}$
- $E_{H38} = 3,7 \cdot 10^5 \frac{kg}{cm^2}$
- $J_V = 0,0517 m^4$
- $A_V = 0,383 m^2$



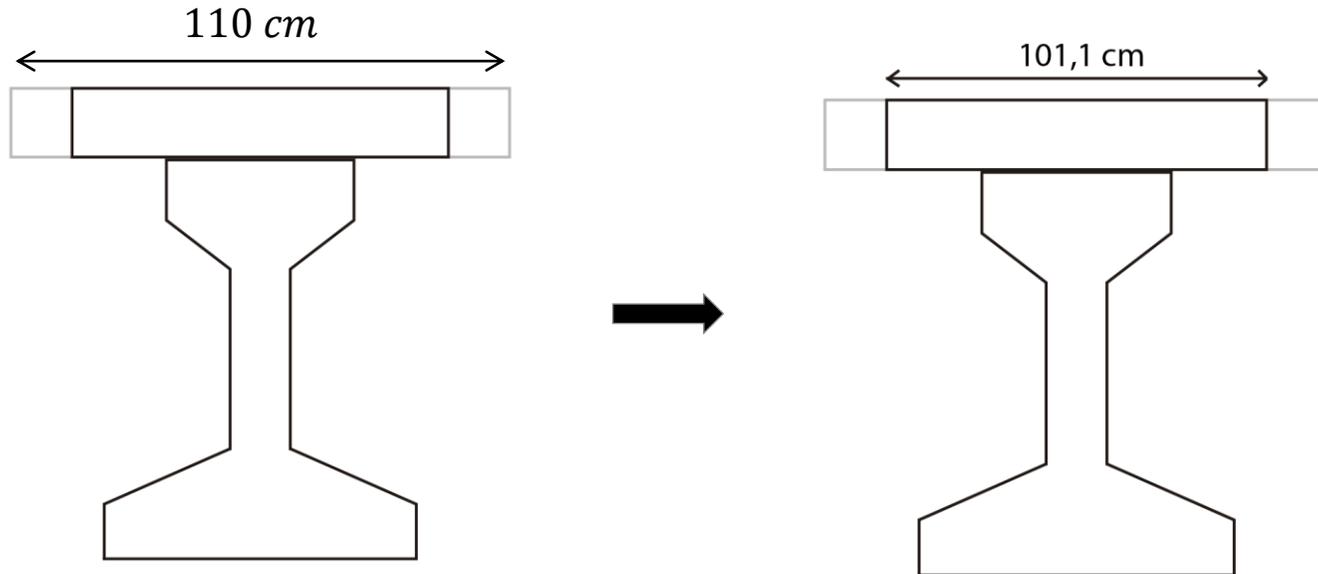
Trazamos los diagrama de características:



$$M = \frac{q \cdot L^2}{8} = 316 \text{ t m}$$



Homogeneizamos la losa al material de la viga por la simplicidad de su forma:

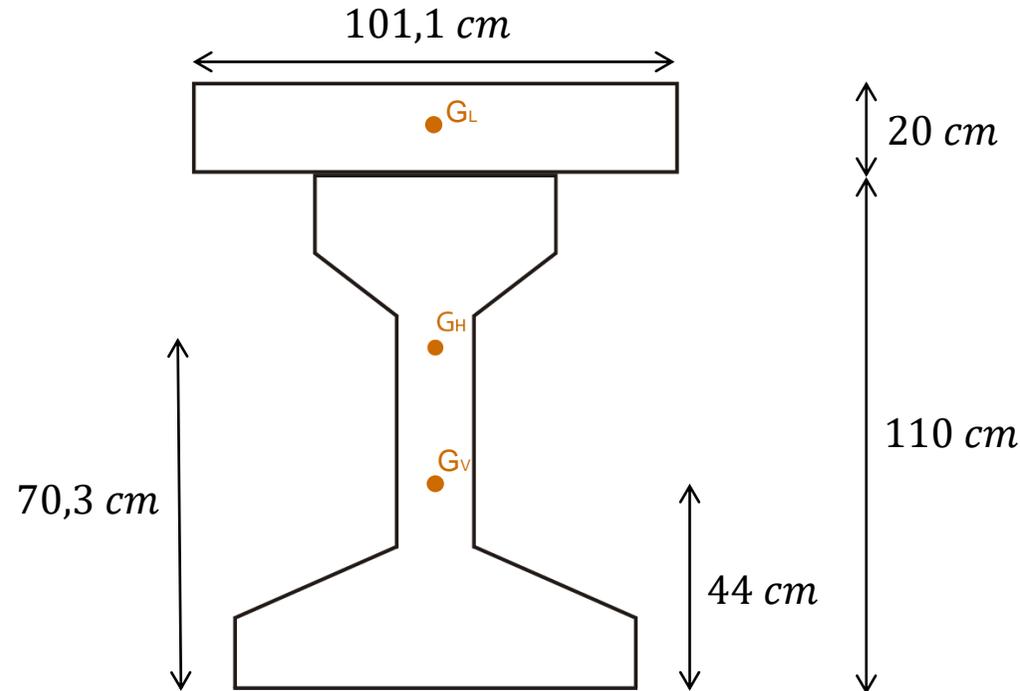


$$\eta = \frac{E_{H30}}{E_{H38}} = 0,919$$

$$b_{eq} = \eta \cdot b = 0,919 \cdot 110 \text{ cm} = 101,1 \text{ cm}$$



Calculamos el baricentro y el momento de inercia de la sección homogeneizada:

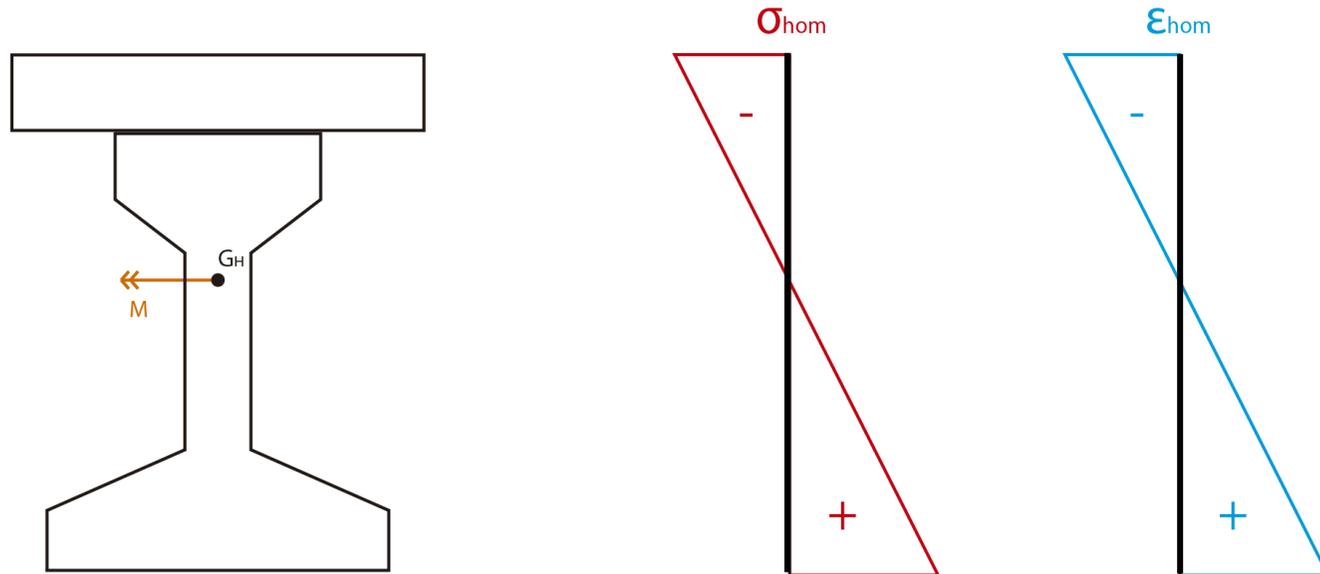


$$G_H = \frac{A_V \cdot G_V + A_L \cdot G_L}{A_V + A_L} = 70,3 \text{ cm}$$

$$J_H = J_V + (70,3 \text{ cm} - 44 \text{ cm})^2 \cdot A_V + \frac{101,1 \text{ cm} \cdot (20 \text{ cm})^3}{12} + (120 \text{ cm} - 70,3 \text{ cm})^2 \cdot A_L = 0,129 \text{ m}^4$$



Trazamos los diagramas de tensión y deformación de la sección homogeneizada:

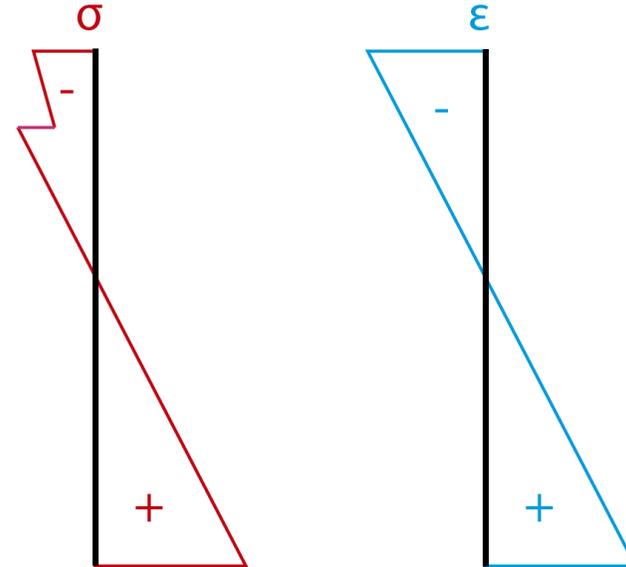
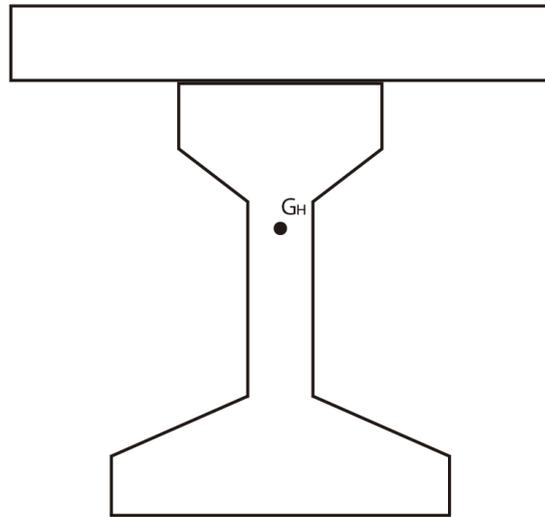


¡Recordatorio!

En la sección homogeneizada el diagrama de tensiones es continuo.



Trazamos los diagramas de tensión y deformación de la sección original:



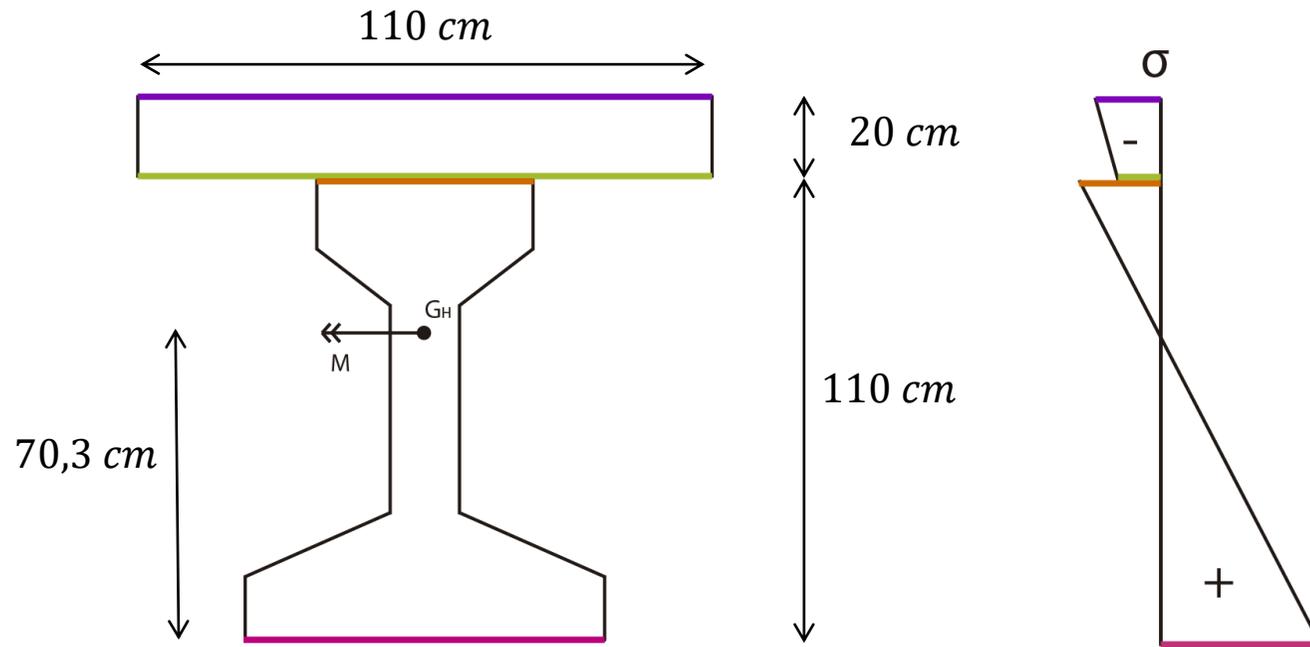
¡Recordatorio!

Los materiales más rígidos (de mayor E) son los que toman más σ .



¡Observación!

Como homogeneizamos al material más rígido, el salto del diagrama de tensiones representa una disminución respecto al diagrama de la homogenizada.



$$\sigma = \frac{M}{J_H} \cdot z_1 \cdot \eta = -134 \frac{kg}{cm^2} < \sigma_{H30}^- = 135 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma = \frac{M}{J_H} \cdot z_2 \cdot \eta = -89 \frac{kg}{cm^2} < \sigma_{H30}^- = 135 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma = \frac{M}{J_H} \cdot z_2 = -97 \frac{kg}{cm^2} < \sigma_{H38}^- = 160 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma = \frac{M}{J_H} \cdot z_3 = 172 \frac{kg}{cm^2} > \sigma_{H38}^+ = 32 \frac{kg}{cm^2}$$

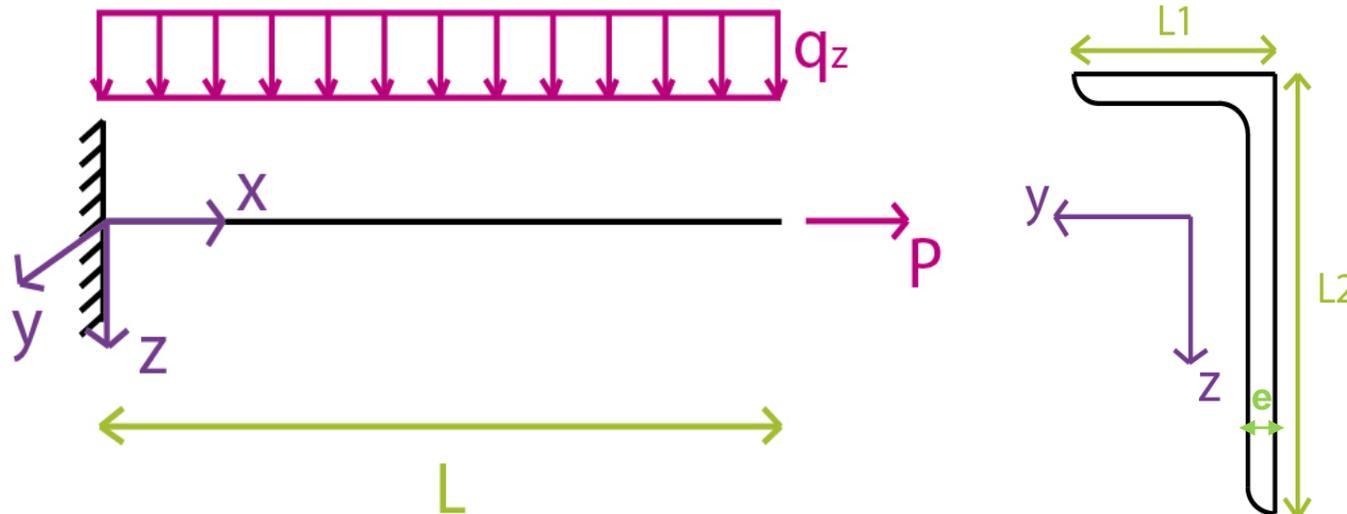
Verifica

No verifica \Rightarrow necesito
agregar acero que
resiste a tracción.



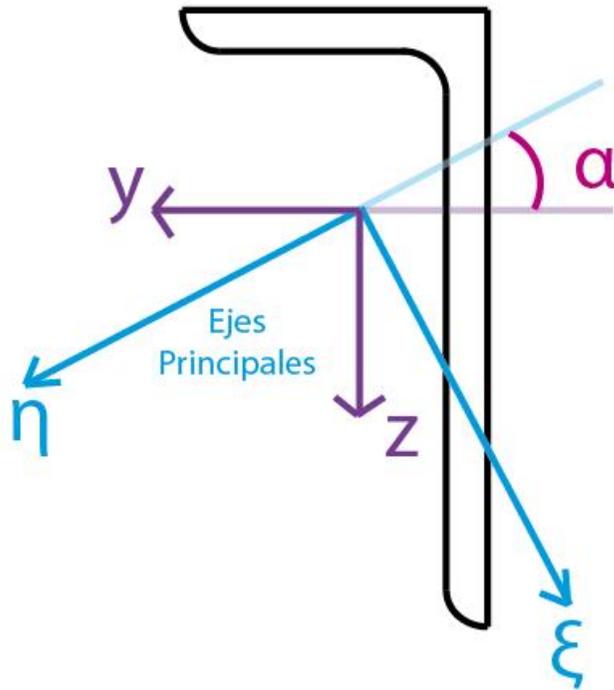
Ejercicio 4: Calcular y hallar:

- 1) $\sigma_{m\acute{a}x}$
- 2) Eje neutro, centro de presi3n y lnea de fuerzas



Datos:

- $q_z = 1 \frac{kN}{m}$
- $P = 100 kN$
- $L = 3 m$
- $L_1 = 100 mm$
- $L_2 = 200 mm$
- $e = 14 mm$



Datos del perfil:

- $J_{\eta} = 1760 \text{ cm}^4$
- $i_{\eta} = 6,60 \text{ cm}$
- $J_{\xi} = 181 \text{ cm}^4$
- $i_{\xi} = 2,12 \text{ cm}$
- $A = 40,3 \text{ cm}^2$
- $\alpha = 14,68^{\circ}$

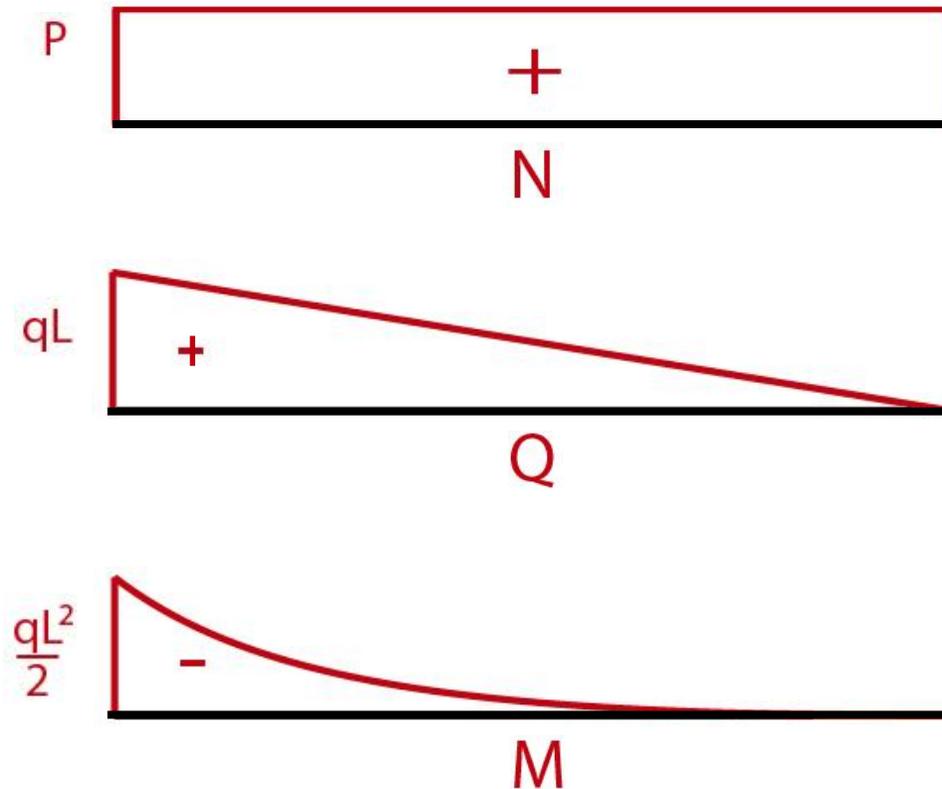
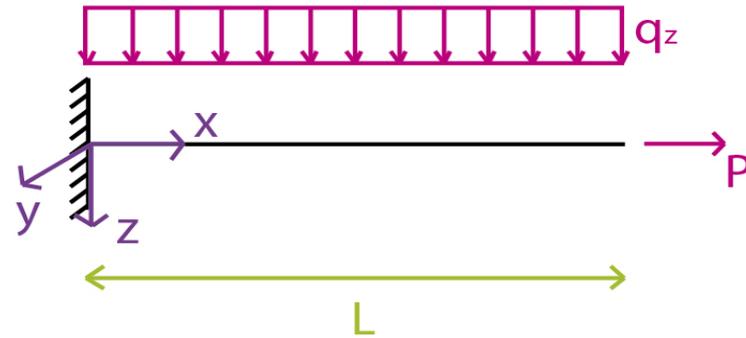
Como la ecuación dada para hallar las tensiones está en ejes principales:

$$\cancel{\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} - \frac{M_z \cdot y}{J_z}} \quad \longrightarrow \quad \text{pasa a ser} \quad \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{\eta} \cdot \xi}{J_{\eta}} - \frac{M_{\xi} \cdot \eta}{J_{\xi}}$$



Resolución:

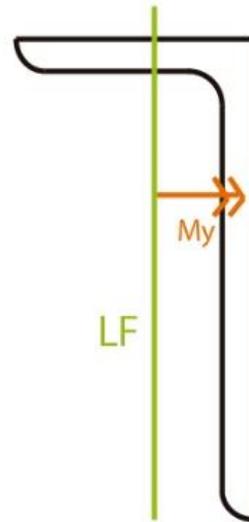
Trazamos los diagrama de características:





Línea de fuerzas:

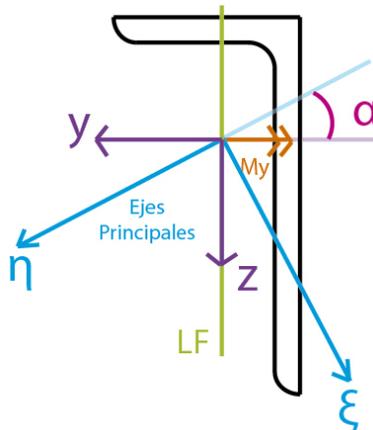
La línea de fuerzas es perpendicular al momento resultante:



¡Observación!

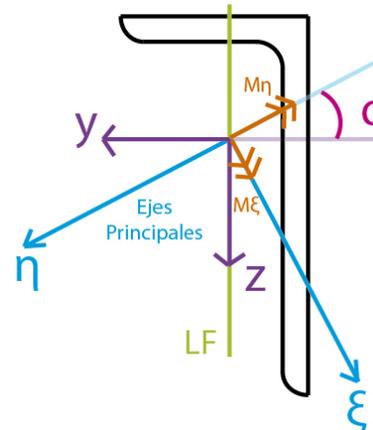
La línea de fuerzas SIEMPRE pasa por el baricentro de la sección.

Para poder utilizar la ecuación de tensiones dada anteriormente, proyectamos el momento en ejes principales:



$$M_y = -4,5 \text{ kN m}$$

≡

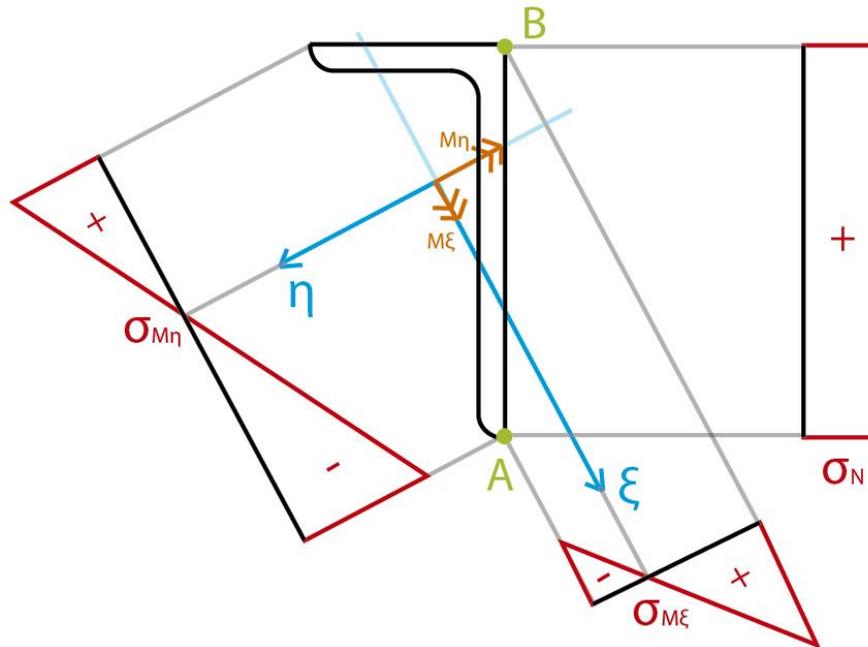


$$M_\eta = M_y \cdot \cos \alpha = -4,353 \text{ kN m}$$

$$M_\xi = -M_y \cdot \sin \alpha = 1,141 \text{ kN m}$$



Trazamos los diagramas de tensiones:



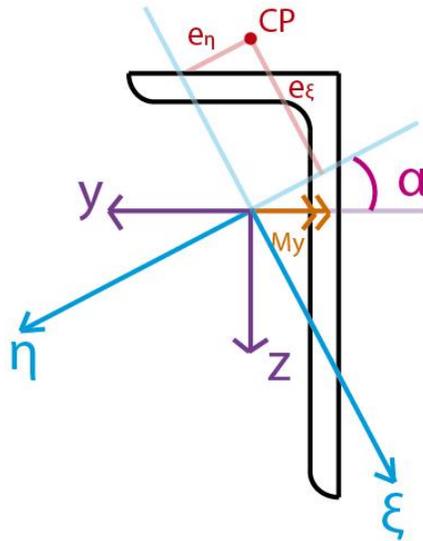
¡Observación!

Los diagramas de tensiones los trazamos perpendiculares al eje

En este caso, no parece estar tan claro cuál de los puntos, A o B, es el más tensionado. Al conocer las distancias de cada punto a los ejes principales, podemos comparar sus distancias al eje neutro: a mayor distancia, mayor σ .



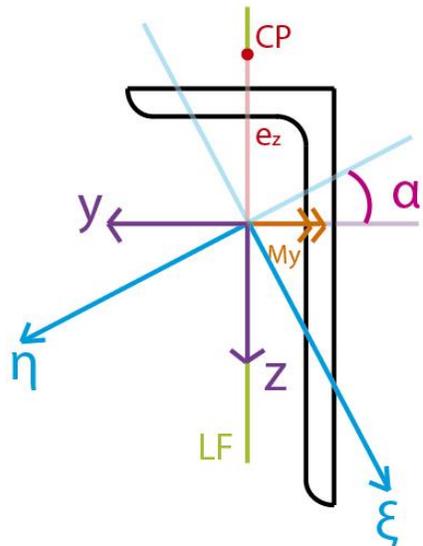
Centro de presión:



Coordenadas del centro de presión en ejes principales:

$$e_{\eta} = -\frac{M_{\xi}}{N} = -1,141 \text{ cm}$$

$$e_{\xi} = \frac{M_{\eta}}{N} = -4,353 \text{ cm}$$



Coordenada del centro de presión en el eje z:

$$e_z = \frac{M_y}{N} = -4,5 \text{ cm}$$



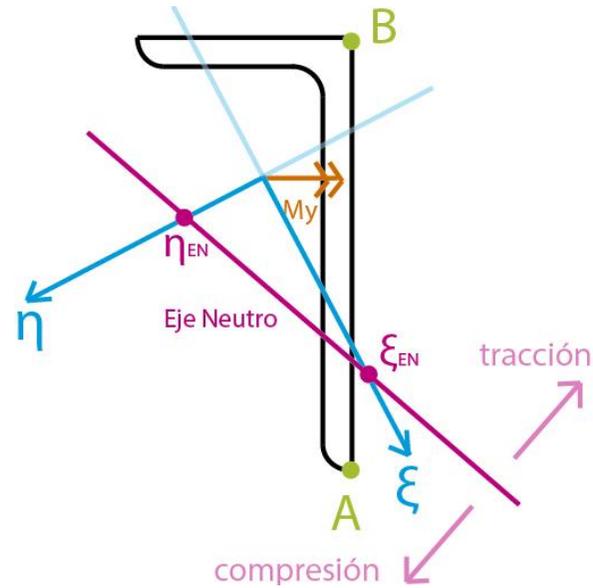
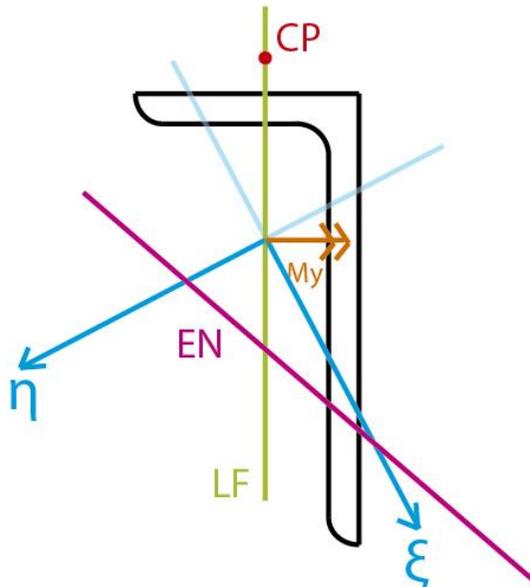
Eje neutro:

Ecuación del eje neutro:

$$\sigma = 0 = \frac{N}{A} + \frac{M_{\eta} \cdot \xi}{J_{\eta}} - \frac{M_{\xi} \cdot \eta}{J_{\xi}}$$

$$\text{Si } \eta = 0 \Rightarrow \xi_{EN} = 10,03 \text{ cm}$$

$$\text{Si } \xi = 0 \Rightarrow \eta_{EN} = 3,938 \text{ cm}$$



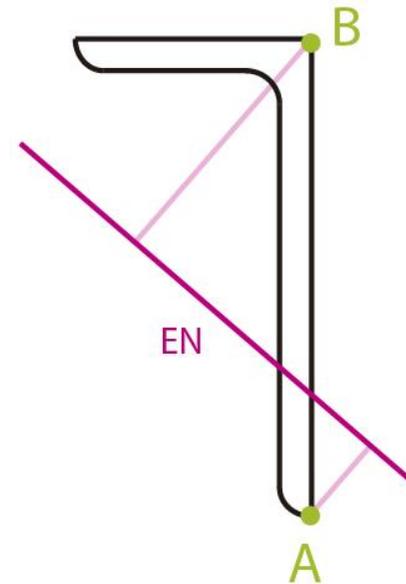
Se verifica que el centro de presión está sobre la línea de fuerzas y se encuentra en el semiplano opuesto al eje neutro.



Como el punto B está más alejado del eje neutro que el punto A



La tensión máxima se da en el punto B



Por relaciones trigonométricas se obtiene: $\left\{ \begin{array}{l} \eta_B = -3,93 \text{ cm} \\ \xi_B = -6,3 \text{ cm} \end{array} \right.$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_B = \frac{N}{A} + \frac{M_{\eta} \cdot \xi_B}{J_{\eta}} - \frac{M_{\xi} \cdot \eta_B}{J_{\xi}} \longrightarrow \sigma_B = 6,6513 \frac{kN}{cm^2}$$